第57卷第1期 数学学报中文版 Vol.57, No.1
2014年1月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Jan., 2014

文章编号: 0583-1431(2014)01-0101-08 **文献标识码: A**

自由单演逆半群上的核 — 迹算子半群

龙 薇

广东惠州广播电视大学 惠州 516007
E-mail: longwei88@126.com

汪立民

华南师范大学 广州 510000
E-mail: wanglm@scnu.edu.cn

摘 要 对于逆半群上的同余 ρ, 在它的迹类中存在最大元 ρT 和最小元 ρt. 相应地, 在它的核类中有最大元 ρK 和最小元 ρk. 因此, 我们在 S 的同余格上得到四个算子 $\Gamma=\{T,t,K,k\}$. 本文将给出自由单演逆半群上, 由算子半群 Γ 生成的半群, 即自由单演逆半群上的核 — 迹算子半群.

关键词 自由单演逆半群; 核; 迹; 极值同余
MR(2010) 主题分类 20M18
中图分类 O152.7

Trace-Kernel Operator Semigroup of Free Monogenic Inverse Semigroup

Wei LONG

Huizhou Radio and TV University, Huizhou 516007*, P. R. China*
E-mail: *longwei*88*@126.com*

Li Min WANG

South China Normal University, Guangzhou 510000*, P. R. China*
E-mail: *wanglm@scnu.edu.cn*

Abstract For congruence ρ on an inverse semigroup, there are maximal element ρT and minimal element ρt in a trace class; by the same token, there are maximal element ρK and minimal element ρk in a kernel class. So we can find four operators $\Gamma=\{K,k,T,t\}$ on congruence lattice $C(S)$ of an inverse semigroup S. In this paper, we gained extremum congruence which is not identity relation on free monogenic inverse semigroup I_x. Then establishing relations in Γ on congruence lattice $C(S)$, we obtain trace-kernel operator semigroup Γ^+/Σ^* of I_x finally.

Keywords free monogenic inverse semigroup; kernel; trace; congruence
MR(2010) Subject Classification 20M18
Chinese Library Classification O152.7

收稿日期: 2012-09-25; 接受日期: 2013-03-22
基金项目: 国家自然科学基金项目资助 (11261018)
通讯作者: 汪立民

1 引言

设 S 为正则半群, 我们记其上的相等关系为 ε, 泛关系为 ω, 幂等元集合为 $E(S)$, 同余格为 $C(S)$. 对任意的 $\rho \in C(S)$, 核 $\ker\rho = \{a \in S \mid \exists e \in E(S), a\rho e\}$, 迹 $\mathrm{tr}\rho = \rho|_{E(S)}$. 在正则半群上研究同余的一个有效的方法是核 — 迹方法, 其基本思想是: 正则半群上的同余 ρ 由同余对 $(\ker\rho, \mathrm{tr}\rho)$ 唯一确定. 与 $C(S)$ 上的同余 ρ 有相同核的同余形成 $C(S)$ 中的一个区间 $[\rho k, \rho K]$; 同样地, 与 $C(S)$ 上的同余 ρ 有相同迹的同余也形成 $C(S)$ 中的一个区间 $[\rho t, \rho T]$. 因此, 我们得到 $C(S)$ 上的四个算子, 记做 K, k, T, t. 记集合 $\Gamma = \{K, k, T, t\}$, 记 Γ^+ 和 Γ^* 分别为由 Γ 生成的自由半群和自由幺半群.

本文的基本思想和研究方法来自文 [7]. 对 $C(S)$ 上任意同余 ρ, Γ^* 作用在 ρ 构成一个同余网, 其元素为 $\rho, \rho K, \rho k, \rho T, \rho t, \rho Tk, \ldots$, 序为包含关系. 若用 Γ 中的算子在 $C(S)$ 上生成的幺半群 $\Gamma(S)^1$ 代替 Γ^*, 我们得到一个对同余网更为精确的表示 $\rho\Gamma(S)^1$, 其中包含了同余 ρ. 最早对逆半群上的同余网的研究是 Petrich 和 Reilly 在文 [6] 中给出的. Pastijn 和 Trotter 在文 [3] 中对自由完全正则半群上的不变同余格上的 Γ 中算子进行了仔细研究. Petrich 在文 [4, 7] 中确定了 Clifford 半群和完全单半群同余格上由 Γ 中的算子生成的半群. 汪立民在文 [10, 11] 中对群的带和双单 ω- 半群做了类似的工作.

这里, 记自由单演逆半群为 I_x. 在 I_x 上, 不是相等关系的同余有四种, 其上的每种类型的同余都有明确的刻画. 这个结果对下面的讨论非常重要.

自由单演逆半群有五种等价的结构表示形式, 其中的 C_2 形式是由 Scheiblich 在文 [9] 中提出的. 自由单演逆半群上关于结构表示 C_2 上的同余是由 Eberhart 和 Selden 在文 [2] 和 Djadcenko 和 Schein 在文 [1] 中得到的.

2 准备知识

设 S 为逆半群, S 的满的自共轭的的子半群 N 称为正规的, 若 $E(S) \subseteq N$, 且对任意的 $a \in S$, 有 $a^{-1}Na \subseteq N$, 这里 a^{-1} 为 a 的逆元. $E(S)$ 上的同余 ξ 称为正规的, 若它在共轭变换下为不变的, 即对任意的 $a \in S, e, f \in E(S)$, 由 $e\xi f$ 可得 $a^{-1}ea\xi a^{-1}fa$.

设 N 是 S 上的正规子半群, ξ 是 $E(S)$ 上的正规同余, 若对任意的 $a \in S$ 和任意的 $e \in E(S)$, 满足

$$ae \in N, \quad e\xi a^{-1}a \Rightarrow a \in N,$$
$$a \in N \Rightarrow a^{-1}ea\xi a^{-1}ae,$$

则 (N, ξ) 称为 S 上的同余对. 在这种情况下, 定义关系 $\kappa(N, \xi)$:

$$a\kappa(N,\xi)b \Leftrightarrow a^{-1}a\xi b^{-1}b, \quad ab^{-1} \in N.$$

结果 2.1 (文 [5, 定理 4.4]) 设 S 为逆半群, (N, ξ) 为 S 上的同余对, 则 $\kappa(N, \xi)$ 为 S 上使得 $\ker\rho = N$, $\mathrm{tr}\rho = \xi$ 的唯一同余; 反之, S 上任意的同余 $\rho = \kappa(N, \xi)$ 能由这种方式得到.

自由单演逆半群的 C_2 形式是用双循环半群中的元素来刻画的, 双循环半群定义引自文 [8].

另 Petrich 在文 [8] 中对 I_x 的 C_2 形式中的元素及其上的同余有一些结论, 这里我们也直接引用. 下面先给出双循环半群的定义.

自然数集记为 $\mathbf{N}$, $\mathbf{N^0}$ 表示非负整数集, 幺半群 $S=\mathbf{N^0}\times\mathbf{N^0}$, 在 S 上定义乘法

$$(m,n)(p,q)=(m+p-\min(n,p),n+q-\min(n,p)),$$

则称 S 为双循环半群.

自由单演逆半群 I_x 有五种结构类型, 其中的一种定义如下

$$C_2=\{((m,n),(p,q))\in C\times C\,|\,m+p=n+q>0\},$$

其中 C 为双循环半群, 其上乘法为

$$((m,n),(p,q))((m',n'),(p',q'))=((m+m'-r,n+n'-r),(p+p'-s,q+q'-s)),$$

这里 $r=\min\{n,m'\}$, $s=\min\{q,p'\}$.

I_x 中的每个幂等元能唯一的表示成 $e_mf_n=((m,m),(n,n))$, 其中 m,n 为自然数, 且满足

$$m+n>0,\quad e_m=((m,m),(0,0)),\quad f_n=((0,0),(n,n)),$$

对 I_x 上任意的元素 $u=((m,n),(p,q))$, u 的重为 $w(u)=m+p$ (见文 [8]).

记号 2.2 (文 [8, IX2.4])　ρ 为 I_x 上的同余, 令 $l(\rho)$ 为使得 $e_n\rho e_{n+1}$ 的最小自然数 n, 若这样的自然数不存在, 则记 $l(\rho)=\infty$; 相应地, 令 $r(\rho)$ 为使得 $f_n\rho f_{n+1}$ 的最小自然数 n, 若这样的自然数不存在, 则记 $r(\rho)=\infty$.

定义 2.3 (文 [8, IX2.7])　I_x 上的同余 ρ 若满足 $\rho\,|_{[x]}$ ($[x]$ 为由 x 生成的自由半群) 有有限个类, 则称 ρ 有有限指数, 否则称 ρ 有无限指数.

I_x 上的同余 ρ 的类型有下面四种情形:

(1) (k,l), 若 $x^{k+l}\rho x^k$, 且 k,l 为使其成立的最小自然数;

(2) (k,ω), 若 $k=l(\rho)=r(\rho)<\infty$, 且 ρ 有有限指数;

(3) (k,∞^-), 若 $k=l(\rho)<\infty$, $r(\rho)=\infty$;

(4) (k,∞^+), 若 $k=r(\rho)<\infty$, $l(\rho)=\infty$.

下面就上述每种情形给出 I_x 上对应的同余.

结果 2.4 (见文 [8, IX2.10–2.12])　(1) 对任意的 $k\in\mathbf{N}$, I_x 上的关系 ρ 定义如下:

对任意的 $u=((m,n),(p,q))$, $u'=((m',n'),(p',q'))\in I_x$, $u\rho u'$ 当且仅当 $u=u'$, 或 $w(u),w(u')\geq k$ 且 $(m,n)=(m',n')$, 则 ρ 是 I_x 上类型为 (k,∞^+) 的唯一同余, 记为 $\rho_{(k,\infty^+)}$;

(2) 对任意的 $k\in\mathbf{N}$, I_x 上的关系 ρ 定义如下:

对任意的 $u=((m,n),(p,q))$, $u'=((m',n'),(p',q'))\in I_x$, $u\rho u'$ 当且仅当 $u=u'$, 或 $w(u),w(u')\geq k$ 且 $(p,q)=(p',q')$, 则 ρ 是 I_x 上类型为 (k,∞^-) 的唯一同余, 记为 $\rho_{(k,\infty^-)}$;

(3) 对任意的 $k\in\mathbf{N}$, I_x 上的关系 ρ 定义如下:

对任意的 $u=((m,n),(p,q))$, $u'=((m',n'),(p',q'))\in I_x$, $u\rho u'$ 当且仅当 $u=u'$, 或 $w(u),w(u')\geq k$ 且 $m-n=m'-n'$, 则 ρ 是 I_x 上类型为 (k,ω) 的唯一同余, 记为 $\rho_{(k,\omega)}$;

(4) 对任意的 $k,l\in\mathbf{N}$, I_x 上的关系 ρ 定义如下:

对任意的 $u=((m,n),(p,q))$, $u'=((m',n'),(p',q'))\in I_x$, $u\rho u'$ 当且仅当 $u=u'$, 或 $w(u),w(u')\geq k$ 且 $m-n\equiv m'-n'\,(\mathrm{mod}\,l)$, 则 ρ 是 I_x 上类型为 (k,l) 的唯一同余, 记为 $\rho_{(k,l)}$.

3 自由单演逆半群上核 — 迹类中的极值同余

这里给出 I_x 上核 — 迹类中的极值同余, 以利于后面的计算. 先考察同余的核与迹.

引理 3.1 在自由单演逆半群 I_x 上, 有以下结论:

(1) $\ker\rho_{(k,\infty^+)}=E(I_x)$,

$\mathrm{tr}\rho_{(k,\infty^+)}=\{(e_mf_n,e_mf_q)\in I_x\times I_x\,|\,m+n\ge k,\ m+q\ge k\}\cup\{\varepsilon|_{E(I_x)\times E(I_x)}\}$;

(2) $\ker\rho_{(k,\infty^-)}=E(I_x)$,

$\mathrm{tr}\rho_{(k,\infty^-)}=\{(e_mf_n,e_pf_n)\in I_x\times I_x\,|\,m+n\ge k,p+n\ge k\}\cup\{\varepsilon|_{E(I_x)\times E(I_x)}\}$;

(3) $\ker\rho_{(k,\omega)}=E(I_x)$,

$l\mathrm{tr}\rho_{(k,\omega)}=\{(e_mf_n,e_pf_q)\in I_x\times I_x\,|\,m+n\ge k,\ p+q\ge k\}\cup\{\varepsilon|_{E(I_x)\times E(I_x)}\}$;

(4) $\ker\rho_{(k,l)}=\{((m,n),(p,q))\in I_x\,|\,m+p\ge k,\ m\equiv n\ (\mathrm{mod}\ l)\}$,

$\mathrm{tr}\rho_{(k,l)}=\{(e_mf_n,e_pf_q)\in I_x\times I_x\,|\,m+n\ge k,\ p+q\ge k\}\cup\{\varepsilon|_{E(I_x)\times E(I_x)}\}$.

证明 (1) 对任意的 $u=((m,n),(p,q))\in\ker\rho_{(k,\infty^+)}$, 存在 $e_sf_t\in E(I_x)$, 使得 $u\rho_{(k,\infty^+)}e_sf_t$, 即 $u=e_sf_t$, 或者 $m+p\ge k$ 和 $s+t\ge k$ 且 $(m,n)=(s,s)$. 对前一种情况, 显然 $u\in E(I_x)$. 对后一种情况有 $m=n$. 又因为 $m+p=n+q$, 则得到 $p=q$, 即 $u\in E(I_x)$. 于是 $\ker\rho_{(k,\infty^+)}=E(I_x)$. 对任意的 $e_mf_n,e_pf_q\in E(I_x)$, 若 $e_mf_n\rho_{(k,\infty^+)}e_pf_q$, 则 $e_mf_n=e_pf_q$, 或者 $m+n\ge k$ 和 $p+q\ge k$ 且 $(m,m)=(p,p)$. 对前一种情况, 显然 $(e_mf_n,e_pf_q)\in\varepsilon|_{E(I_x)\times E(I_x)}$. 对后一种情况有 $m=p$. 于是 $\mathrm{tr}\rho_{(k,\infty^+)}\subseteq\{(e_mf_n,e_mf_q)\in I_x\times I_x\,|\,m+n\ge k,m+q\ge k\}\cup\{\varepsilon|_{E(I_x)\times E(I_x)}\}$. 反包含易证, 于是 $\mathrm{tr}\rho_{(k,\infty^+)}=\{(e_mf_n,e_mf_q)\in I_x\times I_x\,|\,m+n\ge k,m+q\ge k\}\cup\{\varepsilon|_{E(I_x)\times E(I_x)}\}$.

(2) 对任意的 $u=((m,n),(p,q))\in\ker\rho_{(k,\infty^-)}$, 存在 $e_sf_t\in E(I_x)$, 使得 $u\rho_{(k,\infty^-)}e_sf_t$, 即 $u=e_sf_t$, 或者 $m+p\ge k$ 和 $s+t\ge k$ 且 $(p,q)=(t,t)$. 对前一种情况, 显然 $u\in E(I_x)$. 对后一种情况有 $p=q$. 又因为 $m+p=n+q$, 则 $m=n$, 即 $u\in E(I_x)$. 于是 $\ker\rho_{(k,\infty^-)}=E(I_x)$. 对任意的 $e_mf_n,e_pf_q\in E(I_x)$, 若 $e_mf_n\rho_{(k,\infty^-)}e_pf_q$, 则 $e_mf_n=e_pf_q$, 或者 $m+n\ge k$ 和 $p+q\ge k$ 且 $(n,n)=(q,q)$. 对前一种情况, 显然 $(e_mf_n,e_pf_q)\in\varepsilon|_{E(I_x)\times E(I_x)}$. 对后一种情况有 $n=q$, 则 $\mathrm{tr}\rho_{(k,\infty^-)}\subseteq\{(e_mf_n,e_pf_n)\in I_x\times I_x\,|\,m+n\ge k,\ p+n\ge k\}\cup\{\varepsilon|_{E(I_x)\times E(I_x)}\}$. 反包含易证, 于是 $\mathrm{tr}\rho_{(k,\infty^-)}=\{(e_mf_n,e_pf_n)\in I_x\times I_x\,|\,m+n\ge k,p+n\ge k\}\cup\{\varepsilon|_{E(I_x)\times E(I_x)}\}$.

(3) 对任意的 $u=((m,n),(p,q))\in\ker\rho_{(k,\omega)}$, 存在 $e_sf_t\in E(I_x)$, 使得 $u\rho_{(k,\omega)}e_sf_t$, 即 $u=e_sf_t$, 或者 $m+p\ge k$ 和 $s+t\ge k$ 且 $m-n=s-s$. 对前一种情况, 显然 $u\in E(I_x)$. 对后一种情况有 $m=n$. 又因为 $m+p=n+q$, 得到 $p=q$, 即 $u\in E(I_x)$. 于是 $\ker\rho_{(k,\omega)}=E(I_x)$. 对任意的 $e_mf_n,e_pf_q\in E(I_x)$, 若 $e_mf_n\rho_{(k,\omega)}e_pf_q$, 则 $e_mf_n=e_pf_q$, 或者 $m+n\ge k$ 和 $p+q\ge k$ 且 $m-m=p-p$. 对前一种情况, 显然 $(e_mf_n,e_pf_q)\in\varepsilon|_{E(I_x)\times E(I_x)}$. 对后一种情况, 因为 $m-m=p-p$ 总是成立的, 则 $\mathrm{tr}\rho_{(k,\omega)}\subseteq\{(e_mf_n,e_pf_q)\in I_x\times I_x\,|\,m+n\ge k,p+q\ge k\}\cup\{\varepsilon|_{E(I_x)\times E(I_x)}\}$. 反包含易证, 于是 $\mathrm{tr}\rho_{(k,\omega)}=\{(e_mf_n,e_pf_q)\in I_x\times I_x\,|\,m+n\ge k,\ p+q\ge k\}\cup\{\varepsilon|_{E(I_x)\times E(I_x)}\}$.

(4) 对任意的 $u=((m,n),(p,q))\in\ker\rho_{(k,l)}$, 存在 $e_sf_t\in E(I_x)$, 使得 $u\rho_{(k,l)}e_sf_t$, 即 $u=e_sf_t$, 或者 $m+p\ge k$ 和 $s+t\ge k$ 且 $m-n\equiv s-s\ (\mathrm{mod}\ l)$. 对前一种情况, 显然 $u\in E(I_x)$. 对后一种情况有 $m-n=s-s\ (\mathrm{mod}\ l)$. 于是 $m\equiv n\ (\mathrm{mod}\ l)$, 则 $\ker\rho_{(k,l)}=\{((m,n),(p,q))\in I_x\,|\,m+p\ge k,m\equiv n\ (\mathrm{mod}\,l)\}$. 对任意的 $e_mf_n,e_pf_q\in E(I_x)$, 若 $e_mf_n\rho_{(k,l)}e_pf_q$, 则 $e_mf_n=e_pf_q$, 或者 $m+n\ge k$ 和 $p+q\ge k$ 且 $m-m\equiv p-p\ (\mathrm{mod}\,l)$. 对前一种情况, 显然 $(e_mf_n,e_pf_q)\in\varepsilon\,|\,E(I_x)\times E(I_x)$. 对后一种情况, 因为 $m-m\equiv p-p\ (\mathrm{mod}\ l)$ 总是成立的, 即 $\mathrm{tr}\rho_{(k,l)}\subseteq\{(e_mf_n,e_pf_q)\in I_x\times I_x\,|\,m+$

$n \geq k,\ p+q \geq k\} \cup \{\varepsilon|_{E(I_x)\times E(I_x)}\}$. 反包含易证, 于是 $\mathrm{tr}\rho_{(k,l)} = \{(e_m f_n, e_p f_q) \in I_x \times I_x \mid m+n \geq k,\ p+q \geq k\} \cup \{\varepsilon|_{E(I_x)\times E(I_x)}\}$.

以下引理给出 I_x 上同余大小包含关系的刻画.

引理 3.2 对任意的自然数 k, k', l, l' 有下列结论成立:

(1) $\rho_{(k,\infty^+)} \subseteq \rho_{(k',\infty^+)} \Leftrightarrow k \geq k'$, 对称地有 $\rho_{(k,\infty^-)} \subseteq \rho_{(k',\infty^-)} \Leftrightarrow k \geq k'$;

(2) $\rho_{(k,\omega)} \subseteq \rho_{(k',\omega)} \Leftrightarrow k \geq k'$;

(3) $\rho_{(k,l)} \subseteq \rho_{(k',l)} \Leftrightarrow k \geq k'$, $\rho_{(k,l)} \subseteq \rho_{(k,l')} \Leftrightarrow l'|l$;

(4) $\rho_{(k,\infty^+)} \subseteq \rho_{(k,\omega)}$, 对称地有 $\rho_{(k,\infty^-)} \subseteq \rho_{(k,\omega)}$;

(5) $\rho_{(k,\omega)} \subseteq \rho_{(k,l)}$.

证明 (1) $\rho_{(k,\infty^+)} \subseteq \rho_{(k',\infty^+)}$ 当且仅当 $\ker\rho_{(k,\infty^+)} \subseteq \ker\rho_{(k',\infty^+)}$ 且 $\mathrm{tr}\rho_{(k,\infty^+)} \subseteq \mathrm{tr}\rho_{(k',\infty^+)}$. 由引理 3.1(1), 知 $\ker\rho_{(k,\infty^+)} \subseteq \ker\rho_{(k',\infty^+)}$ 总是成立的; 而且 $\mathrm{tr}\rho_{(k,\infty^+)} \subseteq \mathrm{tr}\rho_{(k',\infty^+)}$ 当且仅当 $k \geq k'$, 即 $\rho_{(k,\infty^+)} \subseteq \rho_{(k',\infty^+)}$ 当且仅当 $k \geq k'$. 对 $\rho_{(k,\infty^-)}$ 的情况类似可证.

(2) $\rho_{(k,\omega)} \subseteq \rho_{(k',\omega)}$ 当且仅当 $\ker\rho_{(k,\omega)} \subseteq \ker\rho_{(k',\omega)}$ 且 $\mathrm{tr}\rho_{(k,\omega)} \subseteq \mathrm{tr}\rho_{(k',\omega)}$. 由引理 3.1(3) 知, $\ker\rho_{(k,\omega)} \subseteq \ker\rho_{(k',\omega)}$ 总是成立的; 而且 $\mathrm{tr}\rho_{(k,\omega)} \subseteq \mathrm{tr}\rho_{(k',\omega)}$ 当且仅当 $k \geq k'$, 即 $\rho_{(k,\omega)} \subseteq \rho_{(k',\omega)}$ 当且仅当 $k \geq k'$.

(3) $\rho_{(k,l)} \subseteq \rho_{(k',l)}$ 当且仅当 $\ker\rho_{(k,l)} \subseteq \ker\rho_{(k',l)}$ 且 $\mathrm{tr}\rho_{(k,l)} \subseteq \mathrm{tr}\rho_{(k',l)}$. 由引理 3.1(4) 知, $\ker\rho_{(k,l)} \subseteq \ker\rho_{(k',l)}$ 且 $\mathrm{tr}\rho_{(k,l)} \subseteq \mathrm{tr}\rho_{(k',l)}$ 当且仅当 $k \geq k'$, 即 $\rho_{(k,l)} \subseteq \rho_{(k',l)}$ 当且仅当 $k \geq k'$; $\rho_{(k,l)} \subseteq \rho_{(k,l')}$ 当且仅当 $\ker\rho_{(k,l)} \subseteq \ker\rho_{(k,l')}$ 且 $\mathrm{tr}\rho_{(k,l)} \subseteq \mathrm{tr}\rho_{(k,l')}$. 由命题 3.1(4) 知, $\mathrm{tr}\rho_{(k,l)} \subseteq \mathrm{tr}\rho_{(k,l')}$ 总是成立的; $\ker\rho_{(k,l)} \subseteq \ker\rho_{(k,l')}$ 当且仅当 $l'|l$, 即 $\rho_{(k,l)} \subseteq \rho_{(k,l')}$ 当且仅当 $l'|l$.

(4) 由引理 3.1 知 $\ker\rho_{(k,\infty^+)} = \ker\rho_{(k,\omega)}$ 且 $\mathrm{tr}\rho_{(k,\infty^+)} \subseteq \mathrm{tr}\rho_{(k,\omega)}$, 所以 $\rho_{(k,\infty^+)} \subseteq \rho_{(k,\omega)}$. 同理可证 $\rho_{(k,\infty^-)} \subseteq \rho_{(k,\omega)}$.

(5) 由引理 3.1 (3), (4) 可知 $\mathrm{tr}\rho_{(k,\omega)} = \mathrm{tr}\rho_{(k,l)}$ 且 $\ker\rho_{(k,\omega)} \subseteq \ker\rho_{(k,l)}$, 所以 $\rho_{(k,\omega)} \subseteq \rho_{(k,l)}$.

现在我们可以分情况给出 I_x 上的极值同余, 即同余被算子 T, t, K, k 作用以后的结果.

定理 3.3 在 I_x 上有下列结论:

(1) $\rho_{(k,\infty^+)}t = \rho_{(k,\infty^+)}T = \rho_{(k,\infty^+)}$, $\rho_{(k,\infty^+)}k = \varepsilon$, $\rho_{(k,\infty^+)}K = \rho_{(1,\omega)}$;

(2) $\rho_{(k,\infty^-)}t = \rho_{(k,\infty^-)}T = \rho_{(k,\infty^-)}$, $\rho_{(k,\infty^-)}k = \varepsilon$, $\rho_{(k,\infty^-)}K = \rho_{(1,\omega)}$;

(3) $\rho_{(k,\omega)}t = \rho_{(k,\omega)}$, $\rho_{(k,\omega)}T = \rho_{(k,1)}$, $\rho_{(k,\omega)}k = \varepsilon$, $\rho_{(k,\omega)}K = \rho_{(1,\omega)}$;

(4) $\rho_{(k,l)}t = \rho_{(k,\omega)}$, $\rho_{(k,l)}T = \rho_{(k,1)}$, $\rho_{(k,l)}k = \rho_{(k,l)} = \rho_{(k,l)}K$;

(5) $\varepsilon t = \varepsilon T = \varepsilon$, $\varepsilon k = \varepsilon$, $\varepsilon K = \rho_{(1,\omega)}$;

(6) $\omega t = \rho_{(1,\omega)}$, $\omega T = \omega$, $\omega k = \omega K = \omega$.

证明 由引言部分可知, ρt 为和 ρ 有相同迹的核最小同余, ρT 为和 ρ 有相同迹的核最大同余, 即 $\rho t \subseteq \rho \subseteq \rho T$; 相应地, ρk 为和 ρ 有相同核的迹最小同余, ρK 为和 ρ 有相同核的迹最大同余, 即 $\rho k \subseteq \rho \subseteq \rho K$. 两个同余相等当且仅当它们的核和迹都相等. 此为以下证明的思路.

(1) 从引理 3.1 我们可看到, I_x 上和 $\rho_{(k,\infty^+)}$ 有相同迹的同余只有 $\rho_{(k,\infty^+)}$ 本身, 所以 $\rho_{(k,\infty^+)} t = \rho_{(k,\infty^+)}T = \rho_{(k,\infty^+)}$. 因为 $\ker\rho_{(k,\infty^+)} = E(I_x)$, 所以 $\rho_{(k,\infty^+)}$ 是幂等纯同余, 则 $\rho_{(k,\infty^+)}k = \varepsilon$. 由引理 3.1, 3.2 知 I_x 上和 $\rho_{(k,\infty^+)}$ 有相同核且包含 $\rho_{(k,\infty^+)}$ 的同余只有 $\rho_{(k,\omega)}$ 和它本身, 且 $\mathrm{tr}\rho_{(k,\infty^+)} \subseteq \mathrm{tr}\rho_{(k,\omega)} \subseteq \mathrm{tr}\rho_{(1,\omega)}\{(e_m f_n, e_p f_q) \in I_x \times I_x \mid m+n \geq 1, p+q \geq 1\} \cup \{\varepsilon|_{E(I_x)\times E(I_x)}\}$, 即 $\rho_{(1,\omega)}$ 为 I_x 上和 $\rho_{(k,\infty^+)}$ 有相同核, 且包含 $\rho_{(k,\infty^+)}$ 的迹最大同余. 于是得 $\rho_{(k,\infty^+)}K = \rho_{(1,\omega)}$.

(2) 我们可以类似地证明.

(3) 由引理 3.1 知 I_x 上和 $\rho_{(k,\omega)}$ 有相同迹且包含 $\rho_{(k,\omega)}$ 的同余有 $\rho_{(k,l)}$ 和它本身, 且 $\ker\rho_{(k,\omega)}=E(I_x)\subseteq\ker\rho_{(k,l)}$, 即 $\rho_{(k,\omega)}$ 为 I_x 上和其本身有相同迹的核最小同余, 所以 $\rho_{(k,\omega)}t=\rho_{(k,\omega)}$. 由引理 3.1, 3.2 可知, 仅有 $\rho_{(k,l)}$ 为 I_x 上和 $\rho_{(k,\omega)}$ 有相同迹且真包含 $\rho_{(k,\omega)}$ 的同余, 则 $\rho_{(k,\omega)}T$ 应为 $\rho_{(k,l)}$ 中核最大同余, 又由引理 3.1 知 $\ker\rho_{(k,l)}\subseteq\ker\rho_{(k,1)}=\{((m,n),(p,q))\in I_x\,|\,m+p\geq k\}$, 即 $\rho_{(k,1)}$ 为 I_x 上和 $\rho_{(k,l)}$ 有相同迹的核最大同余, 所以 $\rho_{(k,\omega)}T=\rho_{(k,1)}$. 由引理 3.1 知 $\ker\rho_{(k,\omega)}=E(I_x)$, 即 $\rho_{(k,\omega)}$ 为幂等纯同余, 所以 $\rho_{(k,\omega)}k=\varepsilon$. 由引理 3.1, 3.2 知, I_x 上包含 $\rho_{(k,\omega)}$ 且与它有相同核的同余只有它本身, 且 $\mathrm{tr}\rho_{(k,\omega)}\subseteq\mathrm{tr}\rho_{(1,\omega)}=\{(e_mf_n,e_pf_q)\in I_x\times I_x\,|\,m+n\geq 1,p+q\geq 1\}\cup\{\varepsilon|_{E(I_x)\times E(I_x)}\}$, 即 $\rho_{(1,\omega)}$ 为 I_x 上包含 $\rho_{(k,\omega)}$ 且与它有相同核的迹最大同余, 所以 $\rho_{(k,\omega)}K=\rho_{(1,\omega)}$.

(4) 由引理 3.1 知 I_x 上与 $\rho_{(k,l)}$ 有相同迹的同余有 $\rho_{(k,\omega)}$ 和它本身, 又 $\ker\rho_{(k,\omega)}=E(I_x)\subseteq\ker\rho_{(k,l)}$, 即 $\rho_{(k,\omega)}$ 为 I_x 上和 $\rho_{(k,l)}$ 有相同迹的核最小同余, 所以 $\rho_{(k,l)}t=\rho_{(k,\omega)}$. 由引理 3.1, 3.2 可知, I_x 上包含 $\rho_{(k,l)}$ 且和它有相同迹的只有它本身, 又 $\ker\rho_{(k,l)}\subseteq\ker\rho_{(k,1)}=\{((m,n),(p,q))\in I_x\,|\,m+p\geq k\}$, 即 $\rho_{(k,1)}$ 为 I_x 上和它有相同迹的核最大同余, 所以 $\rho_{(k,l)}T=\rho_{(k,1)}$. 由引理 3.1 知 I_x 上和 $\rho_{(k,l)}$ 有相同核的同余只有它本身, 所以 $\rho_{(k,l)}k=\rho_{(k,l)}=\rho_{(k,l)}K$.

(5) 由 ε 的迹为 $E(I_x)$ 上的相等关系, 又由引理 3.1 知 I_x 上和 ε 有相同迹的同余只有它自身, 则 $\varepsilon t=\varepsilon T=\varepsilon$. $\varepsilon k=\varepsilon$ 显然. 由上面的证明知 $\varepsilon K=\rho_{(1,\omega)}$.

(6) 由引理 3.1 知

$$\ker\rho_{(1,1)}=\{((m,n),(p,q))\in I_x\,|\,m+p\geq 1,\ m\equiv n\ (\mathrm{mod}\ 1)\}=\ker\omega,$$

$$\mathrm{tr}\rho_{(1,1)}=\{(e_mf_n,e_pf_q)\in I_x\times I_x\,|\,m+n\geq 1,\ p+q\geq 1\}\cup\{\varepsilon|_{E(I_x)\times E(I_x)}\}=\mathrm{tr}\omega,$$

即 $\omega=\rho_{(1,1)}$, 则由 (4) 的结论可知 $\omega t=\rho_{(1,\omega)},\ \omega T=\omega,\ \omega k=\omega K=\omega$.

4 自由单演逆半群上的核 — 迹算子半群

S 为逆半群, 我们称由 $C(S)$ 上的算子 T,t,K,k 生成的半群为 S 的核 — 迹算子半群. 这一部分, 我们将给出 I_x 上由算子半群 Γ 生成的, 且满足 I_x 同余网上一系列关系 Σ 的半群 Γ^+/Σ^*. 给出定理之前我们需要引理.

引理 4.1 对 I_x 上的任意同余 ρ, 有 (1) $\rho tk=\varepsilon$; (2) $\rho tKT=\omega$; (3) $\rho tK=\rho(1,\omega)$.

证明 对每个等式的证明, 我们利用定理 3.3, 分别对 I_x 上四类非相等关系同余, 相等关系 ε 和泛关系 ω 分别进行验证.

(1) $\rho_{(k,\infty^+)}tk=\rho_{(k,\infty^+)}k=\varepsilon$, $\rho_{(k,\infty^-)}tk=\rho_{(k,\infty^-)}k=\varepsilon$,
$\rho_{(k,\omega)}tk=\rho_{(k,\omega)}k=\varepsilon$, $\rho_{(k,l)}tk=\rho_{(k,\omega)}k=\varepsilon$, $\varepsilon tk=\varepsilon k=\varepsilon$, $\omega tk=\rho_{(1,\omega)}k=\varepsilon$;

(2) $\rho_{(k,\infty^+)}tKT=\rho_{(k,\infty^+)}KT=\rho_{(1,\omega)}T=\omega$, $\rho_{(k,\infty^-)}tKT=\rho_{(k,\infty^-)}KT=\rho_{(1,\omega)}T=\omega$,
$\rho_{(k,\omega)}tKT=\rho_{(k,\omega)}KT=\rho_{(1,\omega)}T=\omega$, $\rho_{(k,l)}tKT=\rho_{(k,\omega)}KT=\rho_{(1,\omega)}T=\omega$,
$\varepsilon tKT=\varepsilon KT=\rho_{(1,\omega)}T=\omega$, $\omega tKT=\rho_{(1,\omega)}KT=\rho_{(1,\omega)}T=\omega$;

(3) $\rho_{(k,\infty^+)}tK=\rho_{(k,\infty^+)}K=\rho_{(1,\omega)}$, $\rho_{(k,\infty^-)}tK=\rho_{(k,\infty^-)}K=\rho_{(1,\omega)}$,
$\rho_{(k,\omega)}tK=\rho_{(k,\omega)}K=\rho_{(1,\omega)}$, $\rho_{(k,l)}tK=\rho_{(k,\omega)}K=\rho_{(1,\omega)}$,
$\varepsilon tK=\varepsilon K=\rho_{(1,\omega)}$, $\omega tK=\rho_{(1,\omega)}K=\rho_{(1,\omega)}$.

观察上面的结论, 我们能将其中的 ρ 在表达式中省略, 用下面的记号表示常值算子

$$\varepsilon = tk, \quad \omega = tKT, \quad \rho_{(1,\omega)} = tK.$$

设常值算子集为 Δ,

$$\Delta = \{\varepsilon, \omega, \rho_{(1,\omega)}\}.$$

下引理给出了 Γ 中算子在同余格 $C(S)$ 上满足的关系, 这对刻画在 $C(S)$ 上算子生成的半群是至关重要的.

引理 4.2 自由单演逆半群上, Γ 中的算子满足下列等式 Σ:

(1) $K^2 = kK = K,\ T^2 = tT = T,\ k^2 = Kk = k,\ t^2 = Tt = t.$

(2) $KTK = KTk = KT = kTKT,\ Kt = kTKt,\ kTk = kT,\ TkT = Tk.$

证明 (1) 这些结论可直接由 Γ 中算子的定义得到.

(2) 同样, 利用定理 3.3 对 I_x 上四类非相等关系的同余, 相等关系 ε, 泛关系 ω 分别计算得

$$\rho_{(k,\infty^+)}KTK = \rho_{(1,\omega)}TK = \omega K = \omega, \quad \rho_{(k,\infty^-)}KTK = \rho_{(1,\omega)}TK = \omega K = \omega,$$
$$\rho_{(k,\omega)}KTK = \rho_{(1,\omega)}TK = \omega K = \omega, \quad \rho_{(k,l)}KTK = \rho_{(k,l)}TK = \rho_{(k,1)}K = \rho_{(k,1)},$$
$$\varepsilon KTK = \rho_{(1,\omega)}TK = \omega K = \omega, \quad \omega KTK = \omega TK = \omega K = \omega,$$

故 $KTK = KT$.

$$\rho_{(k,\infty^+)}KTk = \rho_{(1,\omega)}Tk = \omega k = \omega, \quad \rho_{(k,\infty^-)}KTk = \rho_{(1,\omega)}Tk = \omega k = \omega,$$
$$\rho_{(k,\omega)}KTk = \rho_{(1,\omega)}Tk = \omega k = \omega, \quad \rho_{(k,l)}KTk = \rho_{(k,l)}Tk = \rho_{(k,1)}k = \rho_{(k,1)},$$
$$\varepsilon KTk = \rho_{(1,\omega)}Tk = \omega k = \omega, \quad \omega KTk = \omega Tk = \omega k = \omega,$$

故 $KTk = KT$.

$$\rho_{(k,\infty^+)}KT = \rho_{(1,\omega)}T = \omega = \rho_{(k,\infty^+)}kTKT = \varepsilon TKT = \varepsilon KT = \rho_{(1,\omega)}T,$$
$$\rho_{(k,\infty^-)}KT = \rho_{(1,\omega)}T = \omega = \rho_{(k,\infty^-)}kTKT = \varepsilon TKT = \varepsilon KT = \rho_{(1,\omega)}T,$$
$$\rho_{(k,\omega)}KT = \rho_{(1,\omega)}T = \omega = \rho_{(k,\omega)}kTKT = \varepsilon TKT = \varepsilon KT = \rho_{(1,\omega)}T,$$
$$\rho_{(k,l)}KT = \rho_{(k,l)}T = \rho_{(k,1)} = \rho_{(k,l)}kTKT = \rho_{(k,l)}TKT = \rho_{(k,1)}KT = \rho_{(k,1)}T,$$
$$\varepsilon KT = \rho_{(1,\omega)}T = \omega = \varepsilon kTKT = \varepsilon TKT = \varepsilon KT = \rho_{(1,\omega)}T,$$
$$\omega KT = \omega T = \omega = \omega kTKT = \omega TKT = \omega KT = \omega T,$$

故 $KT = kTKT$, 所以 $KTK = KTk = KT = kTKT$.

$$\rho_{(k,\infty^+)}Kt = \rho_{(1,\omega)}t = \rho_{(1,\omega)} = \rho_{(k,\infty^+)}kTKt = \varepsilon TKt = \varepsilon Kt = \rho_{(1,\omega)}t,$$
$$\rho_{(k,\infty^-)}Kt = \rho_{(1,\omega)}t = \rho_{(1,\omega)} = \rho_{(k,\infty^-)}kTKt = \varepsilon TKt = \varepsilon Kt = \rho_{(1,\omega)}t,$$
$$\rho_{(k,\omega)}Kt = \rho_{(1,\omega)}t = \rho_{(1,\omega)} = \rho_{(k,\omega)}kTKt = \varepsilon TKt = \varepsilon Kt = \rho_{(1,\omega)}t,$$
$$\rho_{(k,l)}Kt = \rho_{(k,l)}t = \rho_{(k,\omega)} = \rho_{(k,l)}kTKt = \rho_{(k,l)}TKt = \rho_{(k,1)}Kt = \rho_{(k,1)}t,$$
$$\varepsilon Kt = \rho_{(1,\omega)}t = \rho_{(1,\omega)} = \varepsilon kTKt = \varepsilon TKt = \varepsilon Kt = \rho_{(1,\omega)}t,$$
$$\omega Kt = \omega t = \rho_{(1,\omega)} = \omega kTKt = \omega TKt = \omega Kt = \omega t,$$

故 $Kt = kTKt$.

$$\rho_{(k,\infty^+)}kTk = \varepsilon Tk = \varepsilon k = \varepsilon, \quad \rho_{(k,\infty^-)}kTk = \varepsilon Tk = \varepsilon k = \varepsilon,$$
$$\rho_{(k,\omega)}kTk = \varepsilon Tk = \varepsilon k = \varepsilon, \quad \rho_{(k,l)}kTk = \rho_{(k,l)}Tk = \rho_{(k,1)}k = \rho_{(k,1)},$$
$$\varepsilon kTk = \varepsilon Tk = \varepsilon k = \varepsilon, \quad \omega kTk = \omega Tk = \omega k = \omega,$$

故 $kTk = kT$.

$$\rho_{(k,\infty^+)}TkT = \rho_{(k,\infty^+)}kT = \varepsilon T = \varepsilon, \quad \rho_{(k,\infty^-)}TkT = \rho_{(k,\infty^-)}kT = \varepsilon T = \varepsilon,$$
$$\rho_{(k,\omega)}TkT = \rho_{(k,1)}kT = \rho_{(k,1)}T = \rho_{(k,1)}, \quad \rho_{(k,l)}TkT = \rho_{(k,1)}kT = \rho_{(k,1)}T = \rho_{(k,1)},$$
$$\varepsilon TkT = \varepsilon kT = \varepsilon T = \varepsilon, \quad \omega TkT = \omega kT = \omega T = \omega,$$

故 $TkT = Tk$.

令 Σ 为 Γ^+ 上的二元关系, 且满足引理 4.2. 令 Σ^* 为 Γ^+ 上由 Σ 生成的同余, 则 Γ^+/Σ^* 为商半群. Γ^+/Σ^* 中的元素恰好由 Σ^* 中一系列同余类的表示, 且满足关系式 Σ. 现在我们给出这个重要的结果, 它的证明即为计算 Γ^+ 中字的过程, 并检验其在特殊同余 Δ 中的元素上的作用在下面的定理中我们只给出简要的证明.

定理 4.3 设 I_x 为自由单演逆半群, 若令 Σ 是由引理 4.2 给出, 令 Σ^* 为 Γ^+ 上由 Σ 生成的同余, 则 $\Gamma^+/\Sigma^* = \{K, KT, Kt, k, kT, kTK, kt, T, TK, Tk, TKT, TKt, Tkt, t\} \cup \Delta$ 为 I_x 上的由算子半群 Γ^+ 生成的核 - 迹算子半群, 其中的乘法满足关系 Σ, 且 Δ 中的元素为 Γ^+/Σ^* 的右零元, Δ 为 Γ^+/Σ^* 的理想.

证明 从引理 4.2 中的关系 Σ 可得 $\Delta\Gamma = \Delta$, 且对任意的 $J \in \Gamma$ 和任意的 $I \in \Delta$, 有 $JI = I$. 即 Δ 中的元素为 Γ^+/Σ^* 的右零元, Δ 为 Γ^+/Σ^* 的理想. 利用关系 Σ, 我们能证明由 t 开头的任意字都和 Δ 中的元素有 Σ^* 关系, 除了 t 本身. 剩下的只要证明由 T, k, K 开头的字, 对于任意由 T 开头的字 W, 若 W 是由 Δ 中的元素 V 结尾, 则 W 和 V 有 Σ^* 关系; 否则能证明 W 与下面的字有 Σ^* 关系: T, TK, Tk, TKt, TKT, Tkt. 类似地, 对于 K, k 开头的字的断言也是正确的. 最后验证任意的 Γ^+/Σ^* 中两个元素在这些同余上的作用, 对 Γ^+/Σ^* 中的任意两个元素, 必然存在一个同余, 使得其在这两个元素作用下得到不同的结果. 例如对于元素 TK, Tk, 存在同余 $\rho_{(k,\infty^+)}$, 使得 $\rho_{(k,\infty^+)}TK = \rho_{(k,\infty^+)}K = \rho_{(1,\omega)}$, $\rho_{(k,\infty^+)}Tk = \rho_{(k,\infty^+)}k = \varepsilon$, 即 $\rho_{(k,\infty^+)}TK \neq \rho_{(k,\infty^+)}Tk$. 对其它任何不同元素, 同理可证. 因此证明了上面的任意两个字都没有 Σ^* 关系.

参 考 文 献

[1] Djadcenko G. G., Schein B. M., Monogenic inverse semigroups, *Algebra and Number Theory, Nalcik*, 1973, **1**: 3–26 (Russian).

[2] Eberhart C., Selden J., One parameter inverse semigroups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1972, **168**: 53–66.

[3] Pastijn F. J., Trotter P. G., Lattice of completely regular semigroup varieties, *Pacific J. Math.*, 1998, **119**: 191–214.

[4] Petrich M., Congruences networks for completely simple semigroups, *J. Austral. Math. Soc.*, 1994, **A56**: 243–266.

[5] Petrich M., Congruence on inverse semigroups, *J. Algebra*, 1978, **55**: 231–256.

[6] Petrich M., Reilly N. R., A network of congruences on inverse semigroups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1982, **270**: 309–325.

[7] Petrich M., The semigroup generated by certain operators of the congruence lattice of a Clifford semigroup, *Semigroup Forum*, 1992, **45**: 332–341.

[8] Petrich M., Monogenic Inverse Semigroups, Inverse Semigroups, A Wiley-interscience Publication, Printed in the United States Of America, 1984: 393–435

[9] Scheiblich H. E., A characterization of a free elementary inverse semigroup, *Semigroup Forum*, 1971, **2**: 76–79.

[10] Wang L. M., TK-operator semigroups for cryptogroups, *Semigroup Forum*, 2000, **60**: 368–384.

[11] Wang L. M., Trace-kernel-operator semigroups of bisimple ω-semigroup, *Semigroup Forum*, 2000, **60**: 424–435.