第57卷第1期 数 学 学 报 中 文 版 Vol.57, No.1
2014年1月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Jan., 2014

文章编号: 0583-1431(2014)01-0163-08 **文献标识码:** A

一类随机时滞微分方程随机 θ 方法的均方收敛率

刘 军

济宁学院数学系 曲阜 273155
E-mail: sdwslj@163.com

摘 要 给出了一类随机时滞微分方程随机 θ 方法的均方收敛率, 这类方程对于时滞项可以不满足 Lipschitz 条件而仅需要满足一定条件的 Hölder 连续.

关键词 non-Lipschitz 条件; 随机时滞微分方程; 随机 θ 方法; 收敛率
MR(2010) 主题分类 65C30, 65L20, 60H10
中图分类 O211.6

Mean-square Convergence Rate of Stochastic-Theta Methods for a Class of Stochastic Differential Delay Equations

Jun LIU

Department of Mathematics, Jining University, Qufu 273155*, P. R. China*
E-mail: *sdwslj@163.com*

Abstract We provide a mean-square convergence rate of stochastic theta methods for a class of stochastic differential delay equations whose coefficients are not Lipschitz but only Hölder continuous.

Keywords non-Lipschitz condition; stochastic differential delay equations; stochastic theta methods; convergence rate
MR(2010) Subject Classification 65C30, 65L20, 60H10
Chinese Library Classification O211.6

1 引言

众所周知, 大部分的随机微分方程无法得到精确解, 因而数值解法是必不可少的. 近年来, 对于随机微分方程数值解的稳定性和收敛性的研究吸引了许多学者的关注 [2, 4–6, 9]. Higham 等 [6] 在单边 Lipschitz 条件下研究了一类非线性随机微分方程的 EM 数值解的强收敛性质; Gyöngy

收稿日期: 2012-01-09; 接受日期: 2013-04-16
基金项目: 山东省优秀中青年科学家科研奖励基金 (BS2010DX004); 济宁学院青年科研基金 (2012QNKJ09)

和 Rasonyi [4] 给出了一类一维随机微分方程欧拉数值方法的收敛率估计, 这类方程有如下形式

$$dX(t)=\{f(t,X(t))+g(t,X(t))\}dt+\sigma(t,X(t))dB(t),$$

其中 $g(t,X(t))$ 为 Hölder 连续, 单调递增的; 文 [2, 5, 9] 则给出了带跳的情形. 在求解随机刚性问题时, 经常要用到隐式方法, 随机 θ 方法 (STM) 就是很重要的一种隐式方法. 先看一个颇具启发性的随机时滞微分方程例子

$$dX(t)=[X(t)+(X(t-\tau))^{\frac{3}{4}}]dt+[X(t)+(X(t-\tau))^{\frac{2}{3}}]dB(t). \tag{1.1}$$

显然, 方程 (1.1) 的两个系数 $f=X(t)+(X(t-\tau))^{\frac{3}{4}}$ 与 $g=X(t)+(X(t-\tau))^{\frac{2}{3}}$ 不满足 Lipschitz 条件, 但是它们对于时滞项 $X(t-\tau)$ 都是 Hölder 连续的. 然而, 文 [1, 3, 7] 都是在 Lipschitz 条件下讨论 STM 的收敛性, 因而对于系数不满足此条件的随机微分方程 (例如方程 (1.1)) 来说, 这些方法便不再适用. 受上述文献的启发, 本文主要目的是在 non-Lipschitz 条件下给出一类随机时滞微分方程 STM 的收敛率.

2 预备知识

本文中, $|\cdot|$ 代表 $\mathbb{R}^n$ 中的 Euclidean 范数, $\|A\|=\sqrt{\mathrm{trace}(A^*A)}$; $(\Omega,\mathbf{F},\mathbf{P},\{\mathbf{F}_t\}_{t\geq 0})$ 是一个完备的概率空间, 滤波 $\{\mathbf{F}_t\}_{t\geq 0}$ 满足通常条件; $B(t)$ 为定义在 $(\Omega,\mathbf{F},\mathbf{P},\{\mathbf{F}_t\}_{t\geq 0})$ 上的 m 维标准布朗运动. 本文关注如下形式的随机时滞微分方程

$$dX(t)=f(X(t),X(t-\tau))dt+g(X(t),X(t-\tau))dB(t),\quad t\in[0,T], \tag{2.1}$$

具有初值 $X(\eta)=\zeta(\eta)$, $\eta\in[-\tau,0]$. 为了保证方程 (2.1) 解的存在唯一, 作如下假设:

(H1) $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, 当 $x_j,y_j\in\mathbb{R}^n$, $j=1,2$, 存在 $K_1>0$, $L_1>0$, $\gamma_1\in[\frac{1}{2},1]$, 满足

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\leq K_1|x_1-x_2|+L_1|y_1-y_2|^{\gamma_1};$$

(H2) $g:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n\times m}$, 当 $x_j,y_j\in\mathbb{R}^n$, $j=1,2$, 存在 $K_2>0$, $L_2>0$, $\gamma_2\in[\frac{1}{2},1]$, 满足

$$\|g(x_1,y_1)-g(x_2,y_2)\|\leq K_2|x_1-x_2|+L_2|y_1-y_2|^{\gamma_2}.$$

注 2.1 在条件 (H1) 和 (H2) 下, f 和 g 满足线性增长条件 (可由本文 (4.1) 和 (4.2) 得到), 因此在上述条件下, 方程 (2.1) 存在唯一的解 (见文 [8]), 记此解为 $X(t)$.

注 2.2 满足条件 (H1) 和 (H2), f 和 g 不一定满足 Lipschitz 条件. 例如方程 (1.1), 当取 $K_1=K_2=L_1=L_2=1$, $\gamma_1=\frac{3}{4}$, $\gamma_2=\frac{2}{3}$ 时, 满足条件 (H1) 和 (H2), 但 f 和 g 不满足 Lipschitz 条件.

3 随机时滞微分方程的 STM

给定步长 $\triangle>0$, 不失一般性, 设 M, N 为充分大的正整数, 使得

$$\triangle=\frac{\tau}{N}=\frac{T}{M}\in(0,1).$$

令 $Y_k=\zeta(k\triangle)$, $k=-N,-N+1,\dots,0$, 方程 (2.1) 的 STM 定义为

$$Y_{k+1}=Y_k+[(1-\theta)f(Y_k,Y_{k-N})+\theta f(Y_{k+1},Y_{k-N+1})]\triangle+g(Y_k,Y_{k-N})\triangle B_k, \tag{3.1}$$

这里 $Y_{k+1}\approx X(t_{k+1})$, $t_k=k\triangle$, $\triangle B_k=B(t_{k+1})-B(t_k)$, $k=0,1,2,\dots,M$, $\theta\in[0,1]$ 是一个固定常数. 显然, 当 $\theta=0$ 时, (3.1) 退化为一般的 Euler–Maruyama 数值方法. 我们可以这样来理

解 (3.1), 给定了 $Y_i\,(i=-N,-N+1,\dots,0,1,\dots,k)$, 来求解 Y_{k+1}, 因此要使得 (3.1) 有意义, 就要保证它的解得存在唯一性, 下面给出在条件 (H1) 下的一个充分条件.

定理 3.1 在条件 (H1) 下, 如果 $\theta\triangle K_1<1$, 则对于给定的 $Y_i, i=-N,-N+1,\dots,0,\dots,k$, 存在唯一的 Y_{k+1} 满足 (3.1).

证明 对 $u\in\mathbb{R}^n$, 定义

$$F(u)=Y_k+[(1-\theta)f(Y_k,Y_{k-N})+\theta f(u,Y_{k-N+1})]\triangle+g(Y_k,Y_{k-N})\triangle B_k.$$

显然, (3.1) 即为 $Y_{k+1}=F(Y_{k+1})$, 利用 (H1) 对 $\forall\,u,v\in\mathbb{R}^n$, 有

$$|F(u)-F(v)|=|\theta f(u,Y_{k-N+1})\triangle-\theta f(v,Y_{k-N+1})\triangle|\le\theta\triangle K_1|u-v|.$$

因此, 当 $\theta\triangle K_1<1$ 时, F 为压缩映射, 故存在唯一的不动点, 即为 Y_{k+1}.

为方便讨论, 给出 (3.1) 的连续形式如下

$$dY(t)=(1-\theta)f(\overline{Y}(t),\overline{Y}(t-\tau))dt+\theta f(\widetilde{Y}(t),\widetilde{Y}(t-\tau))dt+g(\overline{Y}(t),\overline{Y}(t-\tau))dB(t),\tag{3.2}$$

这里 $Y(\eta)=\zeta(\eta)$, $\eta\in[-\tau,0]$, $\overline{Y}(t)=Y_k$, $\widetilde{Y}(t)=Y_{k+1}$, $t\in[k\triangle,(k+1)\triangle)$.

需要说明的是, 下文中 C 代表某个常数, 它可能与 K_1, K_2, L_1, L_2, T, ζ 有关, 但与 $\triangle$ 无关, 不同地方出现的 C 可能不相同.

4 相关引理

引理 4.1 在条件 (H1) 和 (H2) 下, 对充分小的 $\triangle$, 存在 $C>0$, 使得

$$\mathbb{E}|Y_{k+1}|^2\le C(1+\mathbb{E}|Y_k|^2+\mathbb{E}|Y_{k-N}|^2+\mathbb{E}|Y_{k-N+1}|^2),\quad\forall\,k\ge0.$$

证明 由 (H1) 和 (H2), 对任意的 $x,y\in\mathbb{R}^n$, 有

$$|f(x,y)|\le C(1+|x|+|y|^{\gamma_1}),\tag{4.1}$$

$$\|g(x,y)\|\le C(1+|x|+|y|^{\gamma_2}).\tag{4.2}$$

由 (3.1) 有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|Y_{k+1}|^2=&\ \mathbb{E}|Y_k|^2+2\mathbb{E}\big(Y_k^T[(1-\theta)f(Y_k,Y_{k-N})+\theta f(Y_{k+1},Y_{k-N+1})]\triangle\big)\\&+\mathbb{E}\big|[(1-\theta)f(Y_k,Y_{k-N})+\theta f(Y_{k+1},Y_{k-N+1})]\triangle+g(Y_k,Y_{k-N})\triangle B_k\big|^2.\end{aligned}$$

结合基本不等式 $2u^Tv\le|u|^2+|v|^2$ 和 $|(1-\theta)u+\theta v|^2\le|u|^2+|v|^2$, $\forall\,u,v\in\mathbb{R}^n$ 及 (4.1), (4.2), 有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|Y_{k+1}|^2\le&\ \mathbb{E}|Y_k|^2+\triangle\mathbb{E}\big[((1-\theta)^2+\theta^2)|Y_k|^2+|f(Y_k,Y_{k-N})|^2+|f(Y_{k+1},Y_{k-N+1})|^2\big]\\&+2\mathbb{E}\big|(|f(Y_k,Y_{k-N})|^2\triangle^2+|f(Y_{k+1},Y_{k-N+1})|^2\triangle^2+|g(Y_k,Y_{k-N})|^2|\triangle B_k|^2\big)\\\le&\ C\big(1+\mathbb{E}|Y_k|^2+\mathbb{E}|Y_{k-N}|^{2\gamma_1}+\mathbb{E}|Y_{k-N+1}|^{2\gamma_1}+\mathbb{E}|Y_{k-N}|^{2\gamma_2}\big)+C\triangle\mathbb{E}|Y_{k+1}|^2\\\le&\ C\big(1+\mathbb{E}|Y_k|^2+\mathbb{E}(|Y_{k-N}|+1)^2+\mathbb{E}(|Y_{k-N+1}|+1)^2\big)+C\triangle\mathbb{E}|Y_{k+1}|^2\\\le&\ C\big(1+\mathbb{E}|Y_k|^2+\mathbb{E}|Y_{k-N}|^2+\mathbb{E}|Y_{k-N+1}|^2\big)+C\triangle\mathbb{E}|Y_{k+1}|^2.\end{aligned}$$

当 $\triangle$ 充分小时 (至少使得上式右端 $\mathbb{E}|Y_{k+1}|^2$ 的系数 $C\triangle<1$), 上式移项即得结论. 证毕.

以下, 总是假设 $\triangle$ 足够小, 使得定理 3.1 和引理 4.1 结论成立.

引理 4.2 在条件 (H1), (H2) 下, 对任意的初值 $\zeta(t)\in C^b_{\mathbf{F_0}}([-\tau,0];\mathbb{R}^n)$, 存在 $C>0$, 使得

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le t\le T}|Y(t)|^2\Big)\vee\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le t\le T}|X(t)|^2\Big)\le C. \tag{4.3}$$

证明 由 (3.2), (4.1), (4.2), 引理 4.1, 结合 Hölder 不等式以及 Burkhold–Davis–Gundy 不等式, 对任意 $t\in[0,T]$, 可得

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le t}|Y(s)|^2\Big)\\
&\le C\bigg\{\mathbb{E}|\zeta(0)|^2+\mathbb{E}\bigg(\sup_{0\le s\le t}\bigg|\int_0^s[(1-\theta)f(\overline{Y}(r),\overline{Y}(r-\tau))+\theta f(\widetilde{Y}(r),\widetilde{Y}(r-\tau))]dr\bigg|^2\bigg)\\
&\qquad+\mathbb{E}\bigg(\sup_{0\le s\le t}\bigg|\int_0^s g(\overline{Y}(r),\overline{Y}(r-\tau)\big)dB(r)\bigg|^2\bigg)\bigg\}\\
&\le C\bigg\{1+\mathbb{E}\int_0^t\{|[(1-\theta)f(\overline{Y}(s),\overline{Y}(s-\tau))+\theta f(\widetilde{Y}(s),\widetilde{Y}(s-\tau))]|^2+\|g(\overline{Y}(t),\overline{Y}(t-\tau))\|^2\}ds\bigg\}\\
&\le C\bigg\{1+\mathbb{E}\int_0^t(|f(\overline{Y}(s),\overline{Y}(s-\tau))|^2+|f(\widetilde{Y}(s),\widetilde{Y}(s-\tau))|^2+\|g(\overline{Y}(t),\overline{Y}(t-\tau))\|^2)ds\bigg\}\\
&\le C\bigg\{1+\mathbb{E}\int_0^t\sup_{0\le s\le t}|Y(s)|^2ds+\mathbb{E}\int_0^t(|\overline{Y}(s-\tau)|^{2\gamma_1}+|\widetilde{Y}(s-\tau)|^{2\gamma_1}+|\overline{Y}(s-\tau)|^{2\gamma_2})ds\bigg\}.
\end{aligned}$$

利用 Gronwall 不等式, 得到

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le t}|Y(s)|^2\Big)\le C\bigg\{1+\mathbb{E}\int_0^t(|\overline{Y}(s-\tau)|^{2\gamma_1}+|\widetilde{Y}(s-\tau)|^{2\gamma_1}+|\overline{Y}(s-\tau)|^{2\gamma_2})ds\bigg\}. \tag{4.4}$$

考虑到 $\zeta(\eta)\in C^b_{\mathbf{F_0}}([-\tau,0];\mathbb{R}^n)$, $Y(\eta)=\zeta(\eta),\ \eta\in[-\tau,0]$, 因而

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{-\tau\le s\le 0}|Y(s)|^2\Big)\le C,$$

故由 (4.4) 有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le \tau}|Y(s)|^2\Big)&\le C\bigg\{1+\mathbb{E}\int_{-\tau}^0(|\overline{Y}(s)|^{2\gamma_1}+|\widetilde{Y}(s)|^{2\gamma_1}+|\overline{Y}(s)|^{2\gamma_2})ds\bigg\}\\
&\le C\bigg\{1+\int_{-\tau}^0\Big(\mathbb{E}\sup_{-\tau\le s\le 0}|Y(s)|^2\Big)^{\gamma_1}+\Big(\mathbb{E}\sup_{-\tau\le s\le 0}|Y(s)|^2\Big)^{\gamma_2}ds\bigg\}\\
&\le C.
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le 2\tau}|Y(s)|^2\Big)&\le C\bigg\{1+\mathbb{E}\int_0^{2\tau}(|\overline{Y}(s-\tau)|^{2\gamma_1}+|\widetilde{Y}(s-\tau)|^{2\gamma_1}+|\overline{Y}(s-\tau)|^{2\gamma_2})ds\bigg\}\\
&\le C\bigg\{1+\int_0^{\tau}(\mathbb{E}|\overline{Y}(s)|^{2\gamma_1}+\mathbb{E}|\widetilde{Y}(s)|^{2\gamma_1}+\mathbb{E}|\overline{Y}(s)|^{2\gamma_2})ds\bigg\}\\
&\le C\bigg\{1+\int_0^{\tau}\Big(\mathbb{E}\sup_{0\le s\le \tau}|Y(s)|^2\Big)^{\gamma_1}+\Big(\mathbb{E}\sup_{0\le s\le \tau}|Y(s)|^2\Big)^{\gamma_2}ds\bigg\}\\
&\le C.
\end{aligned}$$

重复上面的过程, 得到

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le t\le T}|Y(t)|^2\Big)\le\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le t\le([T/\tau]+1)\tau}|Y(t)|^2\Big)\le C.$$

类似地可证明

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le t\le T}|X(t)|^2\Big)\le C.$$

引理 4.3 在条件 (H1) 和 (H2) 下, 对任意的初值 $\zeta(t)\in C^b_{\mathbf{F_0}}([-\tau,0];\mathbb{R}^n)$, 存在 $C>0$, 对任意的 $t\in[0,T]$, 有

$$\mathbb{E}|Y(t)-\overline{Y}(t)|^2\vee\mathbb{E}|Y(t)-\widetilde{Y}(t)|^2\le C\triangle. \tag{4.5}$$

证明 对任意给定的 $0\le t\le T$, 设 $k=[\frac{t}{\triangle}]$, 则 $t\in[k\triangle,(k+1)\triangle)$. 由 (3.2) 知

$$\begin{aligned}Y(t)-\overline{Y}(t)&=\int_{t_k}^t(1-\theta)f(\overline{Y}(s),\overline{Y}(s-\tau))ds+\int_{t_k}^t\theta f(\widetilde{Y}(s),\widetilde{Y}(s-\tau))ds\\&\quad+\int_{t_k}^t g(\overline{Y}(s),\overline{Y}(s-\tau))dB(s)\\&=\int_{t_k}^t[(1-\theta)f(Y_k,Y_{k-N})+\theta f(Y_{k+1},Y_{k-N+1})]ds+\int_{t_k}^t g(Y_k,Y_{k-N})dB(s),\end{aligned}\tag{4.6}$$

从而由 Hölder 不等式及 Burkhold–Davis–Gundy 不等式, 有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|Y(t)-\overline{Y}(t)|^2&\le C\mathbb{E}\Big\{\int_{t_k}^t|(1-\theta)f(Y_k,Y_{k-N})+\theta f(Y_{k+1},Y_{k-N+1})|^2ds\\&\qquad+\int_{t_k}^t\|g(Y_k,Y_{k-N})\|^2ds\Big\}\\&\le C\mathbb{E}\Big\{\int_{t_k}^t[|f(Y_k,Y_{k-N})|^2+|f(Y_{k+1},Y_{k-N+1})|^2]ds\\&\qquad+\int_{t_k}^t\|g(Y_k,Y_{k-N})\|^2ds\Big\}.\end{aligned}\tag{4.7}$$

结合 (4.1), (4.2), 考虑到 $\gamma\in[\frac12,1]$, 利用 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|Y(t)-\overline{Y}(t)|^2&\le C\mathbb{E}\Big\{\int_{t_k}^t(1+|Y_k|+|Y_{k+1}|+|Y_{k-N}|^{\gamma_1}+|Y_{k-N+1}|^{\gamma_1}+|Y_{k-N}|^{\gamma_2})^2ds\Big\}\\&\le C\int_{t_k}^t(1+\mathbb{E}|Y_k|^2+\mathbb{E}|Y_{k+1}|^2+\mathbb{E}|Y_{k-N}|^{2\gamma_1}+\mathbb{E}|Y_{k-N+1}|^{2\gamma_1}+\mathbb{E}|Y_{k-N}|^{2\gamma_2})ds\\&\le C\int_{t_k}^t[1+\mathbb{E}|Y_k|^2+\mathbb{E}|Y_{k+1}|^2+(\mathbb{E}|Y_{k-N}|^2)^{\gamma_1}+(\mathbb{E}|Y_{k-N+1}|^2)^{\gamma_1}+(\mathbb{E}|Y_{k-N}|^2)^{\gamma_2}]ds.\end{aligned}$$

由引理 4.2 有

$$\mathbb{E}|Y(t)-\overline{Y}(t)|^2\le C\triangle.$$

类似地可证明

$$\mathbb{E}|Y(t)-\widetilde{Y}(t)|^2\le C\triangle.$$

5 主要结论及证明

定理 5.1 在条件 (H1), (H2) 下, 对任意的初值 $\zeta(t)\in C^b_{\mathbf{F_0}}([-\tau,0];\mathbb{R}^n)$, 存在 $C>0$,使得

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le T}|Y(s)-X(s)|^2\Big)\le C\triangle^{(\gamma_1\wedge\gamma_2)^{[T/\tau]+1}}. \tag{5.1}$$

证明 由 (2.1) 和 (3.2) 知, 对任意的 $0 \le t \le T$, 有

$$\begin{aligned}Y(t)-X(t)=&\int_0^t (1-\theta)[f(\overline{Y}(t),\overline{Y}(t-\tau))-f(X(t),X(t-\tau))]\\&+\theta[f(\widetilde{Y}(t),\widetilde{Y}(t-\tau))-f(X(t),X(t-\tau))]ds\\&+\int_0^t [g(\overline{Y}(t),\overline{Y}(t-\tau))-g(X(t),X(t-\tau))]dB(s).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le t}|Y(s)-X(s)|^2\Big)\le C\Big[&\mathbb{E}\int_0^t |f(\overline{Y}(s),\overline{Y}(s-\tau))-f(X(s),X(s-\tau))|^2\\&+|f(\widetilde{Y}(s),\widetilde{Y}(s-\tau))-f(X(s),X(s-\tau))|^2ds\\&+\mathbb{E}\int_0^t \|g(\overline{Y}(s),\overline{Y}(s-\tau))-g(X(s),X(s-\tau))\|^2ds\Big].\end{aligned}$$

结合条件 (H1) 和 (H2), 有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le t}|Y(s)-X(s)|^2\Big)\le C\Big\{&\mathbb{E}\int_0^t \big[|\overline{Y}(s)-X(s)|^2+|\widetilde{Y}(s)-X(s)|^2+|\overline{Y}(s-\tau)\\&-X(s-\tau)|^{2\gamma_1}|\overline{Y}(s-\tau)-X(s-\tau)|^{2\gamma_2}\\&+|\widetilde{Y}(s-\tau)-X(s-\tau)|^{2\gamma_1}\big]ds\Big\}.\end{aligned}\tag{5.2}$$

由引理 4.3, 得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int_0^t |\overline{Y}(s)-X(s)|^2ds&\le C\mathbb{E}\int_0^t(|\overline{Y}(s)-Y(s)|^2+|Y(s)-X(s)|^2)ds\\&\le C\Big(\triangle+\int_0^t \mathbb{E}|Y(s)-X(s)|^2ds\Big).\end{aligned}\tag{5.3}$$

类似的有

$$\mathbb{E}\int_0^t |\widetilde{Y}(s)-X(s)|^2ds\le C\Big(\triangle+\int_0^t \mathbb{E}|Y(s)-X(s)|^2ds\Big).\tag{5.4}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int_0^t |\overline{Y}(s-\tau)-X(s-\tau)|^{2\gamma_1}ds&\le C\mathbb{E}\int_0^t(|\overline{Y}(s-\tau)-Y(s-\tau)|^{2\gamma_1}\\&\qquad+|Y(s-\tau)-X(s-\tau)|^{2\gamma_1})ds\\&\le C\Big(\triangle^{\gamma_1}+\int_0^t \mathbb{E}|Y(s-\tau)-X(s-\tau)|^{2\gamma_1}ds\Big).\end{aligned}\tag{5.5}$$

同理有

$$\mathbb{E}\int_0^t |\widetilde{Y}(s-\tau)-X(s-\tau)|^{2\gamma_1}ds\le C\Big(\triangle^{\gamma_1}+\int_0^t \mathbb{E}|Y(s-\tau)-X(s-\tau)|^{2\gamma_1}ds\Big),\tag{5.6}$$

及

$$\mathbb{E}\int_0^t |\overline{Y}(s-\tau)-X(s-\tau)|^{2\gamma_2}ds\le C\Big(\triangle^{\gamma_2}+\int_0^t \mathbb{E}|Y(s-\tau)-X(s-\tau)|^{2\gamma_2}ds\Big).\tag{5.7}$$

将 (5.3)–(5.7) 代入到 (5.2), 考虑到 $0<\triangle<1$, 有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le t}|Y(s)-X(s)|^2\Big)\\
&\le C\Big[\triangle+\triangle^{\gamma_1}+\triangle^{\gamma_2}+\int_0^t\mathbb{E}|Y(s)-X(s)|^2ds\\
&\quad+\int_0^t\mathbb{E}|Y(s-\tau)-X(s-\tau)|^{2\gamma_1}ds+\int_0^t\mathbb{E}|Y(s-\tau)-X(s-\tau)|^{2\gamma_2}ds\Big]\\
&\le C\Big[\triangle^{\gamma_1\wedge\gamma_2}+\int_0^t\mathbb{E}|Y(s)-X(s)|^2ds\\
&\quad+\int_0^t\mathbb{E}|Y(s-\tau)-X(s-\tau)|^{2\gamma_1}ds+\int_0^t\mathbb{E}|Y(s-\tau)-X(s-\tau)|^{2\gamma_2}ds\Big].
\end{aligned}\tag{5.8}$$

上式结合 Gronwall 不等式, 有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le t}|Y(s)-X(s)|^2\Big)\le C\Big(&\triangle^{\gamma_1\wedge\gamma_2}+\int_0^t\mathbb{E}|Y(s-\tau)-X(s-\tau)|^{2\gamma_1}ds\\
&+\int_0^t\mathbb{E}|Y(s-\tau)-X(s-\tau)|^{2\gamma_2}ds\Big).
\end{aligned}\tag{5.9}$$

由于 $Y(\eta)=X(\eta)=\zeta(\eta)$, $\eta\in[-\tau,0]$, 故

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le \tau}|Y(s)-X(s)|^2\Big)&\le C\Big(\triangle^{\gamma_1\wedge\gamma_2}+\int_0^\tau\mathbb{E}|Y(s-\tau)-X(s-\tau)|^{2\gamma_1}ds\\
&\qquad+\int_0^\tau\mathbb{E}|Y(s-\tau)-X(s-\tau)|^{2\gamma_2}ds\Big)\\
&\le C\Big(\triangle^{\gamma_1\wedge\gamma_2}+\int_{-\tau}^0\mathbb{E}|Y(s)-X(s)|^{2\gamma_1}ds\\
&\qquad+\int_{-\tau}^0\mathbb{E}|Y(s)-X(s)|^{2\gamma_2}ds\Big)\\
&=C\triangle^{\gamma_1\wedge\gamma_2}.
\end{aligned}\tag{5.10}$$

因此, 由 (5.9) 及 (5.10) 有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le 2\tau}|Y(s)-X(s)|^2\Big)&\le C\Big[\triangle^{\gamma_1\wedge\gamma_2}+\int_0^{2\tau}\mathbb{E}|Y(s-\tau)-X(s-\tau)|^{2\gamma_1}ds\\
&\qquad+\int_0^{2\tau}\mathbb{E}|Y(s-\tau)-X(s-\tau)|^{2\gamma_2}ds\Big]\\
&\le C\Big(\triangle^{\gamma_1\wedge\gamma_2}+\int_0^\tau\mathbb{E}|Y(s)-X(s)|^{2\gamma_1}ds+\int_0^\tau\mathbb{E}|Y(s)-X(s)|^{2\gamma_2}ds\Big)\\
&\le C\Big(\triangle^{\gamma_1\wedge\gamma_2}+\int_0^\tau(\mathbb{E}|Y(s)-X(s)|^2)^{\gamma_1}ds+\int_0^\tau(\mathbb{E}|Y(s)-X(s)|^2)^{\gamma_2}ds\Big)\\
&\le C\big(\triangle^{\gamma_1\wedge\gamma_2}+\triangle^{(\gamma_1\wedge\gamma_2)\gamma_1}+\triangle^{(\gamma_1\wedge\gamma_2)\gamma_2}\big)\\
&\le C\triangle^{(\gamma_1\wedge\gamma_2)^2}.
\end{aligned}$$

重复上面的做法, 得到

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{0\le s\le T}|Y(s)-X(s)|^2\Big)\le C\triangle^{(\gamma_1\wedge\gamma_2)^{[T/\tau]+1}}.$$

注 5.2 显然在传统 Lipschitz 条件下, 条件 (H1) 和 (H2) 是满足的, 但满足条件 (H1) 和 (H2), 并不能保证 Lipschitz 条件成立. 而定理 5.1 在非常一般的条件下给出了一类随机时滞微分方程 STM 数值方法的收敛率, 此类方程的系数对于时滞项来说不需要满足 Lipschitz 条件, 仅仅需要 γ-Hölder 连续, $\frac{1}{2} \le \gamma \le 1$.

注 5.3 当 $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ 时, 此时条件 (H1) 和 (H2) 退化为 Lipschitz 条件. 由定理 5.1, 此时 STM 数值方法的收敛率为 $\frac{1}{2}$.

例 5.2 考虑具有如下形式的随机时滞微分方程

$$dX(t) = [aX(t) + b(X(t-\tau))^{\alpha_1}]dt + [cX(t) + d(X(t-\tau))^{\alpha_2}]dB(t), \tag{5.11}$$

其中 α_1, $\alpha_2 \in [\frac{1}{2}, 1]$. 显然, 系数

$$aX(t) + b(X(t-\tau))^{\alpha_1}, \quad cX(t) + d(X(t-\tau))^{\alpha_2}$$

满足条件 (H1) 和 (H2), 但是当 α_1, α_2 不全为 1 时, 不满足 Lipschitz 条件. 而形如方程 (5.11) 的这类系数不满足 Lipschitz 条件的方程均在定理 5.1 的适用范围内.

参 考 文 献

[1] Baker C. T. H., Buckwar E., Continuous θ-methods for the stochastic pantograph equation, *Electron. Trans. Numer. Anal.,* 2000, **11**(3): 131–151.

[2] Bao J., Bötcher B., Mao X., Yuan C., Convergence rate of numerical solutions to SFDEs with jumps, *J. Comput. Appl. Math.,* 2011, **236**(2): 119–131.

[3] Fan Z., Liu M. Z., Cao W. R., Existence and uniqueness of the solutions and convergence of semi-implicit Euler methods for stochastic pantograph equations, *J. Math. Anal. Appl.,* 2007, **325**(2): 1142–1159.

[4] Gyöngy I., Rasonyi M., A note on Euler approximations for SDEs with Hölder continuous diffusion coefficients, *Stochastic Process. Appl.,* 2001, **121**(10): 2189–2200.

[5] Higham D. J., Kloeden P. E., Numerical methods for nonlinear stochastic differential equations with jumps, *Numer. Math.,* 2005, **101**(1): 101–119.

[6] Higham D. J., Mao X., Stuart A. M., Strong convergence of Euler-type methods for nonlinear stochastic differential equations, *SIAM J. Numer. Anal.,* 2002, **40**(3): 1041–1063.

[7] Higham D. J., Mao X., Yuan C., Preserving exponential mean-square stability in the simulation of hybrid stochastic differential equations, *Numer. Math.,* 2007, **108**(2): 295–325.

[8] Karatzas I., Shreve S. E., Brownian Motion and Stochastic Calculus, 2nd ed., Springer, New York, 2000, corrected 6th printing.

[9] Yuan C., Mao X., Convergence of the Euler–Maruyama method for stochastic differential equations with Markovian switching, *Mat. Comput. Simula.,* 2004, **64**(2): 223–235.