第57卷第1期 数学学报中文版 Vol.57, No.1
2014年1月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Jan., 2014

文章编号: 0583-1431(2014)01-0199-10 **文献标识码: A**

光滑 Weyl 和的分数幂均值的数值上界

王天芹

华北水利水电学院信息工程系 郑州 450011
E-mail: wangtq@amss.ac.cn

刘华珂

华北水利水电学院数学系 郑州 450011
E-mail: wtz@ncwu.edu.cn

摘　要　通过讨论光滑 Weyl 和的任意幂次均值的数值上界之间的关系, 本文给出了幂次为区间 [4, 5] 中的值时相应均值的数值上界的一些新结果.

关键词　允许指数; 光滑 Weyl 和; 均值; 数值上界
MR(2010) 主题分类　11P05, 11P55
中图分类　O156.4

Numerical Upper Bounds for the Mean Values of Smooth Weyl Sums of Fractional Moments

Tian Qin WANG

Department of Information Engineering,
North China University of Water Resources and Electric Power,
Zhengzhou 450011*, P. R. China*
E-mail: *wangtq@amss.ac.cn*

Hua Ke LIU

Department of Mathematics and Information Science,
North China University of Water Resources and Electric Power,
Zhengzhou 450011*, P. R. China*
E-mail: *wtz@ncwu.edu.cn*

Abstract　We discuss some relationship of the numerical upper bounds for the mean values of smooth Weyl sums of fractional moments. Some new results on the numerical upper bounds of the mean values are given when the moments are in the interval [4, 5].

收稿日期: 2012-11-28; 接受日期: 2013-04-16
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11071070);
河南省基础与前沿技术研究计划项目 (122300410030) 及省创新型科技人才队伍建设工程资助项目

Keywords permissible exponent; smooth Weyl sum; mean value; numerical upper bound
MR(2010) Subject Classification 11P05, 11P55
Chinese Library Classification O156.4

1 引言及记号

对任意实数 y, 令 $e(y)$ 表示复数 $\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} y}$. 熟知, 对给定的整数 $k \geq 3$, 经典 Weyl 和是指形如

$$f(\alpha; P) = \sum_{x \leq P} e(\alpha x^k)$$

的指数和, 其中 α 和 P 是实数, $0 \leq \alpha < 1$, $\sum_{x \leq P}$ 表示对所有正整数 $x \leq P$ 求和. 对经典 Weyl 和的研究和估计, 是数论中一个重要问题, 具有较为系统丰富的研究结果, 在很多数论问题研究中具有核心作用. 一个最具代表性的应用例子就是关于熟知的 Waring 问题. 以 Hardy, Littlewood 和 Vinogradov 等为代表的一批数学家, 创造并使用 Hardy–Littlewood 方法, 基于经典 Weyl 和的结果和研究, 开创了对 Waring 问题的系统研究, 建立了一系列十分经典深刻的研究结果 [12].

上世纪 80 年代以来, Vaughan 基于已有的丰富研究积累, 在文 [10, 11, 13–15] 中进一步推进了 Waring 问题新的系列研究, 取得了一系列重要进展. 而光滑 Weyl 和的引入和估计在 Vaughan 的开创性研究中起到了实质性的重要作用. 设 R 表示不超过 P 的正实数, 我们用 $\mathcal{A}(P, R)$ 表示不超过 P 并且没有大于 R 的素因子的所有正整数的集合, 即

$$\mathcal{A}(P, R) = \{n \in [1, P] \cap \mathbb{Z} : q \,|\, n \text{ 且 } q \text{ 是素数蕴含 } q \leq R\}, \tag{1.1}$$

称为最大值为 P 的 R- 光滑数的集合. 用此记号, 光滑 Weyl 和 $f(\alpha) = f(\alpha; P, R)$ 定义为指数和

$$f(\alpha) = f(\alpha; P, R) = \sum_{x \in \mathcal{A}(P,R)} e(\alpha x^k). \tag{1.2}$$

该指数和的 s 次幂均值 $U_s(P, R)$ 定义为

$$U_s(P, R) = \int_0^1 |f(\alpha; P, R)|^s d\alpha. \tag{1.3}$$

熟知, $|f(\alpha)|^2 = f(\alpha)f(-\alpha)$. 由此以及 $e(\alpha x)$ 的正交性知, 当 $s = 2t$ 是偶数时, (1.3) 式右端是 Diophantine 方程

$$x_1^k + \cdots + x_t^k = y_1^k + \cdots + y_t^k \tag{1.4}$$

的解的个数, 其中

$$x_i, y_i \in \mathcal{A}(P, R) \ (1 \leq i \leq t).$$

因此, 正如 Wooley 在文 [16] 中所指出的, 光滑 Weyl 和的偶数次幂均值估计与形如 (1.4) 的 Diophantine 方程的解的个数以及一些相关的解析不等式密切相关. 正是这一简明思想和观察, 结合深刻的组合分析讨论, 使得 Vaughan 对光滑 Weyl 和的偶数次幂均值能够有更好的估计, 进而引起了在 Waring 问题研究中的巨大进步.

当 s 不是偶数时, 研究均值估计问题的经典方法是应用 Hölder 不等式在偶数幂次之间进行线性插值, 从而得到经典凸性上界. 对于光滑 Weyl 和的均值估计, 可以使用类似的方法, 即如果

s 是正实数, t 是整数且满足 $2t \le s < 2t+2$, 那么

$$\begin{aligned} U_s(P,R) &= \int_0^1 |f(\alpha;P,R)|^s d\alpha \\ &\le \left(\int_0^1 |f(\alpha;P,R)|^{2t} d\alpha\right)^a \left(\int_0^1 |f(\alpha;P,R)|^{2t+2} d\alpha\right)^b \\ &= U_{2t}(P,R)^a U_{2t+2}(P,R)^b, \end{aligned} \tag{1.5}$$

这里 $a = t+1-s/2$, $b = s/2-t$.

1995 年之后, 以 Wooley 为代表的一批数论学家继承并发展 Vaughan [10] 的创新思想, 开创性地提出了一种迭代方法, 成功地应用于任意 s 次幂均值 $U_s(P,R)$ 的估计, 由此得到了优于使用 (1.5) 获得的经典凸性估计的结果. 作为应用, 自然地又一次推进了 Waring 问题研究的巨大进步, 开创了 Waring 问题当前研究的崭新局面. 之后, 该方法在本领域研究中被广泛应用 [1–9], 并在相关研究中取得了许多重要进展, 得到了一系列创造性结果.

为了展开下面的叙述, 我们首先给出允许指数这一贯穿本文的最基本概念. 对任意给定的整数 $k \ge 3$ 及实数 $s > 0$, 对应于 $U_s(P,R)$ 的允许指数 $\mu_k(s)$ 定义为仅依赖 k 和 s 且具有以下性质的最小正数:

对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta = \eta(\varepsilon,k,s)$, 使得对任意实数 $P \ge 1$ 和任意 $R \le P^\eta$, 有

$$U_s(P,R) \ll P^{\mu_k(s)+\varepsilon},$$

其中 $\ll$ 符号蕴含常数是绝对常数. 由定义易知, 对任意 $s > 0$, 允许指数 $\mu_k(s)$ 总是存在的. 我们知道, 对任意 $s > 0$, 有 $U_s(P,R) \gg P^{s/2}$. 所以, 对任意 $s > 0$ 有 $s/2 \le \mu_k(s)$. 另一方面, 由平凡估计 $U_s(P,R) \ll P^s$ 可知 $\mu_k(s) \le s$. 故有

$$s/2 \le \mu_k(s) \le s. \tag{1.6}$$

由允许指数的定义还可看到, 对光滑 Weyl 和的均值估计实际上就是对允许指数的估计. 因此, 从现在起, 我们将只讨论允许指数的估计. 同时, 为了避免繁杂的具体计算影响主要思想的表达, 也为了更加方便地进行讨论, 以下我们总限定 $k=3$, 仅讨论这种典型而又重要的情形. 类似的讨论实际上也适用于任意 $k>3$ 的情形. 二者的区别仅仅是后者的计算和讨论更加繁琐, 因此, 本文对此不再关注. 为简化记号, 在下面的讨论中, 对任意正实数 s, 令

$$\mu(s) = \mu_3(s). \tag{1.7}$$

当 $0 < s \le 4$ 时, 由文 [16, 引理 2.1] 知道, 允许指数 $\mu(s)$ 有下述准确取值

$$\mu(s) = s/2. \tag{1.8}$$

但是当 $s > 4$ 时, 一般说来, 允许指数 $\mu(s)$ 目前还没有形如 (1.8) 式的准确取值. 然而, 作为文 [16] 的主要结果之一, 我们有下述关于 $\mu(5)$ 和 $\mu(6)$ 的数值上界 (见文 [16]):

$$\mu(5) \le \mu_w(5), \quad \mu(6) \le \mu_w(6), \tag{1.9}$$

其中 $\mu_w(5) = 2.58809182\cdots$, $\mu_w(6) = 3.24956813\cdots$. 为了简化文字表述, 在下面的叙述中, 我们总是把对应于光滑 Weyl 和 $f(\alpha)$ 的 s 次幂均值 $U_s(P,R)$ 的允许指数 $\mu(s)$ 简称为幂次 s 的允许指数. 同时, 对任意的 $s \in [4,5]$, 把利用经典凸性方法 (1.5), 由 4 和 5 两点的已知界 4/2 和 $\mu_w(5)$ 而形成的幂次 s 的允许指数 $\mu(s)$ 的上界, 称为允许指数的凸性界, 记为

$$\mu_c(s); \tag{1.10}$$

把利用 Wooley 方法, 即下节引理 2.1, 由 $\mu_w(5)$ 和 $\mu_w(6)$ 而形成的允许指数 $\mu(s)$ 的上界, 称为 Wooley 界, 记为

$$\mu_w(s). \tag{1.11}$$

本文基于 Wooley [16] 的开创性工作, 通过对允许指数 $\mu(s)$ 的 Wooley 界 $\mu_w(s)$ 和经典凸性界 $\mu_c(s)$ 之间交互作用的讨论, 给出不同幂次均值估计之间的关系, 同时给出分数幂次均值估计的一些新结果. 本文的数值结果将以 (1.9) 中的两个数值上界 $\mu_w(5)=2.58809182\cdots$ 和 $\mu_w(6)=3.24956813\cdots$ 为基础. 我们将通过区间 $[4,5]$ 中 s 值的允许指数的深入讨论, 对经典凸性界 $\mu_c(s)$ 和 Wooley 界 $\mu_w(s)$ 进行明确的数值比较, 用完全定量的办法对后者优于前者的程度给出明确刻画. 主要结果是以下两个定理.

定理 1.1 我们有

$$\mu(4.5) \le 2.2769\cdots = \mu_w(4.5). \tag{1.12}$$

一般地, 对任意的 $s \in [4, 5]$, 幂次 s 的允许指数 $\mu(s)$ 的 Wooley 界 $\mu_w(s)$ 总是不超过其凸性界 $\mu_c(s)$, 即有

$$\mu_w(s) \le \mu_c(s).$$

进一步, 对任意的 $u \in [4, 4.5]$, 过点 $(u, \mu_w(u))$ 和 $(5, \mu_w(5))$ 直线的斜率不小于过点 $(4, 4/2)$ 和 $(5, \mu_w(5))$ 直线的斜率, 并且当 $u = 4.5$ 时对应直线的斜率取最大值 $0.6223\cdots$; 对任意的 $u \in [4.5,\ 5]$, 过点 $(u, \mu_w(u))$ 和 $(4, 4/2)$ 直线的斜率不大于过点 $(4, 4/2)$ 和 $(5, \mu_w(5))$ 直线的斜率, 并且当 $u = 4.5$ 时对应直线的斜率取最小值 $0.5538\cdots$.

定理 1.2 我们有

$$\mu(4.25) \le 2.1325\cdots. \tag{1.13}$$

一般地, 在定理 1.1 的记号下, 对任意的 $s \in [4,\ 4.5]$, 有

$$\mu'_w(s) \le \mu_w(s),$$

其中 $\mu'_w(s)$ 是由 $\mu(s-2) = (s-2)/2$ 和 $\mu_w(2(s-2))$ 基于 Wooley 方法而形成的允许指数 $\mu(s)$ 的上界. 此外, 对任意的 $u \in [4, 4.25]$, 过点 $(u, \mu'_w(u))$ 和 $(4.5, \mu_w(4.5))$ 直线的斜率不小于过点 $(4, 4/2)$ 和 $(4.5, \mu_w(4.5))$ 直线的斜率, 并且当 $u = 4.25$ 时对应直线的斜率取最大值 $0.5776\cdots$; 对任意的 $u \in [4.25,\ 4.5]$, 过点 $(u, \mu'_w(u))$ 和 $(4, 4/2)$ 直线的斜率不大于过点 $(4, 4/2)$ 和 $(4.5, \mu_w(4.5))$ 直线的斜率, 并且当 $u = 4.25$ 时对应直线的斜率取最小值 $0.5301\cdots$.

2 几个引理

本文的出发点和基础是文 [16, 定理 1]. 为行文方便, 我们将其表述为

引理 2.1 设 s 和 t 是实数, 满足

$$s + 2t \ge 4, \quad 0 < t \le 1. \tag{2.1}$$

再设 v 是实数, 满足

$$\frac{s}{1-t/4} \le v \le \frac{s}{1-t/2}. \tag{2.2}$$

令

$$w = 1 - s/v. \tag{2.3}$$

如果 $\lambda(s)$ 是幂次 s 的允许指数 $\mu(s)$ 的一个上界函数, 即对任意 $s > 0$ 有

$$\mu(s) \le \lambda(s),$$

则

$$\mu_w(s+2t) = \lambda(s)(1-\theta) + t + s\theta \tag{2.4}$$

是幂次 $s+2t$ 的允许指数 $\mu(s+2t)$ 的上界, 即 Wooley 界, 其中

$$\theta = \frac{(t/2-w)+(1-w)\lambda(v)-\lambda(s)}{2t+(t/2-w)+(1-w)\lambda(v)-\lambda(s)}. \tag{2.5}$$

注记 尽管从理论分析上看, 对任意的 s, Wooley [16] 的上述结果都可以给出 $\mu(s)$ 的上界, 但是, 对于某个确定的 s 的值, 怎样具体得到 $\mu(s)$ 的一个数值上界, 却是不明显的. 因而, 一般来说, 对于给定的 s, 不通过分析和比较, 很难看出由此得到的允许指数的 Wooley 界和经典凸性界之间的优劣. 然而, 将 (1.9) 中 $\mu(5)$ 和 $\mu(6)$ 的界与其最优值 $\mu(5) = 2.5$ 和 $\mu(6) = 3$ 进行比较, 可以看到两者十分接近. 这又从某种程度上表明了 Wooley [16] 方法的精确和有效性. 正是这一观察, 激发了我们对于允许指数的 Wooley 界和凸性界之间关系的定量研究.

为描述结果方便起见, 用 $\delta_{s+2t}(v)$ 表示 (2.4) 式右端的表达式, 即

$$\delta_{s+2t}(v) = \lambda(s)(1-\theta) + t + s\theta. \tag{2.6}$$

从而明显指出 (2.4) 式右端的表达式对 v 的依赖关系.

作为进一步讨论的基础, 先证明引理

引理 2.2 设 s 和 t 是实数, 满足

$$4 \le s + 2t \le 5, \quad 0 < t \le 1. \tag{2.7}$$

给定 $\lambda(s)$, 并使用 (2.6) 中的记号. 则对于任意满足 $4 \le \frac{s}{1-t/4} \le v_1 < v_2 \le \frac{s}{1-t/2} \le 5$ 的 v_1 和 v_2, 我们有

$$\delta_{s+2t}(v_2) \le \delta_{s+2t}(v_1). \tag{2.8}$$

证明 用 $\Delta(v)$ 表示 (2.5) 式右端的分子, 即

$$\Delta(v) = (t/2-w) + (1-w)\lambda(v) - \lambda(s), \tag{2.9}$$

其中 w 定义如式 (2.3). 对任意的 $v \in [4, 5]$, 取 $\lambda(v) = \mu_c(v) = 2 + (\mu_w(5)-2)(v-4)$. 由此可得

$$\lambda(v)/v = (\mu_w(5)-2) + (10-4\mu_w(5))/v. \tag{2.10}$$

对于引理中的 v_1 和 v_2, 由式 (2.9), (2.3) 及 (2.10) 可推得

$$\Delta(v_2) - \Delta(v_1) < 0,$$

即 $\Delta(v_2) < \Delta(v_1)$. 从而有

$$\theta(v_2) < \theta(v_1),$$

这里 $\theta(v)$ 是 (2.5) 式右端的表达式. 由此及式 (2.6) 和 (1.6) 中的后一个不等式可推得 (2.8). 引理证毕.

用同样的方法可以证明:

引理 2.3 设 s 和 t 是实数, 满足

$$4 \le s+2t \le 5, \quad 0 < t \le 1.$$

给定 $\lambda(s)$, 在引理 2.2 的记号下, 对于任意满足 $5 \le \frac{s}{1-t/4} \le v_1 < v_2 \le \frac{s}{1-t/2} \le 6$ 的 v_1 和 v_2, 我们有

$$\delta_{s+2t}(v_2) \le \delta_{s+2t}(v_1). \tag{2.11}$$

引理 2.2 表明: 对于给定的 s 和 t, 当 $v \in [4, 5]$ 且满足 (2.2) 式时, $\delta_{s+2t}(v)$ 关于 v 递减. 因此, 对于给定的 s 和 t, 在引理 2.2 的条件下, 为了从已知的允许指数的上界函数 $\lambda(x)$ 出发应用引理 2.1 得到 $\mu_w(s+2t)$, 只需选取参数 v 为满足 (2.2) 式的最大值

$$\tilde{v} = \frac{s}{1-t/2}. \tag{2.12}$$

类似地, 引理 2.3 表明: 对于给定的 s 和 t, 当 $v \in [5, 6]$ 且满足 (2.2) 式时, $\delta_{s+2t}(v)$ 关于 v 递减. 因此, 对于给定的 s 和 t, 在引理 2.3 的条件下, 为了从上界函数 $\lambda(x)$ 出发应用引理 2.1 得到 $\mu_w(s+2t)$, 只需选取参数 v 为满足 (2.2) 式的最大值 $\tilde{v} = \frac{s}{1-t/2}$.

在下面的叙述中, $\tilde{v}$ 表示 (2.12) 式右端的表达式, 而 v 仅表示变量.

3 区间 $[4,5]$ 中的值的允许指数上界

在上节引理的基础上, 本节讨论区间 [4, 5] 中的值的允许指数. 本节假设

$$s = 4+\sigma-2t \le 4, \tag{3.1}$$

其中 $0 \le \sigma \le 1$, $0 < t \le 1$. 由此可得

$$\sigma \le 2t. \tag{3.2}$$

下面讨论值 $u = s+2t = 4+\sigma$ 的允许指数的上界. 我们根据 $\tilde{v}$ 的不同取值分 2 种情况讨论:

(I) $4 \le \tilde{v} \le 5$;

(II) $5 \le \tilde{v} \le 6$.

情形 (I) $4 \le \tilde{v} \le 5$. 考虑在此情形下参数 σ 和 t 的取值. 由式 (3.1) 和 (2.12) 知, $\tilde{v} \le 5$ 等价于 $t \le 2(1-\sigma)$. 由此及 (3.2) 式可得

$$\sigma/2 \le t \le \min\{1,\, 2(1-\sigma)\}. \tag{3.3}$$

进而有

$$\sigma \le 4/5\,. \tag{3.4}$$

由引理 2.1 和 (1.8) 式可得, 幂次 u 的允许指数的上界

$$\zeta_1(u) = (1+\theta_1)s/2+t, \tag{3.5}$$

其中

$$\theta_1 = \frac{(2-t)\lambda(\tilde{v})-s}{4t+(2-t)\lambda(\tilde{v})-s}, \tag{3.6}$$

这里 $\lambda(\tilde{v}) = 2+(\mu_w(5)-2)(\tilde{v}-4)$. 将式 (3.6) 代入 (3.5), 再应用 (3.1) 中的等式化简知, (3.5) 式右端是仅依赖于 σ 和 t 的表达式. 借助于数学工具 Mathematica, 通过计算知, 对任意给定的

$0 \le \sigma \le 4/5$, (3.5) 式右端的表达式关于 t 递减. 由此及 (3.3) 式知, 当 $0 \le \sigma \le 1/2$ 时, 取 $t = 1$; 当 $1/2 \le \sigma \le 4/5$ 时, 取 $t = 2(1-\sigma)$. 由此可以得到参数满足 (3.3) 式的任意 $\zeta_1(u)$ 的最佳值.

情形 (II) $5 \le \tilde{v} \le 6$. 考虑在此情形下参数 σ 和 t 的取值. 由式 (3.1) 和 (2.12) 知, $\tilde{v} \ge 5$ 等价于 $t \ge 2(1-\sigma)$. 由此及 (3.2) 式可得

$$\max(\sigma/2,\, 2(1-\sigma)) \le t \le 1. \tag{3.7}$$

进而有

$$\sigma \ge 1/2\,. \tag{3.8}$$

由引理 2.1 及 (1.8) 式可得, 幂次 u 的允许指数的上界

$$\zeta_2(u) = (1+\theta_2)s/2 + t, \tag{3.9}$$

其中

$$\theta_2 = \frac{(2-t)\lambda(\tilde{v}) - s}{4t + (2-t)\lambda(\tilde{v}) - s}, \tag{3.10}$$

这里 $\lambda(\tilde{v}) = \mu_w(5) + (\mu_w(6) - \mu_w(5))(\tilde{v} - 5)$. 类似于情形 (I), 将式 (3.10) 代入 (3.9), 再应用 (3.1) 中的等式化简知, (3.9) 式右端是仅依赖于 σ 和 t 的表达式. 借助于数学工具 Mathematica, 通过计算知, 对任意给定的 $1/2 \le \sigma \le 1$, (3.9) 式右端的表达式关于 t 递减. 由此及 (3.7) 式知, 当 $1/2 \le \sigma \le 1$ 时, 取 $t = 1$. 由此可以得到参数满足 (3.7) 式的任意 $\zeta_2(u)$ 的最佳值.

进一步, 借助于数学工具 Mathematica, 通过计算知, 对任意给定的 $1/2 \le \sigma \le 4/5$, 有

$$\min_{\max(\sigma/2,\, 2(1-\sigma)) \le t \le 1} \zeta_2(u) \le \min_{\sigma/2 \le t \le \min(1,\, 2(1-\sigma))} \zeta_1(u). \tag{3.11}$$

由此及式 (3.4), (3.8) 知, 对任意的 $u \in [4, 5]$, 可以由 $s = u - 2$ 和 $v = 2s$ 出发, 取 $\lambda(s) = s/2$. 当 $4 \le u \le 4.5$ 时, 取 $\lambda(v) = \mu_c(v)$; 当 $4.5 \le u \le 5$ 时, 取 $\lambda(v) = \mu_w(5) + (\mu_w(6) - \mu_w(5))(v - 5)$. 进而应用引理 2.1 得到 $\mu_w(u)$. 进一步, 借助于数学工具 Mathematica, 通过计算知,

$$\mu_w(u) \le \mu_c(u).$$

下面考虑直线的斜率. 将过点 $(4, 4/2)$ 和 $(5, \mu_w(5))$ 直线的斜率记为 l, 即

$$l = \mu_w(5) - 2. \tag{3.12}$$

当 $4 \le u \le 4.5$ 时, 考虑过点 $(u,\, \mu_w(u))$ 和 $(5,\, \mu_w(5))$ 直线的斜率 $l_1(u)$, 即

$$l_1(u) = (\mu_w(5) - \mu_w(u))/(5 - u). \tag{3.13}$$

由情形 (I) 的讨论知

$$\max_{4 \le u \le 4.5} l_1(u) = 0.6223\cdots,$$

且当 $u = 4.5$ 时相应直线的斜率最大, 即

$$l_1(4.5) = 0.6223\cdots. \tag{3.14}$$

进一步, 有

$$\mu_w(4.5) = 2.2769\cdots. \tag{3.15}$$

此外, 由式 (3.12) 和 (3.13) 知, 对任意的 $4 \le u \le 4.5$, 有 $l_1(u) \ge l$.

当 $4.5 \le u \le 5$ 时, 考虑过点 $(4, 4/2)$ 和 $(u,\, \mu_w(u))$ 直线的斜率 $l_2(u)$, 即

$$l_2(u) = (\mu_w(u) - 2)/(u - 4). \tag{3.16}$$

由情形 (II) 的讨论知

$$\min_{4.5 \le u \le 5} l_2(u) = 0.5538\cdots,$$

且当 $u = 4.5$ 时相应直线的斜率最小, 即

$$l_2(4.5) = 0.5538\cdots\ . \tag{3.17}$$

此外, 由式 (3.12) 和 (3.16) 知, 对任意的 $4.5 \le u \le 5$, 有 $l_2(u) \le l$. 定理 1.1 证毕.

4　区间 $[4, 4.5]$ 中的值的允许指数上界的进一步讨论

本节在定理 1.1 和前述引理的基础上进一步讨论小区间中的值的允许指数上界. 假设

$$s = 4 + \sigma - 2t \le 4, \tag{4.1}$$

其中 $0 \le \sigma \le 1/2$, $0 < t \le 1$. 由此可得

$$\sigma \le \min\{1/2,\ 2t\}. \tag{4.2}$$

下面讨论值 $u = s + 2t = 4 + \sigma$ 的允许指数的上界. 我们根据 $\tilde{v}$ 的不同取值分 2 种情况讨论:

(I)　$4 \le \tilde{v} \le 4.5$;

(II)　$4.5 \le \tilde{v} \le 5$.

情形 (I)　$4 \le \tilde{v} \le 4.5$. 此时, 取 $\lambda(\tilde{v}) = \mu_w(\tilde{v})$, 即

$$\lambda(\tilde{v}) = (1 + \theta')s'/2 + 1, \tag{4.3}$$

其中

$$s' = \tilde{v} - 2, \quad \theta' = (\lambda_1(v') - s')/(4 + \lambda_1(v') - s'),$$

这里 $v' = 2s'$, $\lambda_1(v') = 2 + (\mu_w(5) - 2)(v' - 4)$.

考虑在此情形下参数 σ 和 t 的取值. 由式 (4.1) 和 (2.12) 知, $\tilde{v} \le 4.5$ 等价于 $t \le 2(1 - 2\sigma)$. 由此及 (4.2) 式可得

$$\sigma/2 \le t \le \min\{1,\, 2(1 - 2\sigma)\}. \tag{4.4}$$

进而有

$$\sigma \le 4/9\,. \tag{4.5}$$

由引理 2.1 及 (1.8) 式可得, 幂次 u 的允许指数的上界

$$\xi_1(u) = (1 + \theta_1)s/2 + t, \tag{4.6}$$

其中

$$\theta_1 = \frac{(2 - t)\lambda(\tilde{v}) - s}{4t + (2 - t)\lambda(\tilde{v}) - s}, \tag{4.7}$$

这里 $\lambda(\tilde{v})$ 的值如 (4.3) 式. 首先将式 (4.3) 代入 (4.7), 再代入 (4.6), 之后应用 (4.1) 中的等式化简知, (4.6) 式右端是仅依赖于 σ 和 t 的表达式. 借助于数学工具 Mathematica, 通过计算知, 对任意给定的 $0 \le \sigma \le 4/9$, (4.6) 式右端的表达式关于 t 递减. 由此及 (4.4) 式知, 当 $0 \le \sigma \le 1/4$

时, 取 $t=1$; 当 $1/4\le\sigma\le 4/9$ 时, 取 $t=2(1-2\sigma)$. 由此可以得到参数满足 (4.4) 和 (4.5) 式的任意 $\xi_1(u)$ 的最佳值.

情形 (II) $4.5\le\tilde{v}\le 5$. 此时, 取 $\lambda(\tilde{v})=\mu_w(\tilde{v})$, 即

$$\lambda(\tilde{v})=(1+\theta'')s''/2+1, \tag{4.8}$$

其中

$$s''=\tilde{v}-2,\quad \theta''=(\lambda_2(v'')-s'')/(4+\lambda_2(v'')-s''),$$

这里 $v''=2s''$, $\lambda_2(v'')=\mu_w(5)+(\mu_w(6)-\mu_w(5))(v''-5)$.

考虑在此情形下参数 σ 和 t 的取值. 由式 (4.1) 和 (2.12) 知, $\tilde{v}\ge 4.5$ 等价于 $t\ge 2(1-2\sigma)$; $\tilde{v}\le 5$ 等价于 $t\le 2(1-\sigma)$. 由此及 (4.2) 式可得

$$\max(\sigma/2,\,2(1-2\sigma))\le t\le\min(1,\,2(1-\sigma)). \tag{4.9}$$

进而有

$$1/4\le\sigma\le 1/2\,. \tag{4.10}$$

由引理 2.1 及 (1.8) 式可得, 幂次 u 的允许指数的上界

$$\xi_2(u)=(1+\theta_2)s/2+t, \tag{4.11}$$

其中

$$\theta_2=\frac{(2-t)\lambda(\tilde{v})-s}{4t+(2-t)\lambda(\tilde{v})-s}, \tag{4.12}$$

这里 $\lambda(\tilde{v})$ 的值如 (4.8) 式. 首先将式 (4.8) 代入 (4.12), 再代入 (4.11), 之后应用 (4.1) 中的等式化简知, (4.11) 式右端是仅依赖于 σ 和 t 的表达式. 借助于数学工具 Mathematica, 通过计算知, 对任意给定的 $1/4\le\sigma\le 1/2$, (4.11) 式右端的表达式关于 t 递减. 由此及 (4.9) 式知, 当 $1/4\le\sigma\le 1/2$ 时, 取 $t=1$. 由此可以得到参数满足 (4.9) 和 (4.10) 式的任意 $\xi_2(u)$ 的最佳值.

进一步, 借助于数学工具 Mathematica, 通过计算知, 对任意给定的 $1/4\le\sigma\le 4/9$, 有

$$\min_{\max(\sigma/2,\,2(1-2\sigma))\le t\le\min(1,\,2(1-\sigma))}\xi_2(u)\le\min_{\sigma/2\le t\le\min(1,\,2(1-2\sigma))}\xi_1(u). \tag{4.13}$$

由此及式 (4.5) 和 (4.10) 知, 为了从区间 [4, 5] 中值的允许指数的 Wooley 界出发, 进一步应用引理 2.1 求得区间 [4, 4.5] 中任意值 u 的允许指数的可能最佳上界, 可以由 $s=u-2$ 和 $v=2s$ 出发, 取 $\lambda(s)=s/2,\ \lambda(v)=\mu_w(v)$. 进而应用引理 2.1 得到 u 的允许指数的新的上界 $\mu_w'(u)$. 进一步, 借助于数学工具 Mathematica, 通过计算知,

$$\mu_w'(u)\le\mu_w(u).$$

下面考虑直线的斜率. 将过点 $(4,4/2)$ 和 $(4.5,\mu_w(4.5))$ 直线的斜率记为 l', 即

$$l'=2(\mu_w(4.5)-2). \tag{4.14}$$

当 $4\le u\le 4.25$ 时, 考虑过点 $(u,\,\mu_w'(u))$ 和 $(4.5,\,\mu_w(4.5))$ 直线的斜率 $l_1'(u)$, 即

$$l_1'(u)=(\mu_w(4.5)-\mu_w'(u))/(4.5-u), \tag{4.15}$$

其中 $\mu_w'(u)$ 取 (4.6) 式右端表达式的结果. 由情形 (I) 的讨论知

$$\max_{4\le u\le 4.25}l_1'(u)=0.5776\cdots,$$

且当 $u=4.25$ 时相应直线的斜率最大, 即

$$l_1'(4.25)=0.5776\cdots\ . \tag{4.16}$$

进一步, 有

$$\mu_w'(4.25)=2.1325\cdots\ . \tag{4.17}$$

此外, 由式 (4.14) 和 (4.15) 知, 对任意的 $4\le u\le 4.25$, 有 $l_1'(u)\ge l'$.

当 $4.25\le u\le 4.5$ 时, 考虑过点 $(4,4/2)$ 和 $(u,\,\mu_w'(u))$ 直线的斜率 $l_2'(u)$, 即

$$l_2'(u)=(\mu_w'(u)-2)/(u-4), \tag{4.18}$$

其中 $\mu_w'(u)$ 取 (4.11) 式右端表达式的结果. 由情形 (II) 的讨论知

$$\min_{4.25\le u\le 4.5} l_2'(u)=0.5301\cdots\ ,$$

且当 $u=4.25$ 时相应直线的斜率最小, 即

$$l_2'(4.25)=0.5301\cdots\ . \tag{4.19}$$

此外, 由式 (4.14) 和 (4.18) 知, 对任意的 $4.25\le u\le 4.5$, 有 $l_2'(u)\le l'$. 定理 1.2 证毕.

参 考 文 献

[1] Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., On I. M., Vinogradov's additive problem, *Mat. Zametki*, 2010, **88**(3): 325–339.

[2] Brudern J., Wooley T. D., The asymptotic formulae in Waring's problem for cubes, *J. Reine Angew. Math.*, 2010, **647**: 1–23.

[3] Brudern J., Wooley T. D., On Waring's problem: three cubes and a minicube, *J. Nagoya Math.*, 2010, **200**: 59–91.

[4] Daemen D., The asymptotic formula for localized solutions in Waring's problem and approximations to Weyl sums, *Bull. Lond. Math. Soc.*, 2010, **42**(1): 75–82.

[5] Elsholtz C., The number $\Gamma(k)$ in Waring's problem, *Acta Arith.*, 2008, **131**(1): 43–49.

[6] Kononen K., More exact solutions to Waring's problem for finite fields, *Acta Arith.*, 2010, **145**(2): 209–212.

[7] Liu J. Y., Wooley T. D., Yu G., The quadratic Waring–Goldbach problem, *J. Number Theory*, 2004, **107**(2): 298–321.

[8] Liu Y. R., Wooley T. D., Waring's problem in function fields, *J. Reine Angew. Math.*, 2010, **638**: 1–67.

[9] Preobrazhenski S. N., A new estimate in I. M. Vinogradov's mean value theorem, *Mat. Zametki*, 2011, **89**(2): 285–299.

[10] Vaughan R. C., A new iterative method in Waring's problem, *Acta Math.*, 1989, **162**: 1–71.

[11] Vaughan R. C., A new iterative method in Waring's problem, II, *J. London Math. Soc.*, 1989, **39**(2): 219–230.

[12] Vaughan R. C., The Hardy–Littlewood Method, Cambidge University Press, Cambidge, 1997.

[13] Vaughan R. C., On Waring's problem for cubes, *J. Reine Angew. Math.*, 1986, **365**: 122–170.

[14] Vaughan R. C., On Waring's problem for cubes, II, *J. London Math. Soc.*, 1989, **39**(2): 205–218.

[15] Vaughan R. C., Wooley T. D., Further improvements in Waring's problem, *Acta Math.*, 1995, **174**: 147–240.

[16] Wooley T. D., Breaking classical convexity in Waring's problem: sums of cubes and quasi-diagonal behavior, *Invent. Math.*, 1995, **122**: 421–451.