第57卷第1期 数学学报中文版 Vol.57, No.1
2014年1月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Jan., 2014

文章编号: 0583-1431(2014)01-0189-06 **文献标识码: A**

带跳跃非线性项的 p-Laplacian 问题的结点解

代国伟 马如云

西北师范大学数学与统计学院 兰州 730070
E-mail: daiguowei@uwnu.edu.cn; mary@nwnu.edu.cn

摘 要 研究了带跳跃非线性项的 p-Laplacian 方程结点解的存在性. 如果该问题的非线性项跨越其对应齐次问题的 Fučik 谱, 我们证明了该问题至少存在一个结点解.

关键词 Fučik 谱; 结点解; 跳跃非线性项
MR(2010) 主题分类 34B08, 34C10, 34C23
中图分类 O175.1

Nodal Solutions for p-Laplacian Problems with Jumping Nonlinearities

Guo Wei DAI Ru Yun MA

Department of Mathematics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, *P. R. China*
E-mail: *daiguowei@uwnu.edu.cn*; *mary@nwnu.edu.cn*

Abstract We study the existence of nodal solutions for the p-Laplacian problems with jumping nonlinearities at zero and infinity. More precisely, we show that there exists at least one nodal solution to the problems if nonlinearities crossing the Fučik spectrum.

Keywords Fučik spectrum; nodal solution; jumping nonlinearity
MR(2010) Subject Classification 34B08, 34C10, 34C23
Chinese Library Classification O175.1

1 引言

自然科学中许多有趣的分歧现象都可以用带参数的非线性微分方程来刻画. 反过来, 带参数非线性微分方程的分歧理论也可以应用到非线性科学中的具体问题. 关于这类应用可见文 [3]. 因此, 自 1960s 以来, 分歧理论的研究吸引了许多知名数学家的关注, 且获得了许多重要而深刻

收稿日期: 2012-06-08; 接受日期: 2013-04-16
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11261052, 11061030)

的结果. 设 E 是一个实 Banach 空间, 伴随着范数 $\|\cdot\|$. 考虑算子方程

$$u=\lambda Lu+H(\lambda,u),$$

其中 L 是一个线性紧算子, $H:\mathbb{R}\times E\to E$ 是紧的且 $H(\lambda,u)=o(\|u\|)$ 在 $u=0$ 处对有界的 λ 一致成立. 在文 [14] 中, Krasnosel'skii 已经证明 L 的所有奇数重本征值都是分歧点. Rabinowitz 在文 [17] 中进一步证明这样的分歧具有全局结构. Rabinowitz 的分歧理论被许多数学家推广到多参数非线性特征值问题 (见文 [1, 4, 10, 12, 13, 18]).

对带跳跃非线性项问题的研究兴趣始于 Ambrosetti 和 Prodi 的工作 [2]. 跳跃非线性问题和吊桥模型的联系可见文 [15]. Fučik 谱是 Fučik [11] 和 Dancer [7] 在研究带跳跃非线性项的半线性椭圆问题时引入的.

对二阶常微分方程, Fučik 在文 [11] 中给出了这类谱的完整描述. 随后, Drábek [9] 对一维 p-Laplacian 也给出这类谱的完整描述. 具体地, 考虑如下问题

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)'=\mu\varphi_p\left(u^+\right)-\nu\varphi_p\left(u^-\right), \quad t\in(0,\pi), \\ u(0)=u(\pi)=0, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\varphi_p(s)=|s|^{p-2}s$, $1<p<+\infty$, $u^+=\max\{u,0\}$ 而 $u^-=\max\{-u,0\}$. 设

$$\pi_p=2\int_0^{(p-1)^{1/p}}\frac{ds}{\left(1-s^p/(p-1)\right)^{1/p}}.$$

众所周知, 如果 $\mu=\nu=:\lambda$, 问题 (1.1) 有一列实简单特征值 $\lambda_k=(k\pi_p/\pi)^p$ (见文 [16]). Drábek 在文 [9] 中已经证明问题 (1.1) 有非平凡解当且仅当 $\lambda:=(\mu,\nu)\in\mathscr{E}$, 这里 $\mathscr{E}$ 称为 (1.1) 的 Fučik 谱, 它的具体定义如下

$$\mathscr{E}=\{(\mu,\nu)\in\mathbb{R}^2\,|\,\mu=\lambda_1 \text{ 或者 } \nu=\lambda_1\}\cup\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\gamma_k\right)\cup\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\gamma_k'\right)\cup\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\gamma_k''\right),$$

其中 λ_1 是 $-\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)'$ 的主特征值, 对每一个 $k\in\mathbb{N}$,

$$\gamma_k=\left\{(\mu,\nu)\in\mathbb{R}^2\left|\frac{k}{\sqrt[p]{\mu}}+\frac{k}{\sqrt[p]{\nu}}=\frac{1}{\sqrt[p]{\lambda_1}}\right.\right\},$$

$$\gamma_k'=\left\{(\mu,\nu)\in\mathbb{R}^2\left|\frac{k}{\sqrt[p]{\mu}}+\frac{k+1}{\sqrt[p]{\nu}}=\frac{1}{\sqrt[p]{\lambda_1}}\right.\right\}$$

和

$$\gamma_k''=\left\{(\mu,\nu)\in\mathbb{R}^2\left|\frac{k+1}{\sqrt[p]{\mu}}+\frac{k}{\sqrt[p]{\nu}}=\frac{1}{\sqrt[p]{\lambda_1}}\right.\right\}.$$

为方便起见, 设 $\gamma_0'':=\left\{(\mu,\nu)\in\mathbb{R}^2\,|\,\mu=\lambda_1,\,\nu\in\mathbb{R}\right\}$ 和 $\gamma_0':=\{(\mu,\nu)\in\mathbb{R}^2\,|\,\nu=\lambda_1,\,\mu\in\mathbb{R}\}$.

现在, 考虑如下问题

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)'=\mu\varphi_p\left(u^+\right)-\nu\varphi_p\left(u^-\right)+g\left(t,u,u'\right), \quad t\in(0,\pi), \\ u(0)=u(\pi)=0, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $g:(0,\pi)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个连续函数, 使得

$$\lim_{s\to0}\frac{g(t,s)}{|s|^{p-1}}=0 \text{ 对 } t\in(0,\pi) \text{ 一致成立.} \tag{1.3}$$

如果 $\mu=\nu=:\lambda$, Dai 和 Ma [5] 已对问题 (1.2) 建立了单边全局分歧定理, 从而推广了 Dancer 对线性算子方程建立的单边全局分歧定理 [8]. 众所周知 Dancer 型单边全局分歧定理是 Rabinowitz 单边全局分歧理论的修正 (见文 [5] 及其参考文献).

令 $X=W_0^{1,p}(0,\pi)$ 伴随着通常的范数 $\|u\|=\left(\int_0^\pi |u'|^p\ dt\right)^{1/p}$. 设 E 表示 Banach 空间 $C_0^1[0,\pi]$ 伴随着范数 $\|u\|_1=\max\{\|u\|_\infty,\|u'\|_\infty\}$, 其中 $\|u\|_\infty=\max_{t\in[0,\pi]}|u|$. 众所周知嵌入 $X\hookrightarrow E$ 是紧的. 用 S_k^+ 表示 E 中恰有 $k-1$ 个内部非退化零点且在 $t=0$ 附近取正值的函数集合, 又设 $S_k^-=-S_k^+$ 和 $S_k=S_k^+\cup S_k^-$. 显然 S_k^+ 和 S_k^- 是 E 中的不交开集. 最后, 用 $\mathscr{S}$ 表示问题 (1.2) 在 $\mathbb{R}^2\times X$ 中非平凡解集的闭包.

在文 [6] 中, 借助于 Fitzpatrick 等人的抽象多参数分歧定理 [10], Dambrosio 对问题 (1.2) 建立了如下的单边全局分歧结果.

定理 1.1 设 $g:[0,\pi]\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 是满足 (1.3) 的连续映射, 且设 $\lambda_0=(\mu_0,\nu_0)\in\mathscr{E}$. 此外, 定义映射 $h(x,y)=\nu_0x-\mu_0y:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 且设 $\Gamma=h^-(0)$.

如果 $(\mu_0,\nu_0)\in\gamma_k$ (对某个 $k\in\mathbb{N}$), 则存在两个从 (μ_0,ν_0) 分歧出的无界闭连曲面 $\mathscr{C}^\pm\subseteq\left(\left(\mathbb{R}^2\times S_{2k-1}^\pm\right)\cup(\mathscr{E}\times\{0\})\right)\cap\mathscr{S}$.

如果 $(\mu_0,\nu_0)\in\gamma_k'$ (对某个 $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$), 则存在从 (μ_0,ν_0) 分歧出的无界闭连曲面 $\mathscr{C}^-\subseteq\left(\left(\mathbb{R}^2\times S_{2k}^-\right)\cup(\mathscr{E}\times\{0\})\right)\cap\mathscr{S}$.

如果 $(\mu_0,\nu_0)\in\gamma_k''$ (对某个 $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$), 则存在从 (μ_0,ν_0) 分歧出的无界闭连曲面 $\mathscr{C}^+\subseteq\left(\left(\mathbb{R}^2\times S_{2k}^+\right)\cup(\mathscr{E}\times\{0\})\right)\cap\mathscr{S}$.

注 1.2 注意到 [6, 定理 2.7] 的内容并不包含 $(\mu_0,\nu_0)\in\gamma_0'\cup\gamma_0''$ 情形的信息, 但该定理的证明对这种情形也是有效的.

本文的主要目的是研究带跨越 Fučik 谱非线性项的 p-Laplacian 问题结点解的存在性. 具体地, 我们考虑如下的一维 p-Laplacian 问题

$$\begin{cases} -\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)'=f(t,u), & t\in(0,\pi),\\ u(0)=u(\pi)=0, \end{cases}\tag{1.4}$$

其中 f 是 $(0,\pi)\times\mathbb{R}$ 上的连续函数, 使得 $f(t,s)s>0$ 对任意的 $t\in(0,\pi)$ 和 $s\neq0$ 成立, 且

$$f(t,s)=\begin{cases} a_0\varphi_p\left(s^+\right)-b_0\varphi_p\left(s^-\right)+o\left(|s|^{p-1}\right), & s\to0,\\ a_\infty\varphi_p\left(s^+\right)-b_\infty\varphi_p\left(s^-\right)+o\left(|s|^{p-1}\right), & |s|\to+\infty \end{cases}$$

关于 t 一致成立, 其中 a_0, b_0, a_∞ 和 b_∞ 是正常数.

本文安排如下: 第 2 部分, 证明问题 (1.4) 结点解的存在性; 第 3 部分, 研究一类系统正解的全局分歧结构.

2 结点解的存在性

本节用定理 1.1 证明带跨越非线性项的问题 (1.4) 结点解的存在性. 主要结果是:

定理 2.1 令 $\lambda_0=(a_0,b_0)$ 和 $\lambda_\infty=(a_\infty,b_\infty)$, 则有

(1) 如果 λ_0, λ_∞ 分别位于 γ_k (对某个 $k\in\mathbb{N}$) 的两边, 则问题 (1.4) 有两个解 u_k^+ 和 u_k^-, 使得 u_k^+ 在 $(0,\pi)$ 内恰好有 $2k-1$ 个简单零点且在 0 附近是正的, u_k^- 在 $(0,\pi)$ 内也恰有 $2k-1$ 个简单零点且在 0 附近是负的.

(2) 如果 λ_0, λ_∞ 分别位于 γ_k' (对某个 $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$) 的两边, 则问题 (1.4) 有一个解 u_k^-, 使得 u_k^- 在 $(0,\pi)$ 内恰好有 $2k$ 个简单零点且在 0 附近是负的.

(3) 如果 λ_0, λ_∞ 分别位于 γ_k'' (对某个 $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$) 的两边, 则问题 (1.4) 有一个解 u_k^+, 使得 u_k^+ 在 $(0,\pi)$ 内恰好有 $2k$ 个简单零点且在 0 附近是正的.

证明 我们只证明 (1), 因为 (2) 和 (3) 的证明是类似的. 首先, 研究如下 p-Laplacian 特征值问题的全局分歧现象

$$\left\{\begin{array}{l}(\varphi_p(u'))'+\lambda f(t,u)=0,\quad t\in(0,\pi),\\ u(0)=u(\pi)=0,\end{array}\right. \tag{2.1}$$

其中 $\lambda>0$ 是一个参数, f 来自问题 (1.4). 显然, 问题 (2.1) 可等价地写为

$$\left\{\begin{array}{l}-(\varphi_p(u'))'=\lambda a_0\varphi_p(u^+)-\lambda b_0\varphi_p(u^-)+\lambda g(t,u),\quad t\in(0,\pi),\\ u(0)=u(\pi)=0\end{array}\right.$$

且

$$\lim_{|s|\to0}\frac{g(t,s)}{\varphi_p(s)}=0\ \text{ 关于 } t\in(0,\pi) \text{ 一致成立.}$$

因此, 条件 (1.3) 成立. 用定理 1.1, 可得 $(\lambda a_0,\lambda b_0)\in\gamma_k$ 是 $\mathscr{S}$ 的一个分歧点. 显然, 存在唯一的点 $(\mu_k^0,\nu_k^0)\in\gamma_k\cap\{(\mu,\nu)\,|\,\mu b_0-va_0=0\}$. 此外, 存在两个从 $\lambda_*=\mu_k^0/a_0$ 分歧出来的无界闭连曲面 $\mathscr{C}_k^\pm\subseteq\big((\mathbb{R}\times S_{2k-1}^\pm)\cup(\mu_k^0/a_0,0)\big)\cap\mathscr{S}$.

显然问题 (2.1) 的形如 $(1,u)$ 的解 u 也是问题 (1.4) 的解. 下面证明 $\mathscr{C}_k^\pm$ 跨过 $\mathbb{R}\times X$ 中的超平面 $\{1\}\times X$. 不失一般性, 我们假设 λ_0 位于 γ_k 的左边而 λ_∞ 位于 γ_k 的右边, 即

$$\frac{k}{\sqrt[p]{a_0}}+\frac{k}{\sqrt[p]{b_0}}>\frac{1}{\sqrt[p]{\lambda_1}}=\frac{k}{\sqrt[p]{\lambda_*a_0}}+\frac{k}{\sqrt[p]{\lambda_*b_0}}.$$

从而有 $\lambda_*=\mu_k^0/a_0>1$.

设 $(\mu_n,y_n)\in\mathscr{C}_k^\pm$, $y_n\not\equiv0$ 满足 $\mu_n+\|y_n\|\to+\infty$. 注意到 $\mu_n>0$ 对所有的 $n\in\mathbb{N}$, 由于 $(0,0)$ 是 (2.1) 当 $\lambda=0$ 时的唯一解, 因此 $\mathscr{C}_k^\pm\cap(\{0\}\times E)=\emptyset$.

第 1 步 我们证明存在常数 M, 使得 $\mu_n\in(0,M]$ 对充分大的 n 成立.

反设 $\lim_{n\to+\infty}\mu_n=+\infty$. 注意到

$$-(\varphi_p(y_n'))'=\mu_n\widetilde{f}(t)\varphi_p(y_n),$$

其中

$$\widetilde{f}(t)=\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{f(t,y_n(t))}{\varphi_p(y_n(t))}, & \text{如果}\ \ y_n(t)\neq0,\\ a_0\ \ \text{或}\ \ b_0, & \text{如果}\ \ y_n(t)=0.\end{array}\right.$$

符号条件暗示存在正常数 ϱ, 使得 $\widetilde{f}(t)>\varrho$ 对充分大的 n 和任意的 $t\in(0,\pi)$ 成立. 我们由文 [16, 引理 2.5] 可得, 当 n 充分大时, y_n 在 $(0,\pi)$ 内变号次数超过 $2k-1$ 次, 而这与 $y_n\in S_{2k-1}^\pm$ 矛盾.

第 2 步 证明 $\mathscr{C}_k^\pm$ 跨过 $\mathbb{R}\times X$ 中的超平面 $\{1\}\times X$.

由第 1 步可知 $\|y_n\|\to+\infty$. 设 $h\in C((0,\pi)\times\mathbb{R})$, 使得 $f(t,u)=a_\infty\varphi_p(u^+)-b_\infty\varphi_p(u^-)+h(t,u)$, 其中

$$\lim_{|u|\to+\infty}\frac{h(t,u)}{\varphi_p(u)}=0\ \text{ 在 } (0,\pi) \text{ 上一致成立.} \tag{2.2}$$

在方程

$$-\left(\varphi_p\left(y_n'\right)\right)' = \mu_n a_\infty \varphi_p\left(y_n^+\right) - \mu_n b_\infty \varphi_p\left(y_n^-\right) + \mu_n h\left(t, y_n\right)$$

的两边除以 $\|y_n\|^{p-1}$ 且设 $\overline{y}_n = y_n / \|y_n\|$. 由于 $\overline{y}_n$ 在 X 中是有界的, 我们有 $\overline{y}_n \rightharpoonup \overline{y}$ 对某个 $\overline{y} \in X$ 成立 (必要时可选子列). 由于 J 是一个同胚且 $L(\lambda)$, H 是紧的 (关于 J, $L(\lambda)$ 和 H 的定义和特性可见文 [6]), 所以 $\overline{y}_n \to \overline{y}$ 在 X 中成立, 且 $\|\overline{y}\| = 1$. 由 (2.2), 我们易得

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{h\left(t, y_n(t)\right)}{\|y_n\|^{p-1}} = 0 \ \text{ 在 } (0, \pi) \text{ 上一致成立.}$$

进一步, 可得

$$-\left(\varphi_p\left(\overline{y}'\right)\right)' = \lambda^* a_\infty \varphi_p\left(\overline{y}^+\right) - \lambda^* b_\infty \varphi_p\left(\overline{y}^-\right),$$

其中

$$\lambda^* = \lim_{n \to +\infty} \mu_n.$$

显然有 $\overline{y} \in \overline{\mathscr{C}_k^\pm} \subseteq \mathscr{C}_k^\pm$ 因为 $\mathscr{C}_k^\pm$ 在 $\mathbb{R} \times X$ 中是闭的. 因此, $(\lambda^* a_\infty, \lambda^* a_\infty) \in \gamma_k$. λ_∞ 位于 γ_k 的右边暗示

$$\frac{k}{\sqrt[p]{a_\infty}} + \frac{k}{\sqrt[p]{b_\infty}} < \frac{1}{\sqrt[p]{\lambda_1}} = \frac{k}{\sqrt[p]{\lambda^* a_\infty}} + \frac{k}{\sqrt[p]{\lambda^* b_\infty}}.$$

从而有 $\lambda^* < 1$. 因此, $\mathscr{C}_k^\pm$ 跨过 $\mathbb{R} \times X$ 中的超平面 $\{1\} \times X$.

3 系统的全局分歧

在这一部分, 给出定理 1.1 的另一个应用. 考虑如下系统

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u + f(t, u, v), \quad t \in (0, \pi), \\ -v'' = \mu v + g(t, u, v), \quad t \in (0, \pi), \\ u \geq 0, \quad v \geq 0, \\ u(0) = u(\pi) = 0, \\ v(0) = v(\pi) = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

其中

$$f(t, \xi, \eta) = o(|\xi - \eta|), \quad g(t, \xi, \eta) = o(|\xi - \eta|).$$

设 $w = u - v$. 通过简单的计算, 可知问题 (3.1) 等价于

$$\begin{cases} -w'' = \lambda w^+ - \mu w^- + F(t, w), \quad t \in (0, \pi), \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

其中

$$F(t, w) = f\left(t, w^+, w^-\right) - g\left(t, w^+, w^-\right) = o(|w|).$$

不难看出 $u = w^+, v = w^-$. 因此问题 (3.1) 有一对正解 (u, v) 当且仅当问题 (3.2) 有一个非平凡解 w. 应用定理 1.1, 我们易得如下结果.

定理 3.1 如果 $(\lambda, \mu) \in \gamma_k$ (对某个 $k \in \mathbb{N}$), 则 (3.1) 的正解集存在两个从 (λ, μ) 分歧出的无界闭连曲面 $\mathscr{C}^\pm$.

如果 $(\lambda,\mu)\in\gamma_k'$ (对某个 $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$), 则 (3.1) 的正解集存在从 (λ,μ) 分歧出的无界闭连曲面 $\mathscr{C}^-$.

如果 $(\lambda,\mu)\in\gamma_k''$ (对某个 $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$), 则 (3.1) 的正解集存在从 (λ,μ) 分歧出的无界闭连曲面 $\mathscr{C}^+$.

参 考 文 献

[1] Alexander J. C., Antman S. S., Global and local behavior of bifurcating multidimensional continua of solutions for multiparameter nonlinear eigenvalue problems, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1981, **76**: 339–354.

[2] Ambrosetti A., Prodi G., On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 1972, **93**: 231–247.

[3] Antman S. S., Nonlinear Problems of Elasticity, Applied Math. Sciences, 107, Springer-Verlag, New York, 1995.

[4] Cantrell R. S., Multiparameter bifurcation problems and topological degree, *J. Differential Equations*, 1984, **52**: 39–51.

[5] Dai G., Ma R., Unilateral global bifurcation phenomena and nodal solutions for p-Laplacian, *J. Differential Equations*, 2012, **252**: 2448–2468.

[6] Dambrosio W., Global bifurcation from the Fučik spectrum, *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, 2000, **103**: 261–281.

[7] Dancer E. N., On the Dirichlet problem for weakly nonlinear elliptic partial differential equation, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 1977, **76**: 283–300.

[8] Dancer E. N., On the structure of solutions of non-linear eigenvalue problems, *Indiana U. Math J.*, 1974, **23**: 1069–1076.

[9] Drábek P., Solvability and Bifurcations of Nonlinear Equations, in Pitman Research Notes in Mathematics, Vol. 264, Longman, Harlow, New York, 1992.

[10] Fizpztrick P. M., Massabò I., Pejsachowicz J., Global several-parameter bifurcation and continuation theorems: a unified approach via completing maps, *Math. Ann.*, 1983, **263**: 61–73.

[11] Fučik S., Boundary value problems with jumping nonlinearities, *Časopis Pěst. Mat.*, 1976, **101**(1): 69–87.

[12] Hale J. K., Bifurcation from simple eigenvalues for several paramrter families, *Nonlinear Anal.*, 1978, **2**: 491–497.

[13] Ize J., Connected sets in multiparameter bifurcation, *Nonlinear Anal.*, 1997, **30**: 3763–3774.

[14] Krasnosel'ski M. A., Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations, Macmillan, New York, 1965.

[15] Lazer A. C., Mckenna P. J., Large amplitude periodic oscillations in suspension bridges: some new connections with nonlinear analysis, *SIAM Rev.*, 1990, **32**: 537–578.

[16] Lee Y. H., Sim I., Existence results of sign-changing solutions for singular one-dimensional p-Laplacian problems, *Nonlinear Anal.*, 2008, **68**: 1195–1209.

[17] Rabinowitz P. H., Some global results for nonlinear eigenvalue problems, *J. Funct. Anal.*, 1971, **7**: 487–513.

[18] Welsh S., A vector parameter global bifurcation result, *Nonlinear Anal.*, 1995, **25**: 1425–1435.