第57卷第1期　　数 学 学 报 中 文 版　　Vol.57, No.1
2014年1月　　ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES　　Jan., 2014

文章编号: 0583-1431(2014)01-0195-04　　**文献标识码: A**

丢番图方程 $x^2 + By^{2p} = z^3$

张中峰　罗家贵

肇庆学院数学与信息科学学院 肇庆 526061
E-mail: 274330461@qq.com; luojg62@aliyun.com

摘　要　设 $p \geq 11$ 为素数, 对于某些形式的整数 B, 我们给出了方程 $x^2 + By^{2p} = z^3$ 满足 $xyz \neq 0$ 且 x, y, z 两两互素的所有整数解.

关键词　丢番图方程; 类数; 虚二次域; 模形式
MR(2010) 主题分类　11D41, 11D61
中图分类　O156

On the Diophantine Equation $x^2 + By^{2p} = z^3$

Zhong Feng ZHANG　Jia Gui LUO

School of Mathematics and Information Science, Zhaoqing University,
Zhaoqing 526061, *P. R. China*
E-mail: 274330461@qq.com; *luojg62@aliyun.com*

Abstract　In this paper, for some choices of integers B, we give all the integer solutions of equation $x^2 + By^{2p} = z^3$ with $xyz \neq 0$ and x, y, z pairwise coprime for prime $p \geq 11$.

Keywords　Diophantine equation; class number; imaginary quadratic field; modular form
MR(2010) Subject Classification　11D41, 11D61
Chinese Library Classification　O156

1　引言

在文 [2] 中, Chen 讨论了方程 $x^2 + y^{2p} = z^3$ 的解. 特别的, 他给出了判断 $p > 7$ 且为素数时该方程无解的一个准则. 利用该准则, 他验证了对所有的素数 $7 < p < 10^7$ 且 $p \neq 31$, 方程无 $xyz \neq 0$ 且 x, y, z 两两互素的整数解. 结合从经典代数数论得到的性质, Dahmen [3] 解决了 $p = 31$ 的情形.

本文有如下结果.

收稿日期: 2012-07-26; 接受日期: 2013-04-16
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11271142); 广东省自然科学基金资助项目 (S2012040007653)

定理 1.1 设 $p \geq 7$ 为素数以及 $\alpha \geq 6$, $\beta \geq 0$ 为整数. 若 $B \in \{2^\alpha, 2^2 \cdot 3^{2\beta}\}$, 则方程

$$x^2 + By^{2p} = z^3 \tag{1.1}$$

除 $(x, y, z, B) = (\pm 11, \pm 1, 5, 4)$ 外无 $xyz \neq 0$, 且 x, y, z 两两互素的整数解.

定理 1.2 设 $p \geq 11$ 为素数以及 $\alpha \geq 6$, $\beta \geq 1$, $\gamma \geq 0$ 为整数, 且它们不满足以下任一情形:
(i) $2 \mid \alpha, 2 \mid \beta, 2 \nmid \gamma$; (ii) $2 \mid \alpha, 2 \nmid \beta, 2 \mid \gamma$; (iii) $2 \nmid \alpha\beta\gamma$.

令 $B = 2^\alpha 3^\beta 31^\gamma$, 则方程

$$x^2 + By^{2p} = z^3 \tag{1.2}$$

在 $p \nmid B$ 时没有 $xyz \neq 0$, 且 x, y, z 两两互素的整数解. 在 $\gamma = 0$ 时, 结论对 $p = 7$ 同样成立.

2 几个引理及其证明

这一节给出几个引理.

引理 2.1 令 h_K 为二次域 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ 的类数, 则有如下类数表

d	h_K	d	h_K	d	h_K	d	h_K	d	h_K
1	1	2	1	6	2	62	8	93	4

表 1 类数表

证明 见文 [4].

引理 2.2 令 $d > 0$ 为一个无平方因子的整数, $d \not\equiv 3 \pmod 8$ 且 $3 \nmid h_K$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$. 若有两两互素的非零整数 a, b, c, 使得 $a^2 + db^2 = c^3$, 则存在互素的非零整数 u, v, 使得 $a = u(u^2 - 3dv^2)$, $b = v(3u^2 - dv^2)$.

证明 分解 $a^2 + db^2$. 由引理条件知 $3 \nmid h_K$ 且 $d \neq 3$, 故有整数 u, v, 使得

$$a + b\sqrt{-d} = \left(\frac{u + v\sqrt{-d}}{2}\right)^3, \quad u \equiv v \pmod 2.$$

把等式右边展开, 并比较左右两边的实部与虚部有

$$8a = u(u^2 - 3dv^2), \quad 8b = v(3u^2 - dv^2). \tag{2.1}$$

若 $2 \nmid uv$, 则由 (2.1) 可得 $0 \equiv u^2 - 3dv^2 \equiv 1 - 3d \pmod 8$, 这意味着 $d \equiv 3 \pmod 8$, 矛盾. 从而有 $2 \mid uv$, 即为引理.

引理 2.3 设 $p \geq 7$ 为素数, $\alpha \geq 2$ 为整数, 则方程

$$x^p + 2^\alpha y^p = 3z^2$$

没有 $xyz \neq 0$ 且 x, y, z 两两互素的整数解 (x, y, z), 使得 $xy \neq \pm 1$.

证明 这是文 [1, 定理 1.2] 的一个特殊情形.

引理 2.4 设 $p \geq 11$ 为素数, $\alpha \geq 6$, $\beta \geq 1$, $\gamma \geq 0$ 为整数, A, B 为互素的整数且 $AB = 2^\alpha 3^\beta 31^\gamma$, 则方程

$$Ax^p + By^p = z^2$$

在 $p \nmid AB$ 时没有 $xyz \neq 0$, 且 x, y, z 两两互素的整数解. 在 $\gamma = 0$ 时, 结论对 $p = 7$ 同样成立.

证明 由文 [1, 定理 1.5] 可得定理的第一部分. 剩下的 $p=7$, $\gamma=0$ 的情形可用该文中同样的方法得到, 因为没有权为 2, 级为 1, 2, 3, 6 的尖的新形式.

引理 2.5 设 $p\geq 7$ 为素数, $B=2^2\cdot 3^{2\beta+1}$, $\beta\geq 0$, 则方程

$$x^p+By^{2p}=z^2$$

没有 $xyz\neq 0$ 且 x,y,z 两两互素的整数解.

证明 令 $B=2^2\cdot 3^{2\beta+1}=2^2\cdot 3^{pt+r}$, $0\leq r\leq p-1$, 则 $By^{2p}=2^2\cdot 3^r(3^ty^2)^p$ 且 $3^ty^2\equiv 0 \pmod 4$, 或 $3^ty^2\equiv -3^r \pmod 4$. 事实上, 当 $2\nmid y$ 时, 有 $3^r\cdot 3^ty^2\equiv 3^r\cdot 3^t\equiv 3^r\cdot 3^{pt}\equiv 3^{2\beta+1}\equiv -1 \pmod 4$, 即 $3^ty^2\equiv -3^r \pmod 4$. 由引理 2.4 知 $2\,|\,y$ 的情形不可能发生, 故 $2\nmid y$. 利用文 [1] 同样的方法知这也不可能, 因为没有权为 2, 级为 4, 12 的尖的新形式.

3 定理的证明

定理 1.1 的证明 令 $B=m^2d$, d 无平方因子, 则 $d=1$ 或 2, $m=2^k$, $k\geq 3$ 或 $2\cdot 3^\beta$, $\beta\geq 0$. 令 (x,y,z) 为方程 (1.1) 的一个满足 $xyz\neq 0$ 且 x,y,z 两两互素的整数解, 则由引理 2.1 与 2.2, 有

$$x=u(u^2-3dv^2),\quad my^p=v(3u^2-dv^2), \tag{3.1}$$

其中 u,v 为非零且互素的整数, 且由 $2\nmid x$, $2\,|\,m$ 知 $2\nmid u$, $2\,|\,v$. 此时有

$$\gcd(v,3u^2-dv^2)=\gcd(v,3)\in\{1,3\}.$$

我们把证明分成两部分:

(1) $B=2^\alpha$, $\alpha\geq 6$.

(1.1) $3\nmid v$. 由 (3.1) 我们有

$$v=my_1^p,\quad 3u^2-dv^2=y_2^p,\quad \gcd(2my_1,y_2)=1,$$

从而

$$y_2^p+By_1^{2p}=3u^2. \tag{3.2}$$

因为 $B\pm 1=2^\alpha\pm 1\equiv \pm 1\not\equiv 3u^2 \pmod 8$, 由引理 2.3 知, 方程 (3.2) 没有使得 $y_1y_2u\neq 0$ 且 y_1,y_2,u 两两互素的整数解 (y_1,y_2,u).

(1.2) $3\,|\,v$. 由 (3.1) 有

$$v=3^{p-1}my_1^p,\quad 3u^2-dv^2=3y_2^p,\quad \gcd(6my_1,y_2)=1,$$

从而

$$y_2^p+3^{2p-3}By_1^{2p}=u^2. \tag{3.3}$$

由引理 2.4 知方程 (3.3) 没有使得 $y_1y_2u\neq 0$ 且 y_1,y_2,u 两两互素的整数解 (y_1,y_2,u).

(2) $B=2^2\cdot 3^{2\beta}$, $\beta\geq 0$.

在该情形下, 我们有 $d=1$, $m=2\cdot 3^\beta$.

(2.1) $\beta=0$.

(2.1.1) $3\nmid v$. 由 (3.1) 有 $v=2y_1^p$, $3u^2-v^2=y_2^p$, $\gcd(2y_1,y_2)=1$, 从而 $y_2^p+4y_1^{2p}=3u^2$. 由引理 2.3 可得 $y_1=\pm 1$, $y_2=-1$, $u=\pm 1$, $v=\pm 2$, 此时有 $x=\pm 11$, $y=\pm 1$, $z=5$.

(2.1.2) $3\,|\,v$. 由 (3.1) 可知 $v=2\cdot 3^{p-1}y_1^p$, $3u^2-v^2=3y_2^p$, $\gcd(6y_1,y_2)=1$, 故有方程

$$y_2^p+4\cdot 3^{2p-3}y_1^{2p}=u^2.$$

由引理 2.5 知该方程没有使得 $y_1y_2u\neq 0$ 且 y_1,y_2,u 两两互素的整数解 (y_1,y_2,u).

(2.2) $\beta\geq 1$. 此时有 $3\,|\,v$, 结合 (3.1) 有

$$v=2\cdot 3^{pt+\beta-1}y_1^p,\quad pt+\beta-1\geq 1,\quad 3u^2-v^2=3y_2^p,\quad \gcd(6y_1,y_2)=1,$$

这意味着

$$y_2^p+4\cdot 3^{2pt+2\beta-3}y_1^{2p}=u^2. \tag{3.4}$$

由引理 2.5, 方程 (3.4) 没有使得 $y_1y_2u\neq 0$, 且 y_1,y_2,u 两两互素的整数解 (y_1,y_2,u).

上面的讨论就完成了定理 1.1 的证明.

定理 1.2 的证明 令 $B=m^2d$, d 无平方因子, 则由 $v_2(B)=\alpha\geq 6$ 知 $2\,|\,m$. 在定理 1.2 的条件下, d 有 5 种可能, 即 $d=1,2,6,62,93$. 令 (x,y,z) 为方程 (1.2) 满足 $xyz\neq 0$ 且 x,y,z 两两互素的一个整数解, 由引理 2.1 与 2.2 知

$$x=u(u^2-3dv^2),\quad my^p=v(3u^2-dv^2), \tag{3.5}$$

其中 u,v 为非零且互素的整数, 且由 $2\nmid x$, $2\,|\,m$ 知 $2\nmid u$, $2\,|\,v$. 此时有

$$\gcd(v,3u^2-dv^2)=\gcd(v,3)\in\{1,3\}.$$

我们依照 β 的奇偶性将证明分成两部分.

(1) $2\nmid\beta$. 只讨论 $\beta=1$ 的情形, $\beta\geq 3$ 的情形类似. 此时有 $3\,|\,d$, $3\nmid m$. 令 $d=3d_1$, 则由 $3\nmid x$ 以及 (3.5) 知 $3\nmid u$, $3\,|\,v$ 且 $v=3^{p-1}m_1y_1^p$, $3u^2-dv^2=3m_2y_2^p$, 其中 $m=m_1m_2$, $2\,|\,m_1$, $\gcd(3m_1d_1y_1,m_2y_2)=1$, 故有

$$3^{2p-2}m_1^2d_1y_1^{2p}+m_2y_2^p=u^2. \tag{3.6}$$

又有定理条件可得 $v_2(m_1^2d_1)=\alpha\geq 6$, 从而由引理 2.4 可知方程 (3.6) 没有整数解 (y_1,y_2,u), 使得 $\gcd(y_1,y_2)=1$ 且 $y_1y_2u\neq 0$.

(2) $2\,|\,\beta$. 只讨论 $\beta=2$ 的情形, $\beta\geq 4$ 的情形类似. 现在有 $3\nmid d$, $3\,\|\,m$, 且由 $3\nmid x$ 知 $3\nmid u$. 由 (3.5) 有 $v=3^pm_1y_1^p$, $3u^2-dv^2=3m_2y_2^p$, 其中 $m=3m_1m_2$, $2\,|\,m_1$, $\gcd(3m_1dy_1,m_2y_2)=1$, 从而

$$3^{2p-1}m_1^2dy_1^{2p}+m_2y_2^p=u^2. \tag{3.7}$$

类似于 $\beta=1$ 的情形的讨论, 由引理 2.4 可知方程 (3.7) 没有整数解 (y_1,y_2,u), 使得 $\gcd(y_1,y_2)=1$ 且 $y_1y_2u\neq 0$.

由上面的讨论可知定理 1.2 成立.

参 考 文 献

[1] Bennett M., Skinner C., Ternary Diophantine equations via Galois representations and modular forms, *Canad. J. Math.*, 2004, **56**(1): 23–54.

[2] Chen I., On the equation $s^2+y^{2p}=\alpha^3$, *Math. Comp.*, 2008, **77**(262): 1223–1227.

[3] Dahmen S., Classical and modular methods applied to Diophantine equations, Ph.D Thesis, Utrecht University, Utrecht, 2008.

[4] Hua L. K., Introduction to Number Theory (Translated from the Chinese by Peter Shiu), Springer-Verlag, Berlin, New York, 1982.