第57卷第1期 数学学报中文版 Vol.57, No.1
2014年1月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Jan., 2014

文章编号: 0583-1431(2014)01-0131-08 **文献标识码: A**

带有非线性边界条件的拟线性方程组正解的存在性

杨国英 成军祥

河南理工大学数学系 焦作 454000
E-mail: ygyhfyg@163.com; cjx@hpu.edu.cn

摘 要 在这篇文章中, 我们讨论了带有非线性边界条件和权函数的的拟线性方程组, 主要借助对 Nehari 流形的分析, 在合适的参数条件下得到了方程组至少有两个不同的非平凡正解.

关键词 方程组; 正解; 非线性边界条件
MR(2010) 主题分类 34B18
中图分类 O175.35

Existence of Positive Solution for a Quasilinear System with Nonlinear Boundary Condition

Guo Ying YANG Jun Xiang CHENG

Department of Mathematics, He'nan Polytechnic University, Jiaozuo 454000, P. R. China
E-mail: ygyhfyg@163.com; cjx@hpu.edu.cn

Abstract In this paper, we consider the quasilinear elliptic systems with the nonlinear boundary condition and weight function. With the help of the Nehari manifold, we obtain the system has at least two nontrival positive solutions under the proper region of parameters.

Keywords systems; positive solutions; nonlinear boundary condiction
MR(2010) Subject Classification 34B18
Chinese Library Classification O175.35

收稿日期: 2011-10-25; 接受日期: 2013-04-16
基金项目: 国家自然科学基金项目 (11201124); 河南省教育厅自然科学基金项目 (12A110009)

1 引言

本文研究带有非线性边界条件的拟线性方程组

$$\begin{cases} -\Delta_p u + \gamma(x)|u|^{p-2}u = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}|u|^{\alpha-2}u|v|^{\beta}, & x \in \Omega, \\ -\Delta_p v + \gamma(x)|v|^{p-2}v = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}|u|^{\alpha}|v|^{\beta-2}v, & x \in \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \lambda g(x)|u|^{q-2}u, \quad |\nabla v|^{p-2}\dfrac{\partial v}{\partial \eta} = \mu h(x)|v|^{q-2}v, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

正解的存在性, 其中 $2 < p < \alpha+\beta < p^*$ ($p < N$ 时, $p^* = \frac{pN}{N-p}$; $p \geq N$ 时, $p^* = \infty$) $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $1 < q < p$. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是一有界光滑区域. $g(x), h(x) \in C(\bar{\Omega})$ 是给定的光滑函数, 在 $\overline{\Omega}$ 上变号且满足 $\|g\|_\infty = \|h\|_\infty = 1$, $\gamma(x)$ 是 Ω 上正的有界函数. 记 $S, \bar{S}$ 分别是 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 嵌入 $L^{\alpha+\beta}(\Omega)$ 和 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 嵌入 $L^q(\partial\Omega)$ 的最佳指数.

带有不同边界条件的拟线性方程, 许多作者进行了讨论 [2, 4–7]. 方法主要集中于 P.S. 条件, 变分方法, 不动点定理, 纤维方法等. 特别地, 在文 [7] 中, 作者用 Nehari 流形和 P.S. 条件考虑了形如 (1.1) 的带有齐次 Neumann 边界条件的单个方程正解的存在性. 文 [4] 作者用 Nehari 流形考虑了形如 (1.1) 的带有齐次 Dirichlet 边界条件的单个方程正解的存在性. 在上述两篇文章中,

$$\int_\Omega c(x)\phi^{\alpha+1}dx \leq 0$$

是个重要条件 (这里 $c(x)$ 变号, ϕ 是带有齐次 Neumann 边界条件的单个 p-Laplacian 方程的第一特征值对应的正特征函数), 而且结论依赖于特征值理论. 在文 [3] 中作者用 Nehari 方法考虑了 $p = 2$ 的半线性方程组, 得到了非平凡非负解的存在性. 本文假设

$$2 < p < \alpha + \beta,$$

在不依赖条件

$$\int_\Omega c(x)\phi^{\alpha+1}dx \leq 0$$

和特征值理论的情况下, 利用 Nehari 方法, 嵌入定理在其它合适条件下得到了方程组 (1.1) 在 $p > 2$ 时至少有两个非平凡正解. 关于这一方法的具体应用还可见文 [3, 4, 8].

定理 1.1 如果参数满足

$$0 < |\lambda|^{\frac{p}{p-q}} + |\mu|^{\frac{p}{p-q}} < C_1(\alpha, \beta, p, q, S, \bar{S}),$$

则问题 (1.1) 至少有两个不同的非平凡正解.

2 预备知识

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界光滑区域, 记 $Y = W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,p}(\Omega)$, 并定义范数为

$$\|(u,v)\|_Y = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p + \gamma(x)|u|^p dx + \int_\Omega |\nabla v|^p + \gamma(x)|v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

定义 2.1 (弱解) 我们称 $(u,v) \in Y$ 是方程组 (1.1) 的弱解, 如果对任意 $(z,w) \in Y$, 有

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla z dx + \int_\Omega \gamma(x)|u|^{p-2}uz dx \\ &\quad = \lambda \int_{\partial\Omega} g(x)|u|^{q-2}uz dx + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\int_\Omega |u|^{\alpha-2}u|v|^{\beta}z dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v\cdot\nabla w dx+\int_\Omega \gamma(x)|v|^{p-2}uwdx\\&=\mu\int_{\partial\Omega}h(x)|v|^{q-2}uwdx+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\int_\Omega |v|^{\beta-2}v|u|^{\alpha}wdx.\end{aligned}$$

定义

$$\begin{aligned}K(u,v)&=\lambda\int_{\partial\Omega}g(x)|u|^q ds+\mu\int_{\partial\Omega}h(x)|v|^q ds,\\J(u,v)&=\frac{1}{p}\|(u,v)\|_Y^p-\frac{1}{\alpha+\beta}\int_\Omega |u|^\alpha|v|^\beta dx-\frac{1}{q}K(u,v).\end{aligned}$$

观察知问题 (1.1) 具有变分结构. 对任意函数 f: $Y\longmapsto\mathbb{R}$, 我们用 $f'(u,v)(h_1,h_2)$ 表示 f 在 $(u,v)\in Y$ 处沿 $(h_1,h_2)\in Y$ 方向的 Gateaux 导数, 并记

$$f^{(1)}(u,v)h_1=f'(u+\epsilon h_1,v)|_{\epsilon=0},\quad f^{(2)}(u,v)h_2=f'(u,v+\delta h_2)|_{\delta=0}.$$

显然 J 的临界点就是问题 (1.1) 的弱解. 令

$$\Lambda=\{(u,v)\in Y\backslash(0,0):\langle J'(u,v),(u,v)\rangle=0\}.$$

经简单计算知 Λ 可以写成

$$\Lambda=\left\{(u,v)\in Y\backslash(0,0)\,\middle|\,\|(u,v)\|_Y^p-\int_\Omega |u|^\alpha|v|^\beta dx-K(u,v)=0\right\}.$$

定义 $\Phi(u,v)=\langle J'(u,v),(u,v)\rangle$, 对任意的 $(u,v)\in\Lambda$, 利用上式有

$$\begin{aligned}\langle\Phi'(u,v),(u,v)\rangle&=p\|(u,v)\|_Y^p-(\alpha+\beta)\int_\Omega |u|^\alpha|v|^\beta dx-qK(u,v)\\&=(p-\alpha-\beta)\int_\Omega |u|^\alpha|v|^\beta dx-(q-p)K(u,v)\qquad(2.1)\\&=(p-q)\|(u,v)\|_Y^p(\alpha+\beta-q)\int_\Omega |u|^\alpha|v|^\beta dx.\qquad(2.2)\end{aligned}$$

我们对集合 Λ 进行如下划分

$$\begin{aligned}\Lambda^+&=\{(u,v)\in\Lambda,\langle\Phi'(u,v),(u,v)\rangle>0\},\\\Lambda^-&=\{(u,v)\in\Lambda,\langle\Phi'(u,v),(u,v)\rangle<0\},\\\Lambda^0&=\{(u,v)\in\Lambda,\langle\Phi'(u,v),(u,v)\rangle=0\}.\end{aligned}$$

通过计算可得, 当 $(u,v)\in\Lambda^+$, $K(u,v)>0$. 而当 $(u,v)\in\Lambda^-$, 显然

$$\int_\Omega |u|^\alpha|v|^\beta dx>0.$$

引理 2.1　假设 (u_0,v_0) 是 J 在 Λ 中的极小且 $(u_0,v_0)\notin\Lambda_0$, 则 $J'(u_0,v_0)=0$.

证明参见文 [1].

引理 2.2　当 $0<|\lambda|^{\frac{p}{p-q}}+|\mu|^{\frac{p}{p-q}}<C(\alpha,\beta,p,q,S,\bar{S})$, 其中 $S,\bar{S}$ 分别是 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 嵌入 $L^{\alpha+\beta}(\Omega)$ 和 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 嵌入 $L^q(\partial\Omega)$ 的最佳指数

$$C(\alpha,\beta,q,S,\bar{S})=\left(\frac{\alpha+\beta-q}{p-q}S^{\alpha+\beta}\right)^{\frac{p}{p-\alpha-\beta}}\times\left(\frac{\alpha+\beta-p}{\alpha+\beta-q}\bar{S}^{-q}\right)^{\frac{p}{p-q}},$$

则 $\Lambda^0=\emptyset$.

证明 反证. 如果存在 $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ 满足 $0<|\lambda|^{\frac{p}{p-q}}+|\mu|^{\frac{p}{p-q}}<C(\alpha,\beta,q,S,\bar S)$, 使得 $\Lambda^0\neq\emptyset$. 则对 $(u,v)\in\Lambda^0$, 由 (2.1) 和 (2.2) 得

$$\begin{aligned}0&=(p-q)\|(u,v)\|_Y^p-(\alpha+\beta-q)\int_\Omega|u|^\alpha|v|^\beta dx\\&=(p-\alpha-\beta)\|(u,v)\|_Y^p-(q-\alpha-\beta)K(u,v).\end{aligned}$$

由嵌入定理和 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}\|(u,v)\|_Y&\geq\left(\frac{\alpha+\beta-q}{p-q}S^{\alpha+\beta}\right)^{\frac{1}{p-\alpha-\beta}},\\\|(u,v)\|_Y&\leq\left(\frac{\alpha+\beta-q}{\alpha+\beta-p}\right)^{\frac{1}{p-q}}\bar S^{\frac{q}{p-q}}(|\lambda|^{\frac{p}{p-q}}+|\mu|^{\frac{p}{p-q}})^{\frac1p},\end{aligned}$$

即 $|\lambda|^{\frac{p}{p-q}}+|\mu|^{\frac{p}{p-q}}\geq C(\alpha,\beta,p,q,S,\bar S)$ 矛盾, 从而原命题成立.

引理 2.3 当 $0<|\lambda|^{\frac{p}{p-q}}+|\mu|^{\frac{p}{p-q}}<C_1(\alpha,\beta,p,q,S,\bar S)$, 则

$$\inf_{(u,v)\in\Lambda^-}J(u,v)>0,\ \inf_{(u,v)\in\Lambda^+}J(u,v)<0.$$

证明 令 $(u,v)\in\Lambda^+$, 则

$$\begin{aligned}J(u,v)&=\frac1p\|(u,v)\|_Y^p-\frac{1}{\alpha+\beta}\int_\Omega|u|^\alpha|v|^\beta dx-\frac1qK(u,v)\\&<\left(\frac1p-\frac1q+(\frac1q-\frac{1}{\alpha+\beta})\frac{p-q}{\alpha+\beta-q}\right)\|(u,v)\|_Y^p\\&=-\frac{(p-q)(\alpha+\beta-p)}{pq(\alpha+\beta)}\|(u,v)\|_Y^p<0,\end{aligned}$$

即得

$$\inf_{(u,v)\in\Lambda^+}J(u,v)<0.$$

当 $(u,v)\in\Lambda^-$, 由 (2.1), (2.2) 及嵌入定理有

$$\frac{p-q}{\alpha+\beta-q}\|(u,v)\|_Y^p<\int_\Omega|u|^\alpha|v|^\beta dx,\quad\int_\Omega|u|^\alpha|v|^\beta dx\leq S^{\alpha+\beta}\|(u,v)\|_Y^{\alpha+\beta},$$

从而得

$$\|(u,v)\|_Y>\left(\frac{p-q}{(\alpha+\beta-q)S^{\alpha+\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-p}}.\tag{2.3}$$

因此, 由嵌入定理

$$\begin{aligned}J(u,v)&=\frac{\alpha+\beta-p}{p(\alpha+\beta)}\|(u,v)\|_Y^p-\frac{\alpha+\beta-q}{q(\alpha+\beta)}K(u,v)\\&\geq\|(u,v)\|_Y^q\left[\frac{\alpha+\beta-p}{p(\alpha+\beta)}\|(u,v)\|_Y^{p-q}-\bar S^q\left(\frac{\alpha+\beta-q}{q(\alpha+\beta)}\right)(|\lambda|^{\frac{p}{p-q}}+|\mu|^{\frac{p}{p-q}})^{\frac{p-q}{p}}\right]\\&>\left(\frac{p-q}{(\alpha+\beta-q)S^{\alpha+\beta}}\right)^{\frac{q}{\alpha+\beta-p}}\\&\quad\times\left[\frac{\alpha+\beta-p}{p(\alpha+\beta)}\left(\frac{p-q}{(\alpha+\beta-q)S^{\alpha+\beta}}\right)^{\frac{p-q}{\alpha+\beta-p}}-\bar S^q\left(\frac{\alpha+\beta-q}{q(\alpha+\beta)}\right)(|\lambda|^{\frac{p}{p-q}}+|\mu|^{\frac{p}{p-q}})^{\frac{p-q}{p}}\right]\\&>d.\end{aligned}$$

这里 d 是某个正常数. 这样得到

$$\inf_{(u,v)\in\Lambda^-} J(u,v) > 0.$$

为方便, 记 $L(u,v) = \int_\Omega |u|^\alpha |v|^\beta dx$. 对每个 $(u,v)\in Y$, 若 $L(u,v) > 0$, 令

$$t_{\max} = \left(\frac{(p-q)\|(u,v)\|_Y^p}{(\alpha+\beta-q)L(u,v)} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-p}} > 0.$$

注 2.4 由引理 2.3 的证明可以看出, $J(u,v)$ 在 Λ 中有下界. 而且, 可以计算出

$$C_1(\alpha,\beta,p,q,S,\bar{S}) = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{p}{p-q}} C(\alpha,\beta,p,q,S,\bar{S}),$$

这里 $C(\alpha,\beta,p,q,S,\bar{S})$ 的表达式见引理 2.3.

引理 2.5 对每个 $(u,v)\in Y$, 若 $L(u,v) > 0$, 有

(i) 若 $K(u,v)\le 0$, 则存在唯一的 $t^- > t_{\max}$, 使得

$$(t^-u, t^-v) \in \Lambda^-, \quad J(t^-u,t^-v) = \sup_{t\ge 0} J(tu,tv).$$

(ii) 若 $K(u,v) > 0$, 则存在唯一的 $0 < t^+ < t_{\max} < t^-$, 使得

$$\begin{aligned} &(t^-u,t^-v)\in\Lambda^-, \quad (t^+u,t^+v)\in\Lambda^+, \\ &J(t^-u,t^-v) = \sup_{t\ge 0} J(tu,tv), \quad J(t^+u,t^+v) = \inf_{0\le t\le t_{\max}} J(tu,tv). \end{aligned}$$

证明 记 $P(t) = t^{p-q}\|(u,v)\|_Y{}^p - t^{\alpha+\beta-q}L(u,v)$, 其中 $t\ge 0$, 由 $P(t)$ 函数的单调性可得 $P(t)$ 在 $t\in[0,t_{\max})$ 递增, $P(0)=0$. 在 $t\in(t_{\max},+\infty)$ 递减, 当 $t\to+\infty$ 时, $P(t)\to-\infty$. 且

$$P(t_{\max}) = \|(u,v)\|_Y^q \left[\left(\frac{p-q}{\alpha+\beta-q}\right)^{\frac{p-q}{\alpha+\beta-p}} - \left(\frac{p-q}{\alpha+\beta-q}\right)^{\frac{\alpha+\beta-q}{\alpha+\beta-p}} \right] \left(\frac{\|(u,v)\|_Y^{\alpha+\beta}}{L(u,v)} \right)^{\frac{p-q}{\alpha+\beta-p}} \tag{2.4}$$

$$\ge \|(u,v)\|_Y^q \left(\frac{\alpha+\beta-p}{\alpha+\beta-q}\right) \left(\frac{\alpha+\beta-q}{p-q} S^{\alpha+\beta} \right)^{\frac{p-q}{p-\alpha-\beta}} > 0. \tag{2.5}$$

(i) $K(u,v)\le 0$, 则存在唯一的 $t^- > t_{\max}$, 使得 $P(t^-) = K(u,v)$, $P'(t^-) < 0$, 且

$$\begin{aligned} &(p-q)(t^-)^p\|(u,v)\|_Y^p - (\alpha+\beta-q)(t^-)^{\alpha+\beta}L(u,v) = (t^-)^{1+q}P'(t^-) < 0, \\ &\langle J'(t^-u,t^-v), (t^-u,t^-v)\rangle = (t^-)^q (P(t^-) - K(u,v)) = 0. \end{aligned}$$

因此, $(t^-u,t^-v)\in\Lambda^-$. 当 $t > t_{\max}$, 有

$$(p-q)\|(tu,tv)\|_Y^p - (\alpha+\beta-q)L(tu,tv) < 0, \quad \frac{d^2}{dt^2}J(tu,tv) < 0.$$

当 $t = t^-$ 时, $\frac{d}{dt}J(tu,tv) = t\|(u,v)\|_Y^p - t^{\alpha+\beta}L(u,v) - t^q K(u,v) = 0$. 因此

$$J(t^-u,t^-v) = \sup_{t\ge 0} J(tu,tv).$$

(ii) $K(u,v) > 0$. 由嵌入定理

$$\begin{aligned} 0 = P(0) < K(u,v) &\le |\bar{S}^q(\lambda|^{\frac{p}{p-q}} + |\mu|^{\frac{p}{p-q}})^{\frac{p-q}{p}} \|(u,v)\|_Y^q \\ &< \|(u,v)\|_Y^q \left(\frac{\alpha+\beta-p}{\alpha+\beta-q}\right) \left(\frac{\alpha+\beta-q}{p-q} S^{\alpha+\beta} \right)^{\frac{p-q}{p-\alpha-\beta}} \le P(t_{\max}). \end{aligned}$$

又根据 $P(t)$ 的单调性知存在唯一的 t^+, t^-, 使得 $0 < t^+ < t_{\max} < t^-$, 且

$$P(t^+) = K(u,v) = P(t^-), \quad P'(t^+) > 0 > P'(t^-).$$

因此有 $(t^+u, t^+v) \in \Lambda^+$, $(t^-u, t^-v) \in \Lambda^-$. 对每个 $t \in [t^+, t^-]$,

$$J(t^-u, t^-v) \geq J(tu, tv) \geq J(t^+u, t^+v).$$

当 $t \in [0, t^+]$ 时, $J(tu, tv) \geq J(t^+u, t^+v)$. 从而

$$J(t^-u, t^-v) = \sup_{t\geq 0} J(tu, tv), \quad J(t^+u, t^+v) = \inf_{0\leq t\leq t_{\max}} J(tu, tv).$$

证毕.

为方便, 当 $K(u,v) > 0$ 时, 记

$$\bar{t}_{\max} = \left(\frac{(\alpha+\beta-q)K(u,v)}{(\alpha+\beta-p)\|(u,v)\|_Y^p} \right)^{\frac{1}{p-q}} > 0$$

引理 2.6 当 $K(u,v) > 0$ 时, 则存在唯一的 $0 < t^+ < \bar{t}_{\max} < t^-$, 使得

$$(t^+u, t^+v) \in \Lambda^+, (t^-u, t^-v) \in \Lambda^-,$$

$$J(t^+u, t^+v) = \inf_{0\leq t\leq \bar{t}_{\max}} J(tu, tv), J(t^-u, t^-v) = \sup_{t\geq 0} J(tu, tv).$$

证明 固定 $(u,v) \in Y$, 记 $\bar{P}(t) = t^{p-\alpha-\beta}\|(u,v)\|_Y{}^p - t^{-\alpha-\beta+q}K(u,v)$. 计算导数后得 $\bar{P}(t)$ 有唯一的稳定点 $t = \bar{t}_{\max}$, 且在该点达最大值. 其余类似上一个定理的证明.

3 定理 1.1 的证明

定理 3.1 当 $0 < |\lambda|^{\frac{p}{p-q}} + |\mu|^{\frac{p}{p-q}} < C_1(\alpha, \beta, p, q, S, \bar{S})$, 则 J 在 Λ^+ 有一个极小 (u^+, v^+), 且 (u^+, v^+) 就是方程 (1.1) 的非平凡的正解.

证明 设 $\{(u_n, v_n)\}$ 是 J 在 Λ^+ 上的极小化序列, 则由嵌入定理知存在一个子列及 $(u^+, v^+) \in Y$ (为方便仍记 $\{(u_n, v_n)\}$), 使得在 $L^q(\partial\Omega)$ 和 $L^{\alpha+\beta}(\Omega)$ 上 $u_n \to u^+$, $v_n \to v^+$. 在 $W_0^{1,p} \times W_0^{1,p}$ 上 $(u_n, v_n) \rightharpoonup (u^+, v^+)$. 从而当 $n \to +\infty$ 时,

$$K(u_n, v_n) \to K(u^+, v^+), \quad L(u_n, v_n) \to L(u^+, v^+).$$

由于

$$J(u_n, v_n) = \frac{\alpha+\beta-p}{p(\alpha+\beta)}\|(u_n, v_n)\|_Y^p - \frac{\alpha+\beta-q}{q(\alpha+\beta)}K(u_n, v_n),$$

两边取极限并注意到引理 2.3, 有

$$\inf_{(u,v)\in\Lambda^+} J(u,v) = \lim_{n\to\infty} J(u_n, v_n) < 0,$$

从而有 $K(u^+, v^+) > 0$. 下面证明在 $W_0^{1,p} \times W_0^{1,p}$ 上 $(u_n, v_n) \to (u^+, v^+)$. 若不然

$$\|u^+\|_{1,p} < \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{1,p}, \quad 或 \quad \|v^+\|_{1,q} < \lim_{n\to\infty} \|v_n\|_{1,q}.$$

选取 (u,v) 满足 $K(u,v) > 0$. 令 $\phi(t) = \bar{P}(t) - L(u,v)$, 则当 $t \to 0^+$ 时, $\phi(t) \to -\infty$, 当 $t \to \infty$ 时, $\phi(t) \to -L$. 又 $\phi'(t) = \bar{P}'(t)$, 和引理 2.6 类似的证明知 ϕ 在 $\bar{t}_{\max}$ 达到最大值, 其中

$$\bar{t}_{\max} = \left(\frac{(\alpha+\beta-q)K(u,v)}{(\alpha+\beta-p)\|(u,v)\|_Y^p} \right)^{\frac{1}{p-q}}.$$

因 $K(u^+,v^+)>0$, 则存在唯一的 $0<t^+<\bar t_{\max}(u^+,v^+)$, 使得

$$(t^+u^+,t^+v^+)\in\Lambda^+,\quad J(t^+u^+,t^+v^+)=\inf_{0<t<\bar t_{\max}}J(tu^+,tv^+).$$

故

$$\phi(t^+)=(t^+)^{-\alpha-\beta}\big(\|(t^+u^+,t^+v^+)\|_Y^p-K(t^+u^+,t^+v^+)-L(t^+u^+,t^+v^+)\big)=0. \tag{3.1}$$

对序列 (u_n,v_n) 而言, $\phi(t^+)>0$ 在 $n\to\infty$ 时成立. 注意到 $(u_n,v_n)\in\Lambda^+$, 从而 $\bar t_{\max}(u_n,v_n)>1$. 而且 $\phi(t)$ 在 $t\in(0,\bar t_{\max}(u_n,v_n))$ 区间单调递增

$$\phi(1)=\|(u_n,v_n)\|_Y^P-K(u_n,v_n)-L(u_n,v_n)=0.$$

由此, 当 $n\to\infty,\ t\in(0,1]$ 时, $\phi(t)\le 0$. 从而 $1<t^+\le\bar t_{\max}(u^+,v^+)$, 注意到

$$(t^+u^+,t^+v^+)\in\Lambda^+,\quad J(t^+u^+,t^+v^+)=\inf_{0<t<\bar t_{\max}}J(tu^+,tv^+),$$

即有

$$J(t^+u^+,t^+v^+)<J(u^+,v^+)<\lim_{n\to\infty}J(u_n,v_n).$$

矛盾. 从而 $W_0^{1,p}\times W_0^{1,p}$ 上 $(u_n,v_n)\to(u^+,v^+)$, 即得

$$n\to\infty,\quad J(u_n,v_n)\to J(u^+,v^+).$$

(u^+,v^+) 就是泛函在 Λ^+ 上的极小, 且满足 $(|u^+|,|v^+|)$ 也是极小. 再结合引理 2.1 知 (u^+,v^+) 是问题 (1.1) 的非负解. 下面证明 $u^+\ne 0, v^+\ne 0$. 否则, 不失一般性, 可设 $v\equiv 0$, 则 u^+ 是下面问题的解

$$\begin{cases}-\Delta_p u+\gamma(x)|u|^{p-2}u=0, & x\in\Omega,\\ |\partial u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial\eta}=\lambda g(x)|u|^{q-2}u, & x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{3.2}$$

且成立

$$\|u^+\|^p=\lambda\int_{\partial\Omega}g(x)|u^+|^q ds>0.$$

选取合适的 $w\in W^{1,p}\backslash\{0\}$, 使得

$$\|w\|^p=\mu\int_{\partial\Omega}h(x)|w|^q ds>0,$$

则

$$\lambda\int_{\partial\Omega}g(x)|u^+|^q ds+\mu\int_{\partial\Omega}h(x)|w|^q ds>0.$$

由引理 2.6 知存在唯一的 $0<\bar t<\bar t_{\max}$, 使得 $(\bar tu^+,\bar tw)\in\Lambda^+$. 进一步地, 计算得

$$\bar t_{\max}=\left(\frac{\alpha+\beta-q}{\alpha+\beta-p}\right)^{\frac{1}{p-q}}>1,\quad J(\bar tu^+,\bar tw)=\inf_{0\le t\le\bar t_{\max}}J(tu^+,tw).$$

从而有

$$J(\bar tu^+,\bar tw)\le J(u^+,w)<J(u^+,0),$$

这与 $(u^+,0)$ 是极小点矛盾.

定理 3.2 当 $0<|\lambda|^{\frac{p}{p-q}}+|\mu|^{\frac{p}{p-q}}<C_1(\alpha,\beta,p,q,S,\bar{S})$, 则 J 在 Λ^- 有一个极小 (u^-,v^-), 且 (u^-,v^-) 就是方程 (1.1) 的非平凡的正解.

证明 设 $\{(u_n,v_n)\}$ 是 J 在 Λ^- 上的极小化序列, 则存在 $(u^-,v^-)\in Y$, 由嵌入定理存在一个子列 (为方便仍记 $\{(u_n,v_n)\}$), 在 $L^q(\partial\Omega)$ 和 $L^{\alpha+\beta}(\Omega)$ 上 $u_n\to u^+$, $v_n\to v^+$. 在 $W_0^{1,p}\times W_0^{1,p}$ 上 $(u_n,v_n)\rightharpoonup(u^-,v^-)$. 从而当 $n\to+\infty$ 时,

$$K(u_n,v_n)\to K(u^-,v^-),\quad L(u_n,v_n)\to L(u^-,v^-).$$

而且有

$$L(u_n,v_n)>\frac{p-q}{\alpha+\beta-q}\|(u_n,v_n)\|^p.$$

注意到 (2.3) 式, 从而存在某正数 C, 使得

$$L(u^-,v^-)\geq C>0. \tag{3.3}$$

下面证明在 $W_0^{1,p}$ 空间中, $u_n\to u^-$, $v_n\to v^-$. 否则

$$\|u^-\|_{1,p}<\lim_{n\to\infty}\|u_n\|_{1,p},\quad \text{或}\quad \|v^-\|_{1,q}<\lim_{n\to\infty}\|v_n\|_{1,q}.$$

由引理 2.5, 存在唯一的 t_0, 使得

$$(t_0u^-,t_0v^-)\in\Lambda^-,\quad J(t_0u^-,t_0v^-)<\lim_{n\to\infty}J(t_0u_n,t_0v_n)\leq J(u_n,v_n).$$

这得到了矛盾. 因此, 当 $n\to\infty$, $J(u_n,v_n)\to(u^-,v^-)$. 类似地 $(|u^-|,|v^-|)\in\Lambda^-$. 由 (3.3) 得 (u^-,v^-) 是问题 (1.1) 的非平凡正解.

事实上, 根据定理 3.1 和定理 3.2 得 (1.1) 有两个非负非平凡解

$$(u_+,v_+)\in\Lambda^+,\quad (u_-,v_-)\in\Lambda^-.$$

又由于 $\Lambda^+\cap\Lambda^-=\emptyset$, 因此问题 (1.1) 有两个不同的非负非平凡解.

参 考 文 献

[1] Binding P. A., Drabek P., Huang Y. X., On Neumann boundary value problems for some quasilinear elliptic equations, *Electron. J. Differential Equations*, 1997, **5**: 1–11.

[2] Bozhkov Y., Mitidieri V., Existence of multiple solutions for quasilinear systems via fibering method, *J. Differentail Equations*, 2003, **A127**: 239–267.

[3] Brown K. J., Wu T. F., A semilinear ellptic system involving nonlinear boundary condiction and sign changing weight function, *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, **337**: 1326–1336.

[4] Brown K. J., Zhang Y. P., The Nehari manifold for a semilinear elliptic equation with a sign-changing weight function, *J. Differential Equations*, 2003, **193**: 481–499.

[5] Drabek P., Pohozaev S. I., Positive solutions for the p-Laplacian: application of the fibering method, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 1997, **A127**: 703–726.

[6] Guo Z. M., Some existence and multiplicity results for a class of quasilinear elliptic eigenvalue problems, *Nonlinear Anal., TMA*, 1992, **10**: 957–971.

[7] Li W., Ravi P. A., Existence of solutions to nonlinear Neumann boundary value problems with generalized p-Laplacian operator, *Computers and Mathematics with Applications*, 2008, **56**: 530–541.

[8] Lu F. Y., The Nehari manifold and application to a semilinear elliptic system, *Nonlinear Anal.*, 2009, **71**: 3425–3433.