第57卷第1期 数学学报中文版 Vol.57, No.1
2014年1月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Jan., 2014

文章编号: 0583-1431(2014)01-0071-18 **文献标识码: A**

特征为奇数的广义正交图的自同构

霍丽君 郭文彬

中国科学技术大学数学科学学院 合肥 230026
E-mail: ljhuo@mail.ustc.edu.cn; wbguo@ustc.edu.cn

麻常利

河北师范大学数学与信息科学学院 石家庄 050024
E-mail: ma_changli@hotmail.com

摘 要 本文确定了特征为奇数的有限域 $\mathbb{F}_q$ 上广义正交图 $\Gamma GO_{2\nu+\delta}(q,m,S)$ 的自同构, 其中 $1<m<\nu$.

关键词 广义正交图; 自同构; 极大集
MR(2010) 主题分类 05C25, 05E15
中图分类 O157.5

Automorphisms of Generalized Orthogonal Graphs of Odd Characteristic

Li Jun HUO Wen Bin GUO

School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, P. R. China
E-mail: *ljhuo@mail.ustc.edu.cn*; *wbguo@ustc.edu.cn*

Chang Li MA

Mathematics and Information Science College, Hebei Normal University, Shijiazhuang 050024, P. R. China
E-mail: *ma_changli@hotmail.com*

Abstract In this paper, the automorphism group of the generalized orthogonal graph $\Gamma GO_{2\nu+\delta}(q,m,S)$ over $\mathbb{F}_q$ of odd characteristic is determined, where $1<m<\nu$.

Keywords generalized orthogonal graph; automorphism; maximal set
MR(2010) Subject Classification 05C25, 05E15
Chinese Library Classification O157.5

收稿日期: 2012-09-25; 接受日期: 2013-03-22
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11071229); 中俄国际合作基金;
高等学校博士学科点专项科研基金 (20113402110036); 河北省自然科学基金 (A2009000253)
通讯作者: 郭文彬

1 引言

设 $\mathbb{F}_q$ 是一个 q 元有限域, 其中 q 是一个奇素数 p 的方幂, z 是 $\mathbb{F}_q^*$ 中一个固定的非平方元. 令 S 是 $\mathbb{F}_q$ 上一个 $n\times n$ 非奇异对称矩阵, $\mathbb{F}_q$ 上的一个 $n\times n$ 矩阵 T 如果满足 $TST^t=S$, 就称为 S 的正交矩阵. 显然, S 的 $n\times n$ 正交矩阵是非奇异的, 并且它们在矩阵的乘法下形成一个群, 称为 $\mathbb{F}_q$ 上 S 的 n 次正交群, 记作 $O_n(\mathbb{F}_q,S)$. 容易验证两个同步的 $n\times n$ 非奇异对称矩阵 S_1 和 S_2 所对应的正交群 $O_n(\mathbb{F}_q,S_1)$ 和 $O_n(\mathbb{F}_q,S_2)$ 是同构的. 因此, 本文只研究

$$S_{2\nu+\delta,\Delta}=\begin{pmatrix} 0 & I^{(m)} & & & \\ I^{(m)} & 0 & & & \\ & & 0 & I^{(\nu-m)} & \\ & & I^{(\nu-m)} & 0 & \\ & & & & \Delta \end{pmatrix},$$

其中 $\delta=0,1$ 或 2,

$$\Delta=\begin{cases} \phi, & \text{如果 } \delta=0,\\ 1, & \text{如果 } \delta=1,\\ \begin{pmatrix} 1 & \\ & -z\end{pmatrix}, & \text{如果 } \delta=2 \end{cases}$$

的正交群 $O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$. 为方便起见, 把 $S_{2\nu+\delta,\Delta}$ 简记为 S.

正交群 $O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$ 在 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 上有一个自然的作用

$$\begin{aligned} &\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}\times O_{2\nu+\delta,\Delta}(\mathbb{F}_q)\longrightarrow \mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}\\ &((x_1,x_2,\ldots,x_{2\nu+\delta}),T)\longmapsto (x_1,x_2,\ldots,x_{2\nu+\delta})T. \end{aligned}$$

具有 $O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$ 的上述右乘作用的向量空间 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 称为 $\mathbb{F}_q$ 上 S 的 $2\nu+\delta$ 维正交空间. 设 P 是 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中的一个 m 维子空间. 如果一个 $m\times(2\nu+\delta)$ 矩阵的行向量构成子空间 P 的一组基, 则称该矩阵为 P 的一个矩阵表示, 仍记它为 P. 如果 m 维子空间 P 满足 $PSP^t=0$, 则称 P 为 m 维全迷向子空间. 把所有 m 维全迷向子空间的全体记为 $\mathscr{M}(m,0,0;2\nu+\delta,\Delta)$. 对文中未作解释的符号或术语见文 [10].

2008 年, 顾振华和万哲先研究了特征为奇数的正交图 [5]. 特征为奇数的正交图 $O(2\nu+\delta,q)$ 以 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中的全体一维全迷向子空间为顶点集 $V(O(2\nu+\delta,q))$, 两个顶点 α 和 β 相邻接当且仅当 $\alpha S\beta^t\neq 0$. 作为正交图的一个推广, 我们定义如下一类新图.

定义 1.1 $\mathbb{F}_q$ 上 S 的广义正交图, 记为 $\Gamma GO_{2\nu+\delta}(q,m,S)$ (或简记为 Γ), 以所有的 m 维全迷向子空间作为顶点集, 且两个顶点 X 和 Y 相邻接 (记为 $X\sim Y$) 当且仅当 $\dim(X\cap Y)=m-1$ 且 $\mathrm{rank}(XSY^t)=1$.

由定义 1.1, 显然, 当 $m=1$ 时, 广义正交图就是正交图; 当 $m=\nu$ 时, 广义正交图即为对偶极图 [2], 因此本文只考虑当 $1<m<\nu$ 时的情形.

在文 [3, 4, 9] 中, Godsil, Royle, 唐忠明和万哲先等先后对辛图进行了研究. 特别地, 文 [9] 作者确定了辛图的自同构. 在文 [12, 13] 中, 万哲先和周凯研究了特征为 2 的正交图和酉图. 在文 [5] 中, 顾振华和万哲先确定了特征为奇数的正交图的自同构. 类似地, 在文 [12, 13] 中相应图的自同构问题也被解决. 本文主要讨论了广义正交图 Γ 的自同构 $\mathrm{Aut}(\Gamma)$, 得到下面的主要定理.

定理 1.2 设 $1 < m < \nu$, Γ 是特征为奇数的有限域 $\mathbb{F}_q$ 上 $S_{2\nu+\delta,\Delta}$ 的广义正交图. 则 Γ 的任一自同构 τ 具有如下形式

$$\tau(X) = X^\sigma T, \quad \forall\, X \in V(\Gamma), \tag{1.1}$$

其中 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_q)$, T 满足

$$\begin{cases} TST^t = kS, \quad k \in \mathbb{F}_q^*, & \text{如果 } \delta = 0, \\ TST^t = kS, \quad k \in \mathbb{F}_q^{*2}, & \text{如果 } \delta = 1, \\ TST^t = kS^\sigma, \quad k \in \mathbb{F}_q^*, & \text{如果 } \delta = 2. \end{cases}$$

定理 1.2 的证明需要许多步骤. 第 2, 3 节给出了一些已知结论和 Γ 的初等性质. 第 4 节讨论了次成分 Γ_1 和 Γ_2 的几何性质. 第 5 节给出了 Γ 的两类局部结构. 在第 2–5 节的基础上, 第 6 节给出定理 1.2 的证明.

第 3–5 节的结论本身也是独立有趣的.

2 预备知识

这一节列出后面要用到的一些已知结论和符号.

引理 2.1 [10] 设 P_1 和 P_2 是 $\mathbb{F}_q^{(2\nu+\delta)}$ 中的两个 m 维子空间. 则存在 $T \in O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$, 使得 $P_1 = AP_2T$ (其中 A 是一个 $m \times m$ 非奇异矩阵) 当且仅当 P_1 和 P_2 关于 S 是同型子空间. 换句话说, $O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$ 可迁地作用在同型子空间上.

引理 2.2 [1] 顶点可迁图是正则图.

由于 $O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$ 可迁地作用在同型子空间所构成的集合 Ω 上, $O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$ 以下面这种自然的方式作用在集合 $\Omega \times \Omega$ 上

$$(X, Y)^g = (X^g, Y^g), \quad \forall\, X, Y \in \Omega, \quad \forall\, g \in O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q).$$

从而 $(O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q), \Omega \times \Omega)$, 简记为 $(O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q), \Omega \times \Omega)$, 可以被分成不同的轨道 [14].

引理 2.3 [14] 设 $\nu \geq 1$, $m < \nu$, $P, Q, X, Y \in \mathscr{M}(m, 0, 0; 2\nu + \delta, \Delta)$, 则

(1) (P, Q) 和 (X, Y) 属于同一个轨道当且仅当 $\dim(P \cap Q) = \dim(X \cap Y)$, 且 $\mathrm{rank}(PSQ^t) = \mathrm{rank}(XSY^t)$.

(2) 每一个轨道 $(O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q), \mathscr{M}(m, 0, 0; 2\nu + \delta, \Delta))$ 都是对称的.

引理 2.4 [14] 设 $P, Q \in \mathscr{M}(m, 0, 0; 2\nu + \delta, \Delta)$. 若 $\dim(P \cap Q) = t$ 且 $\mathrm{rank}(PSQ^t) = r$, 则 r, t 满足 $0 \leq t \leq m - 1$, $\max\{0, 2m - \nu - t\} \leq r \leq m - t$.

引理 2.5 [3] 如果 x 和 y 是图 G 的两个顶点, 且 $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$, 则 $\partial(x, y) = \partial(x^\sigma, y^\sigma)$.

引理 2.6 [6] 当 $\nu = \frac{n}{2}$ 时, 以下这些元素都是 $O_n(\mathbb{F}_q, S)$ 里的元素, 其中 $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I^{(\nu)} \\ I^{(\nu)} & 0 \end{smallmatrix}\right)$,

(1) $\left(\begin{smallmatrix} A & \\ & (A^t)^{-1} \end{smallmatrix}\right)$, 其中 A 是一个 $\nu \times \nu$ 非奇异矩阵;

(2) $\left(\begin{smallmatrix} I & Q \\ & I \end{smallmatrix}\right)$ 及 $\left(\begin{smallmatrix} I & \\ Q & I \end{smallmatrix}\right)$, 其中 Q 是斜对称矩阵, 即 $Q^t = -Q$;

(3) $\left(\begin{smallmatrix} J & I-J \\ I-J & J \end{smallmatrix}\right)$, 其中 $J^2 = J$ 是一个对角矩阵.

而且, $O_n(\mathbb{F}_q, S)$ 里每一个元素都可以表成下面的形状:

(4) $\left(\begin{smallmatrix} I & \\ X & I \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} A & \\ & (A^t)^{-1} \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} I & Y \\ & I \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} J & I-J \\ I-J & J \end{smallmatrix}\right)$, 其中 $X^t = -X$, $Y^t = -Y$, A 是非奇异的, 且 $J^2 = J$ 是对角矩阵.

引理 2.7 [6] 当 $0<2\nu<n$ 时, 以下这些元素都是 $O_n(\mathbb{F}_q,S)$ 里的元素:

(1) $\begin{pmatrix} A & B & \\ C & D & \\ & & I \end{pmatrix}$, 其中 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in O_{2\nu}(\mathbb{F}_q,S_1)$, $S_1=\begin{pmatrix} 0 & I^{(\nu)} \\ I^{(\nu)} & 0 \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} I & & \\ & I & \\ & & U \end{pmatrix}$, 其中 $U\in O_{n-2\nu}(\mathbb{F}_q,\Delta)$;

(3) $\begin{pmatrix} J & I-J & \\ I-J & J & \\ & & I \end{pmatrix}$, 其中 $J^2=J$ 是对角矩阵;

(4) $\begin{pmatrix} I^{(\nu)} & -\frac{1}{2}P\Delta P^t & -P \\ & I^{(\nu)} & \\ & \Delta P^t & I^{(n-2\nu)} \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} I & & \\ -\frac{1}{2}P\Delta P^t & I & -P \\ \Delta P^t & & I \end{pmatrix}$, 其中 P 是任意的 $\nu\times(n-2\nu)$ 矩阵. 更进一步, $O_n(\mathbb{F}_q,S)$ 里每一个元素都可以表成下面的形状:

(5) $\begin{pmatrix} I & & \\ -\frac{1}{2}X\Delta X^t & I & -X \\ \Delta X^t & & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B & \\ C & D & \\ & & U \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -\frac{1}{2}Y\Delta Y^t & -Y \\ & I & \\ & \Delta Y^t & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J & I-J & \\ I-J & J & \\ & & I \end{pmatrix}$.

本文将采用下列符号:

$M=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} m & m & \nu-m & \nu-m & \delta \end{array} \\ \begin{pmatrix} I^{(m)} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ 是 Γ 中一个给定顶点;

$V(\Gamma)$ 表示 Γ 的顶点;

$\partial(X,Y)$ 表示 Γ 中两点 X 与 Y 之间的距离;

$\Gamma_k(M)=\{X\in V(\Gamma)\,|\,\partial(M,X)=k\}$;

$S(r,t)=\{X\in V(\Gamma)\,|\,\mathrm{rank}(MSX^t)=r,\ \dim(M\cap X)=t\}$;

$X\doteq Y$ 表示两个顶点 X 和 Y 的矩阵表示生成同一个子空间;

$a,b,c,\ldots$ 分别表示 $\mathbb{F}_q$ 中的元素; $\alpha,\beta,\gamma,\eta,\ldots$ 表示行向量.

3 Γ 的初等性质

由引理 2.3 (1) 可知, 广义正交图 Γ 是一个弧可迁图. 此外, Γ 还有如下性质.

命题 3.1 Γ 是一个具有

$$\frac{\prod_{i=\nu-m+1}^{\nu}(q^i-1)(q^{i+\delta-1}+1)}{\prod_{i=1}^{m}(q^i-1)}$$

个顶点的正则图.

证明 Γ 的顶点数可由文 [10, 推论 6.23] 直接得到. 此外由引理 2.1, 2.2, Γ 是一个正则图.

引理 3.2 设 $T\in O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$. 定义如下映射

$$\tau_{T}:V(\Gamma)\to V(\Gamma),$$
$$\tau_{T}(X)=XT,\quad X\in V(\Gamma),$$

则 $\tau_{T}\in\mathrm{Aut}(\Gamma)$.

证明 由于 T 是非奇异的, 显然 τ_T 是一个双射. 由引理 2.3, 对任意 $X,Y\in V(\Gamma)$, (X,Y) 和 (XT,YT) 在同一个轨道, 于是 $X\sim Y$ 当且仅当 $\tau_T(X)\sim\tau_T(Y)$. 因此 $\tau_T\in\mathrm{Aut}(\Gamma)$. 证毕.

引理 3.3 设 $N_i\in S(r_i,t_i)$ $(i=1,2)$. 如果 $N_1\sim N_2$, 则 t_1,t_2,r_1,r_2 满足下列条件之一:

(i) $t_1-t_2=1,\ r_2-r_1=1$;

(ii) $t_2-t_1=1,\ r_1-r_2=1$;

(iii) $t_1-t_2=0,\ r_1-r_2=1$;

(iv) $t_1-t_2=0,\ r_1-r_2=-1$;

(v) $t_1-t_2=0,\ r_1-r_2=0$.

证明 如果 $N_1\sim N_2$, 则由 Γ 的定义有 $\dim(N_1\cap N_2)=m-1$ 且 $\mathrm{rank}(N_1SN_2^t)=1$. 因此, 不妨假设 $N_1=\binom{W}{\alpha}$, $N_2=\binom{W}{\beta}$, 其中 $W=N_1\cap N_2$, $\alpha\notin N_2$, $\beta\notin N_1$. 不失一般性, 可令 $\dim(M\cap W)=t$, 则 N_1 可表示为

$$N_1=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} m & m & \nu-m & \nu-m & \delta\end{array}\\ \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0\\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l} t\\ m-t-1,\\ 1\end{array}$$

其中 $\mathrm{rank}(A)=t$. 易知存在 $T_1\in GL_m(\mathbb{F}_q)$, 使得 $AT_1=(I^{(t)},0)$, 进而由引理 2.6, 2.7, 存在

$$T=\mathrm{diag}(T_1,(T_1^{-1})^t,I^{(\nu-m)},I^{(\nu-m)},I^{(\delta)})\in O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q),$$

使得

$$\begin{aligned}N_1T&=\begin{pmatrix} AT_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ B_1T_1 & B_2(T_1^{-1})^t & B_3 & B_4 & B_5\\ \alpha_1T_1 & \alpha_2(T_1^{-1})^t & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5\end{pmatrix}\\ &\doteq\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc} t & m-t & t & m-t & \nu-m & \nu-m & \delta\end{array}\\ \begin{pmatrix} I^{(t)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & B_{12} & 0 & B_{22} & B_3 & B_4 & B_5\\ 0 & \alpha_{12} & 0 & \alpha_{22} & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5\end{pmatrix}\end{array}\\ &=N_1'.\end{aligned}$$

由引理 2.3, (M,N_1) 和 (M,N_1') 在同一个轨道, 于是

$$\dim(M\cap N_1)=\dim(M\cap N_1')=t_1,\quad \mathrm{rank}(MSN_1^t)=\mathrm{rank}(MS(N_1')^t)=r_1.$$

类似地, 有

$$N_2T\doteq N_2'=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc} t & m-t & t & m-t & \nu-m & \nu-m & \delta\end{array}\\ \begin{pmatrix} I^{(t)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & B_{12} & 0 & B_{22} & B_3 & B_4 & B_5\\ 0 & \beta_{12} & 0 & \beta_{22} & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5\end{pmatrix}\end{array},$$

以及

$$\dim(M\cap N_2)=\dim(M\cap N_2')=t_2,\quad \mathrm{rank}(MSN_2^t)=\mathrm{rank}(MS(N_2')^t)=r_2.$$

不难看出

$$r_1 = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} B_{22} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix}, \quad r_2 = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} B_{22} \\ \beta_{22} \end{pmatrix}.$$

令 $\operatorname{rank}(B_{22}) = r$. 由于 $\operatorname{rank}(N_1' S (N_2')^t) = \operatorname{rank}(N_1 S N_2^t) = 1$, 所以 N_1' 与 N_2' 满足以下条件

$$\alpha_{12}\beta_{22}^t + \alpha_{22}\beta_{12}^t + \alpha_3\beta_4^t + \alpha_4\beta_3^t + \alpha_5\Delta\beta_5^t \neq 0. \tag{3.1}$$

我们讨论下面几种可能情形:

(a) $t_1 = t+1$. 在这种情况下, 可适当选取 N_1' 的一个的矩阵表示, 使得 $\alpha_{12} \neq 0$ 且 $(\alpha_{22}, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = 0$, 此时 $r_1 = \operatorname{rank}(B_{22}) = r$. 如果 $t_2 = t+1$, 同理可适当选择 N_2' 的矩阵表示, 使得 $(\beta_{22}, \beta_3, \beta_4, \beta_5) = 0$. 然而这时不满足条件 (3.1). 因此必有 $t_2 = t$, 这意味着 $(\beta_{22}, \beta_3, \beta_4, \beta_5) \neq 0$. 由条件 (3.1) 得 $\alpha_{12}\beta_{22}^t \neq 0$, 且 β_{22} 不能由 B_{22} 的行向量线性表出, 故有 $r_2 = r+1$. 因此 t_1, t_2, r_1, r_2 满足条件 (i), 即当 $t_1 - t_2 = 1$ 时, $r_2 - r_1 = 1$.

(b) $t_1 = t$. 在这种情况下, $(\alpha_{22}, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \neq 0$, $r_1 = r$ 或 $r+1$. 若 $t_2 = t+1$, 类似于上面的讨论有 $r_1 - r_2 = 1$, 进而有条件 (ii). 若 $t_2 = t$, 则 $(\beta_{22}, \beta_3, \beta_4, \beta_5) \neq 0$. 如果 α_{22}, β_{22} 其中有一个可由 B_{22} 的行向量线性表出, 则有 $|r_1 - r_2| = 1$, 否则 $r_2 - r_1 = 0$, 即得条件 (iii), (iv), (v).

另一方面, 根据引理所列五种条件中的任何一个, 均存在 $N_1 \in S(r_1, t_1), N_2 \in S(r_2, t_2)$, 使得 $N_1 \sim N_2$, 即这五种结果不能再删减. 证毕.

定理 3.4 $\Gamma_i(M) = \bigcup_{2m-2t-r=i} S(r,t)$.

证明 对 i 用数学归纳法进行证明. 当 $i=1$ 时, 由 Γ 的定义显然有 $\Gamma_1(M) = S(1, m-1)$. 如果 $X \in \Gamma_k(M)$, 则存在一个顶点 $Q \in \Gamma_{k-1}(M)$, 使得 $X \sim Q$. 不失一般性, 假设 $Q \in S(r_1, t_1)$. 由引理 3.3 知, X 属于以下顶点集之一 : $S(r_1, t_1)$, $S(r_1+1, t_1)$, $S(r_1+1, t_1-1)$, $S(r_1-1, t_1+1)$, $S(r_1-1, t_1)$. 由归纳假设, $2m - 2t_1 - r_1 = k-1$, 从而 $S(r_1, t_1)$, $S(r_1+1, t_1)$, $S(r_1-1, t_1+1)$ 中的点与 M 的距离均小于 $k-1$. 因此 $X \in S(r_1+1, t_1-1)$ 或者 $X \in S(r_1-1, t_1)$. 不难看出 $2m - 2(t_1-1) - (r_1+1) = 2m - 2t_1 - (r_1-1) = k$, 所以 $X \in S(r,t)$, 其中 $2m-2t-r=k$. 反之, 如果 $X \in S(r,t)$, 其中 $2m-2t-r=k$, 则由归纳假设, $\partial(M,X) \geq k$. 此外由引理 3.3, 存在 $S(r+1,t)$ 中一点 Y 与 X 相邻. 再由归纳假设, $\partial(M,Y) = k-1$, 于是 $\partial(M,X) \leq k$. 因此 $\partial(M,X) = k$, $X \in \Gamma_k(M)$. 证毕.

推论 3.5 如果 $X \in S(r,t)$, 则 $\partial(M,X) = 2m-2t-r$.

推论 3.6 令 d 是图 Γ 的直径, 则 $d = \min\{2m, \nu\}$.

证明 由推论 3.5, 显然有 $d \leq 2m$. 由引理 2.4, $2m - \nu - t \leq r$, 从而 $d = 2m-2t-r \leq \nu - t \leq \nu$. 因此 $d \leq \min\{2m, \nu\}$. 下面说明等号成立. 如果 $2m \leq \nu$, 则由推论 3.5 可找到一点

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2m & m & 2\nu-3m+\delta \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} 0 & I & 0 \end{array} \right) \end{array} \in S(0,0),$$

使得 $\partial(M,P) = 2m$. 如果 $m < \nu < 2m$, 我们同样可以找到一点

$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} m & 2m-\nu & \nu-m & \nu-m & \nu-m+\delta \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \end{pmatrix} \end{array} \in S(2m-\nu, 0)$$

满足 $\partial(M,Q) = \nu$, 所以 $d = \min\{2m, \nu\}$. 证毕.

4 Γ_1 和 Γ_2 的几何结构

由定理 3.4,

$$\Gamma_1(M)=S(1,m-1),\quad \Gamma_2(M)=S(0,m-1)\cup S(2,m-2).$$

用 Γ_i 表示由 $\Gamma_i(M)$ 诱导出的子图. 本节研究 Γ_1 与 Γ_2 的几何性质, 以及 Γ_1 和 Γ_2 之间的关系.

定理 4.1 $\Gamma_1(M)$ 具有 $\frac{q^m-1}{q-1}$ 个连通分支, 每个连通分支中有 $q^{2(\nu-m)+\delta}$ 个点, 且其中点的形式为

$$\Gamma(i,\eta;\alpha,\beta,\gamma)=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccccc} i-1 & 1 & m-i & i-1 & 1 & m-i & \nu-m & \nu-m & \delta\end{array}\\ \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 1 & \eta & \alpha & \beta & \gamma\\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\eta^t & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{array}, \tag{4.1}$$

其中 $1\le i\le m$ 且 $2a+2\alpha\beta^t+\gamma\Delta\gamma^t=0$.

注 1 我们把由 i,η 所确定的具有形式 (4.1) 的所有点的集合记为 $\Gamma(i,\eta)$.

证明 首先, 给出 $\Gamma_1(M)$ 中点的最简形式. 对任意 $X\in\Gamma_1(M)$, 由于 $\Gamma_1(M)=S(1,m-1)$, X 可以写成

$$X=\begin{array}{cc}\begin{array}{ccccc} m & m & \nu-m & \nu-m & \delta\end{array} & \\ \begin{pmatrix}\xi & \rho & \alpha & \beta & \gamma\\ A & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} & \begin{array}{l}1\\ m-1\end{array}\end{array},$$

其中 $\operatorname{rank}(A)=m-1$, $(\rho,\alpha,\beta,\gamma)\neq 0$, $A\rho^t=0$, 且 $2\xi\rho^t+2\alpha\beta^t+\gamma\Delta\gamma^t=0$. 由于 $\operatorname{rank}(A)=m-1$, 则存在 $T_1\in GL_{m-1}(\mathbb{F}_q)$, 使得

$$T_1A=\begin{pmatrix} I^{(i-1)} & 0 & 0\\ 0 & -\eta^t & I^{(m-i)}\end{pmatrix}.$$

于是存在 $T\in GL_m(\mathbb{F}_q)$, 使得 TX 具有形式 (4.1). 根据 i,η 可将 $\Gamma_1(M)$ 分为

$$q^{m-1}+q^{m-2}+\cdots+1=\frac{q^m-1}{q-1}$$

个类, 且每一类 $\Gamma(i,\eta)$ 中有 $q^{2(\nu-m)+\delta}$ 个点.

其次, 证明对任意 $X\in\Gamma(i,\eta)$, $Y\in\Gamma(i',\eta')$, 且 $X\neq Y$, 如果 $X\sim Y$, 则 $(i,\eta)=(i',\eta')$. 设 $X=\Gamma(i,\eta;\alpha,\beta,\gamma)$ 具有 (4.1) 的形式, 以及

$$Y=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccccc} i'-1 & 1 & m-i' & i'-1 & 1 & m-i' & \nu-m & \nu-m & \delta\end{array}\\ \begin{pmatrix} 0 & a' & 0 & 0 & 1 & \eta' & \alpha' & \beta' & \gamma'\\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -(\eta')^t & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{array}.$$

为方便起见, 令 $X=(\xi_1^t,\dots,\xi_m^t)^t$, $Y=(\rho_1^t,\dots,\rho_m^t)^t$, 其中 $\{\xi_1,\dots,\xi_m\}$ 和 $\{\rho_1,\dots,\rho_m\}$ 分别是 X 和 Y 的行向量. 由于 $X\sim Y$, 则有 $\dim(X\cap Y)=m-1$. 假设 $i\neq i'$, 不妨设 $i>i'$. 容易看出 $\xi_1,\xi_{i'+1},\rho_1,\dots,\rho_m$ 是线性无关的, 因此 $\dim(X+Y)\ge m+2$, 从而

$$\dim(X\cap Y)=\dim X+\dim Y-\dim(X+Y)\le m-2.$$

矛盾. 故必有 $i=i'$. 如果 ξ_1 可由 $\rho_1,\dots,\rho_m$ 线性表出, 则 $\xi_1=\rho_1$, 因而 $X=Y$, 矛盾. 于是 $\xi_2,\dots,\xi_m$ 可表示为 $\rho_2,\dots,\rho_m$ 的线性组合, 即

$$\begin{pmatrix}\xi_2\\ \vdots\\ \xi_m\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\rho_2\\ \vdots\\ \rho_m\end{pmatrix},\quad 其中\ P\in GL_{m-1}(\mathbb{F}_q).$$

易得 $P=I^{(m-1)}$ 且 $\eta=\eta'$. 另一方面, 通过计算 $\mathrm{rank}(XSY^t)$, 得到 $X\sim Y$ 当且仅当 $(i,\eta)=(i,\eta')$, 且

$$a+a'+\alpha(\beta')^t+\beta(\alpha')^t+\gamma\Delta(\gamma')^t\neq 0.$$

最后, 证明每一个由 $\Gamma(i,\eta)$ 诱导的子图是 Γ_1 的一个连通分支. 事实上, 由上面的结论知每一个点集 $\Gamma(i,\eta)$ 中有 $q^{2(\nu-m)+\delta}$ 个点, 且容易计算对任意 $X\in\Gamma(i,\eta)$, 在 $\Gamma(i,\eta)$ 中与 X 邻接的点有 $q^{2(\nu-m)+\delta}-q^{\nu-m+\delta}$ 个. 然而

$$2(q^{2(\nu-m)+\delta}-q^{\nu-m+\delta})-(q^{2(\nu-m)+\delta}-2)=q^{\nu-m+\delta}(q^{\nu-m}-2)+2>0,$$

这说明 $\Gamma(i,\eta)$ 中任意两点之间必有路. 证毕.

推论 4.2 Γ 中每一个顶点的度为 $\frac{q^{2(\nu-m)+\delta}(q^m-1)}{q-1}$.

对于由 $S(0,m-1)$ 诱导的子图的结构, 我们有下面与定理 4.1 相类似的结论.

定理 4.3 由 $S(0,m-1)$ 诱导的子图有 $\frac{q^m-1}{q-1}$ 个连通分支, 且每个连通分支中的点有如下形式

$$\overline{\Gamma(i,\eta;\alpha,\beta,\gamma)}=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccccc} i-1 & 1 & m-i & i-1 & 1 & m-i & \nu-m & \nu-m & \delta\end{array}\\ \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta & \gamma\\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\eta^t & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{array},\tag{4.2}$$

其中 $1\le i\le m$, $(\alpha,\beta,\gamma)\neq 0$ 且 $2\alpha\beta^t+\gamma\Delta\gamma^t=0$.

注 2 我们把由 i,η 所确定的具有形式 (4.2) 的所有点的集合记为 $\overline{\Gamma(i,\eta)}$.

定理 4.4 集合 $S(2,m-2)$ 是由具有下列形式的点组成

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccccccccc} i-1 & 1 & j-i-1 & 1 & m-j & i-1 & 1 & j-i-1 & 1 & m-j & \nu-m & \nu-m & \delta\end{array}\\ \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 1 & \eta_{11} & 0 & \eta_{12} & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ 0 & a_2 & 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \eta_2 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\eta_{11}^t & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\eta_{12}^t & 0 & -\eta_2^t & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{array},\tag{4.3}$$

其中

$$1\le i<j\le m,\quad 2a_1+2\beta_1\alpha_1^t+\gamma_1\Delta\gamma_1^t=0,\quad 2b_2+2\beta_2\alpha_2^t+\gamma_2\Delta\gamma_2^t=0,$$

且

$$a_2+b_1+\beta_1\alpha_2^t+\alpha_1\beta_2^t+\gamma_1\Delta\gamma_2^t=0.$$

注 3 我们把由 $i,j,\eta_{11},\eta_{12},\eta_2$ 所确定的具有形式 (4.3) 的点的集合记为 $\Gamma(i,j;\eta_{11},\eta_{12},\eta_2)$.

证明　令 $X \in S(2, m-2)$, 则 X 可表为

$$X = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} m & m & \nu-m & \nu-m & \delta \end{array} \\ \begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \rho_3 & \rho_4 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ A & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ m-2, \end{array}$$

其中 $\operatorname{rank}(A) = m-2$, 且 $\operatorname{rank}(\rho_2^t, \rho_4^t) = 2$. 易知存在 $T_1 \in GL_{m-2}(\mathbb{F}_q)$, 使得

$$T_1 A = \begin{pmatrix} I^{(i-1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\eta_{11}^t & I^{(j-i-1)} & 0 & 0 \\ 0 & -\eta_{12}^t & 0 & -\eta_2^t & I^{(m-j)} \end{pmatrix}.$$

从而存在 $T \in GL_m(\mathbb{F}_q)$, 使得

$$TX = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccccc} i-1 & 1 & j-i-1 & 1 & m-j & i-1 & 1 & j-i-1 & 1 & m-j & \nu-m & \nu-m & \delta \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & c_{11} & 0 & c_{21} & 0 & t_1 & d_{11} & \xi_1 & d_{21} & \delta_1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & c_{12} & 0 & c_{22} & 0 & t_2 & d_{12} & \xi_2 & d_{22} & \delta_2 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\eta_{11}^t & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\eta_{12}^t & 0 & -\eta_2^t & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

由于 X 是一个全迷向子空间, 易得 $t_1 = t_2 = 0$, 且

$$\begin{cases} \xi_i = d_{1i}\eta_{11} \quad (i = 1, 2), \\ \delta_i = d_{1i}\eta_{12} + d_{2i}\eta_2 \quad (i = 1, 2), \\ 2d_{1i}c_{1i} + 2d_{2i}c_{2i} + 2\beta_i\alpha_i^T + \gamma_i\Delta\gamma_i^T = 0 \quad (i = 1, 2), \\ d_{11}c_{12} + d_{21}c_{22} + c_{11}d_{12} + c_{21}d_{22} + \beta_1\alpha_2^T + \alpha_1\beta_2^T + \gamma_1\Delta\gamma_2^T = 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

我们断言 d_{11} 和 d_{12} 不能同时为 0. 事实上, 如果 $d_{11} = d_{12} = 0$, 则 $\operatorname{rank}(MSX^t) \neq 2$, 矛盾. 不失一般性, 令 $d_{11} = 1$, 则由条件 (4.4), X 可进一步化为 (4.3) 的形式. 证毕.

由定理 4.3 和 4.4, 容易看出在 Γ_2 中 $S(0, m-1)$ 和 $S(2, m-2)$ 之间没有相邻的点.

定理 4.5　设 $X \in \overline{\Gamma(i,\eta)}$, $Y \in \Gamma(i', \eta')$. 如果 $X \sim Y$, 则 $(i, \eta) = (i', \eta')$.

证明　类似于定理 4.1 证明中的第二部分.

定理 4.6　对任意 $X \in S(2, m-2)$, 在 Γ_1 中有 $q+1$ 个点与 X 相邻, 并且这 $q+1$ 个点分别属于 $q+1$ 个不同的连通分支.

证明　由于 $X \in S(2, m-2)$, 令 X 具有 (4.3) 的形式. 假设存在 $Y \in \Gamma_1(M)$, 使得 $Y \sim X$, 则由定理 4.1, Y 可表为

$$Y = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} i'-1 & 1 & m-i' & i'-1 & 1 & m-i' & \nu-m & \nu-m & \delta \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 1 & \eta & \alpha & \beta & \gamma \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\eta^t & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

为方便起见, 记 $X = (\xi_1^t, \ldots, \xi_m^t)^t$, $Y = (\rho_1^t, \ldots, \rho_m^t)^t$, 其中 $\{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$ 和 $\{\rho_1, \ldots, \rho_m\}$ 分别是 X 和 Y 的行向量. 分以下三种情况进行讨论.

(1) $i' \neq i$, 且 $i' \neq j$. 由于 $\xi_1, \xi_2, \rho_1, \dots, \rho_m$ 是线性无关的, 我们有 $\dim(X+Y) \geq m+2$, 于是 $\dim(X \cap Y) = \dim X + \dim Y - \dim(X+Y) \leq m-2$. 从而 $X \nsim Y$, 于是这种情形不成立.

(2) $i' = j$. 在这种情况下, ξ_1 不能由 $\rho_1, \dots, \rho_m$ 线性表出. 由 $X \sim Y$, 则 $\xi_2, \dots, \xi_m$ 可由 $\rho_1, \dots, \rho_m$ 线性表出. 于是 $\xi_2 = \rho_1 + a_2\rho_{i+1}$ 且 $\eta_2 = \eta$. 另一方面, 容易计算 $\mathrm{rank}(XSY^t) = 1$. 这表明如果 $X \sim Y$, 则 $Y \in \Gamma(j, \eta_2)$.

(3) $i' = i$. 在这种情况下, ξ_2 不可由 $\rho_1, \dots, \rho_m$ 线性表出. 由 $X \sim Y$, $\xi_1 + c_1\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_m$ 可以由 $\rho_1, \dots, \rho_m$ 线性表出, 其中 $c_1 \in \mathbb{F}_q$. 于是有 $\xi_1 + c_1\xi_2 = \rho_1 + c_2\rho_j$, 其中, $c_2 = b_1 + c_1 b_2$. 进而 $\eta = (\eta_{11}, 0, \eta_{12}) + c_1(0, 1, \eta_2)$. 另一方面, 由简单计算可得 $\mathrm{rank}(YSX^t) = 1$. 因此, 在 $i' = i$ 的情况下, 如果 $X \sim Y$, 则 $Y \in \Gamma(i, (\eta_{11}, 0, \eta_{12}) + c_1(0, 1, \eta_2))$.

综上, 由 (2) 和 (3), 在 $\Gamma_1(M)$ 中有 $q+1$ 个点与 X 相邻, 并且这 $q+1$ 个点分别属于 $q+1$ 个不同的连通分支. 证毕.

5 Γ 的两类局部结构

本节给出 Γ 的两类局部结构, 即极大集与拟四面体, 它们在定理 1.2 的证明中起着重要作用.

定义 5.1 称 $V(\Gamma)$ 的子集 $\mathfrak{E}$ 为一个极大集, 如果 $\mathfrak{E}$ 满足下列条件:

(1) 对于 $\mathfrak{E}$ 中任意不同两点 P 和 Q, 有 $\dim(P \cap Q) = m-1$;

(2) 对于任意一点 $X \in V(\Gamma) \setminus \mathfrak{E}$, 存在 $Y \in \mathfrak{E}$, 使得 $\dim(X \cap Y) \neq m-1$.

定理 5.2 设 $\mathscr{C}$ 是 Γ 中所有极大集的集合, 则 $O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$ 可迁地作用在集合 $\mathscr{C}$ 上, 且每个极大集所诱导的子图都是强正则的, 其同构于 S' 的正交图 $O(2(\nu-m+1)+\delta, q)$, 这里

$$S' = \begin{pmatrix} & 1 & & & \\ 1 & & & & \\ & & & I^{(\nu-m)} & \\ & & I^{(\nu-m)} & & \\ & & & & \Delta \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

证明 令 $\mathfrak{E} = \{M\} \cup \Gamma(1,0) \cup \overline{\Gamma(1,0)}$, 则显然 $\mathfrak{E}$ 是一个极大集. 我们如下定义一个由 $\mathfrak{E}$ 到 $\mathbb{F}_q^{2(\nu-m+1)+\delta}$ 的映射

$$\begin{aligned} \varphi : \mathfrak{E} &\to \mathbb{F}_q^{2(\nu-m+1)+\delta}, \\ X &\mapsto (a, b, \alpha, \beta, \gamma), \end{aligned}$$

其中

$$X = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & m-1 & 1 & m-1 & \nu-m & \nu-m & \delta \end{array} \\ \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \in \mathfrak{E},$$

$b = 1$ 或 0, 且 $2ab + 2\alpha\beta^t + \gamma\Delta\gamma^t = 0$. 对任意 $P, Q \in \mathfrak{E}$, 易知 $P \sim Q$ 当且仅当 $\varphi(P) \sim \varphi(Q)$. 因此 φ 是一个从 $\mathfrak{E}$ 到 $O(2(\nu-m+1)+\delta, q)$ 的同构映射. 由于 $O(2(\nu-m+1)+\delta, q)$ 是一个强正则图 [5], 所以由 $\mathfrak{E}$ 诱导的子图也是强正则的.

现在证明极大集之间的可迁性, 为此只需证明每一个极大集均可被正交群 $O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$ 中的元素迁到 $\mathfrak{E}$ 即可. 令 $\mathfrak{E}'$ 是不同于 $\mathfrak{E}$ 的任意一个极大集. 任取 $P, Q \in \mathfrak{E}'$, 使得 $P \sim Q$, 则由 Γ 的弧

可迁性, 存在 $T \in O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$, 使得

$$(PT, QT) = (M, N),$$

其中 $N \in \Gamma(1,0)$. 由定义 5.1 可知 $\mathfrak{E}'\backslash\{P\}$ 中的点可以被分成下列不交的集合

$$\mathfrak{E}'_1 = \{X \,|\, X \sim P\} \quad 和 \quad \mathfrak{E}'_2 = \{X \,|\, \dim(X \cap P) = m-1,\, \mathrm{rank}(PSX^t) = 0\}.$$

对任意 $X \in \mathfrak{E}'_1$, 由于 $X \sim P$, 由引理 2.3, 我们有 $XT \sim PT$, 即 $XT \sim M$.

因为在 $\mathfrak{E}'_1$ 中存在一点 Q, 使得 $QT = N \in \Gamma(1,0)$, 且 $\Gamma(1,0)$ 是 Γ_1 的一个连通分支, 所以 $XT \in \Gamma(1,0)$. 对任意 $X \in \mathfrak{E}'_2$, 容易看出

$$\dim(M \cap XT) = m-1, \quad \mathrm{rank}(MS(XT)^t) = 0.$$

因此, $XT \in \overline{\Gamma(1,0)}$. 总之, 对任意 $X \in \mathfrak{E}'$, 均有 $XT \in \mathfrak{E}$.

由极大集之间的可迁性可知每个极大集所诱导的子图都是强正则图. 证毕.

定义 5.3 称 $V(\Gamma)$ 的一个四点集 $\{P, Q_1, Q_2, Q_3\}$ 为一个拟四面体, 如果满足下列条件:

(1) $P \sim Q_i$ $(i = 1,2,3)$;

(2) $\dim(Q_i \cap Q_j) = m-2$, 且 $\mathrm{rank}(Q_iSQ_j^t) = 2$ $(1 \le i,\, j \le 3,\, i \ne j)$.

我们把文章中要用到的一些顶点的矩阵表示列举如下

$$N_i = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} i-1 & 1 & m-i & i-1 & 1 & m-i & \nu-m & \nu-m & \delta \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \eta & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\eta^t & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \in \Gamma(i,0), \tag{5.2}$$

$$L = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & m-1 & 1 & m-1 & \nu-m & \nu-m & \delta \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \\ -e_2^t & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \in \Gamma(1, e_2), \quad e_2 = (1, \overbrace{0, \ldots, 0}^{m-2}), \tag{5.3}$$

$$R = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 1 & 1 & m-2 & 1 & 1 & m-2 & \nu-m & \nu-m & \delta \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \in \Gamma(1,2;0). \tag{5.4}$$

引理 5.4 对任意 $X \in \Gamma(i,0)$, 存在 $T \in O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$, 使得 $XT = N_i$, $MT \doteq M$, 且 $N_jT \doteq N_j$, 对 $j \ne i$.

证明 假设 $\delta \ne 0$, 由定理 4.1, 设 $X = \Gamma(i,0;\alpha,\beta,\gamma)$, 则由引理 2.6, 2.7 容易验证存在 $O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$ 中的下列元素

$$T_1 = \begin{pmatrix} I^{(m)} & & & & \\ & I^{(m)} & -A & & \\ & & I^{(\nu-m)} & & \\ A^t & & & I^{(\nu-m)} & \\ & & & & I^{(\delta)} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} i-1 \\ 1 \\ m-i, \end{array}$$

$$T_2=\begin{pmatrix} I^{(m)} & & & & \\ & I^{(m)} & & -B & \\ B^t & & I^{(\nu-m)} & & \\ & & & I^{(\nu-m)} & \\ & & & & I^{(\delta)} \end{pmatrix},\quad B=\begin{array}{c l}\begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} i-1 \\ 1 \\ m-i, \end{array}\end{array}$$

以及

$$T_3=\begin{pmatrix} I^{(m)} & & & & \\ -\frac{1}{2}P\Delta P^t & I^{(m)} & & & -P \\ & & I^{(\nu-m)} & & \\ & & & I^{(\nu-m)} & \\ \Delta P^t & & & & I^{(\delta)} \end{pmatrix},\quad P=\begin{array}{c l}\begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} i-1 \\ 1 \\ m-i, \end{array}\end{array}$$

使得 $XT_1T_2T_3=N_i$, $MT \doteq M$ 及 $N_jT \doteq N_j$, $j\neq i$, 显然, $T=T_1T_2T_3$ 即为所求. 当 $\delta=0$ 时, $T=T_1T_2$ 即为所求. 证毕.

定理 5.5 设 $\mathscr{H}$ 是 Γ 中全体拟四面体的集合, 则

(i) 当 $m\geq 3$ 时, $O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$ 在 $\mathscr{H}$ 上的作用下有两个轨道, 即 $\mathscr{H}=\mathscr{H}_1\cup\mathscr{H}_2$, $\mathscr{H}_1\cap\mathscr{H}_2=\emptyset$, 其中 $\mathscr{H}_i$ 中的拟四面体满足: 在 Γ 中与每一个 Q_j 均邻接的点的个数为 i $(i=1,2)$, 这里 Q_j $(j=1,2,3)$ 为满足定义 5.3 中条件 (2) 的顶点.

(ii) 当 $m=2$ 时, $O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$ 可迁地作用在 $\mathscr{H}$ 上.

证明 首先, 令 N_i, L 和 R 分别是由 (5.2)–(5.4) 所列顶点.

(i) 当 $m\geq 3$ 时, 设 $H_1=\{M,N_1,N_2,N_3\}$, $H_2=\{M,N_1,N_2,L\}$, 易证 H_1 和 H_2 均为拟四面体. 容易计算, 在 Γ 中与 N_i $(i=1,2,3)$ 均邻接的顶点只有 M, 而与 N_1,N_2 及 L 均邻接的顶点有两个: M 和 R, 于是 $H_1\in\mathscr{H}_1$, $H_2\in\mathscr{H}_2$. 为证明 $\mathscr{H}=\mathscr{H}_1\cup\mathscr{H}_2$, 只需说明对任意 $H\in\mathscr{H}$, 我们都可以用 $O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$ 中的元素将其迁到 H_1 或 H_2 即可. 任取一不同于 H_1 和 H_2 的四面体 $H=\{P,Q_1,Q_2,Q_3\}$, 由于 Γ 是弧可迁的, 存在 $T_1\in O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$, 使得 $(PT_1,Q_1T_1)=(M,N_1)$ 以及 $Q_2'=Q_2T_1\in\Gamma(i,\eta)$. 下面分两步来证明 H 可以迁到 H_1 或 H_2.

(1) 首先要找 $T_2\in O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$, 使得 $Q_2'T_2=N_2$, $MT_2\doteq M$ 且 $N_1T_2\doteq N_1$.

由定理 4.1, 不妨设 $Q_2'=\Gamma(i,\eta;\alpha,\beta,\gamma)$. 假设 $i\geq 2$, 令 $K_1=\mathrm{diag}((A^{-1})^t,A,I^{(\nu-m)},I^{(\nu-m)},I^{(\delta)})$, 其中

$$A=\begin{pmatrix} I^{(i-1)} & & \\ & 1 & -\eta \\ & & I^{(m-i)} \end{pmatrix},$$

则 $K_1\in O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$, 且 $Q_2'K_1\in\Gamma(i,0)$. 由引理 5.4, 存在 $K_2\in O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$, 使得 $Q_2'K_1K_2=N_i$. 如果 $i=2$, 则 (1) 显然成立. 假设 $i>2$, 令 $K_3=\mathrm{diag}((B^{-1})^t,B,I^{(\nu-m)},I^{(\nu-m)},I^{(\delta)})$, 其中

$$B=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & i-3 & 1 & m-i \end{array}\\ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & & & 1 & \\ & & I^{(i-3)} & & \\ & 1 & & & \\ & & & & I^{(m-i)} \end{pmatrix}\end{array},$$

则 $T_2 = K_1K_2K_3 \in O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$ 即是我们要找的元素.

现假设 $i = 1$, 且 $\eta = (r_2, r_3, \ldots, r_m)$. 由于 $\dim(N_1 \cap Q_2T_1) = m-2$, 则 η 中恰好存在唯一一个非零分量, 不妨设 $r_j \neq 0$ $(2 \leq j \leq m)$. 令 $P = \mathrm{diag}(r_j^{-1}, I^{(m-1)})$ 以及 $K_4 = \mathrm{diag}((C^{-1})^t, C, I^{(\nu-m)}, I^{(\nu-m)}, I^{(\delta)})$, 其中

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & & j & & m \end{array} \\ C = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \vdots & \ddots & & & \\ -r_j^{-1} & \cdots & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

显然 $K_4 \in O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$, 且满足 $PQ_2'K_4 \in \Gamma(j, 0)$. 类似地, 存在 $T_2 \in O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$, 使得 $Q_2'T_2 = N_2$, $MT_2 \doteq M$, 以及 $N_1T_2 \doteq N_1$.

(2) 其次证明存在 $O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$ 中的元素 T_3, 使得 Q_3 可迁到 N_3 或者 L.

假设 $Q_3' = Q_3T_1T_2$ 具有形式 (4.1). 如果 $i \geq 2$ 类似于 (1) 中证明, 可以找到 $T_3 \in O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$, 使得 $Q_3'T_3 = N_3$, $MT_3 \doteq M$, $N_1T_3 \doteq N_1$ 及 $N_2T_3 \doteq N_2$. 这时 H 经过正交群中的元素迁到了 H_1.

如果 $i = 1$, 令 $\eta = (r_2, r_3, \ldots, r_m)$. 由于 $\dim(N_1 \cap Q_3') = m-2$, 则在 η 中恰有唯一一个非零分量, 不妨设 $r_j \neq 0$. 如果 $j \geq 3$, 方法同上我们可得 H 可被正交群中的元素迁到 H_1. 如果 $r_2 \neq 0$, 则存在 $O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$ 中的元素 $K_5 = \mathrm{diag}((D^{-1})^t, D, I^{(\nu-m)}, I^{(\nu-m)}, I^{(\delta)})$, 其中 $D = \mathrm{diag}(1, r_2^{-1}, I^{(m-2)})$, 使得

$$Q_3'K_5 = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & e_2 & \alpha & \beta & \gamma \\ -{e_2}^t & I^{(m-1)} & 0 & 0^{(m-1)} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

运用与引理 5.4 同样的证明方法, 可找到 $K_6 \in O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$, 使得 $Q_3'K_5K_6 = L$. 设 $T_3 = K_5K_6$, 容易验证 $MT_3 \doteq M$, $N_1T_3 \doteq N_1$, 且 $N_2T_3 \doteq N_2$. 因此 H 被 $O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$ 中的元素迁到 H_2.

(ii) 当 $m = 2$ 时, Γ 中只有形如 $\mathscr{H}_2$ 中类型的拟四面体, 证明类似于 (i). 证毕.

6 定理 1.2 的证明

证明 设 G^* 是由定理 (1.1) 式所示的全体变换所构成的群, 显然 $G^* \leq \mathrm{Aut}(\Gamma)$. 因此只需证明对任意 $\tau \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$, 存在 $\tau' \in G^*$, 使得 $\tau'\tau$ 固定 $V(\Gamma)$ 中的每一个点. 不失一般性, 我们从 M 点开始讨论. 对任意 $\tau \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$, 如果 $\tau(M) = X$, $X \in V(\Gamma)$, 则由引理 3.2 以及 $O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$ 在 $V(\Gamma)$ 上的可迁性, 存在 $T \in O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$, 使得 $\tau_T(X) = M$. 因此不妨设 τ 为满足 $\tau(M) = M$ 的 Γ 的任意自同构. 通过以下步骤进行证明.

(1) 存在 $\tau_1 \in G^*$, 使得 $\tau_1\tau$ 固定每一个连通分支 $\Gamma(i, \eta)$, 且 $\tau_1\tau(M) = M$.

由引理 2.5 知图的自同构保持顶点的距离不变, 因此 $\tau(\Gamma_k(M)) = \Gamma_k(M)$. 再由定理 4.1 知, $\Gamma(i, \eta)$ 是一个连通分支, 从而 $\tau(\Gamma(i, \eta)) = \Gamma(i', \eta')$. 由定理 4.3 和 4.5, $\tau(\overline{\Gamma(i, \eta)}) = \overline{\Gamma(i', \eta')}$, 于是 $\tau(S(0, m-2)) = S(0, m-2)$. 令

$$\alpha = (\overset{i-1}{0} \quad \overset{1}{1} \quad \overset{m-i}{\eta}),$$

则 α 可以看作是射影空间 $PG(m-1,\mathbb{F}_q)$ 中的点的. 显然由 τ 诱导出的一一变换 $\widetilde{\tau}$ 作用在 $PG(m-1,\mathbb{F}_q)$ 上等价于 τ 作用在集合 $\Gamma(i,\eta)$ 上. 由定理 4.6, 对于 $S(2,m-2)$ 中的任意一点, 在 Γ_1 中有 $q+1$ 个连通分支与之邻接, 而这 $q+1$ 个连通分支所对应的 α 恰好构成 $PG(m-1,\mathbb{F}_q)$ 中的一条线. 由于 $\tau(S(0,m-2))=S(0,m-2)$, $\widetilde{\tau}$ 将 $PG(m-1,\mathbb{F}_q)$ 中的线映到线. 根据射影几何基本定理 (见文 [11] 定理 2.23), 存在 $\sigma_0\in \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_q)$ 和 $\overline{T}\in GL_m(\mathbb{F}_q)$, 使得

$$(\widetilde{\tau}(\alpha))^{\sigma_0}\overline{T}=\alpha,\quad \forall\,\alpha\in PG(m-1,\mathbb{F}_q).$$

对任意 $X\in V(\Gamma)$, 令 $\tau_1(X)=X^{\sigma_0}T$, 其中

$$T=\begin{cases}\mathrm{diag}((\overline{T}^{-1})^t,\overline{T},I^{(\nu-m)},I^{(\nu-m)},I^{(\delta)}), & \text{如果 } \delta=0 \text{ 或 } 1,\\ \mathrm{diag}((\overline{T}^{-1})^t,\overline{T},I^{(\nu-m)},I^{(\nu-m)},C^{(2)}), & \text{如果 } \delta=2,\end{cases}$$

这里 C 满足 $C\Delta C^t=\Delta^{\sigma_0}$. 则易看出 $\tau_1\tau$, 使得每一个集合 $\Gamma(i,\eta)$ 以及 M 点不动.

(2) 存在 $T\in O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$, 使得 $\tau_T\pi_1(N_i)=N_i$ $(1\le i\le m)$, 同时 $\tau_T\pi_1$ 固定点 M 以及每一个连通分支 $\Gamma(i,\eta)$, 其中 $\pi_1=\tau_1\tau$.

由 (1) 可知 $\pi_1(\Gamma(i,0))=\Gamma(i,0)$, 因此 (2) 可由引理 5.4 直接得到.

(3) 设 $\mathfrak{E}=\{M\}\cup\Gamma(1,0)\cup\overline{\Gamma(1,0)}$, 则存在 $\tau_2\in G^*$, 使得 $\tau_2\pi_2$ 固定 $\mathfrak{E}$ 中的每一个点, 且对某个 $\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_q)$, 有 $\tau_2\pi_2(\Gamma(i,\eta))=\Gamma(i,\eta^\sigma)$, 其中 $\pi_2=\tau_T\pi_1$.

由定理 5.2, $\mathfrak{E}$ 同构于正交图 $O(2(\nu-m+1)+\delta,q)$. 根据文 [5, 定理 3.3, 3.4 和 3.5], 存在 $\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_q)$ 和 $T_0\in GL_{2(\nu-m+1)+\delta}(\mathbb{F}_q)$, 使得

$$\varphi(\pi_2(X))^{\sigma}T_0=\varphi(X),\quad \forall\,X\in\mathfrak{E},$$

其中 T_0 满足 $T_0S'{T_0}^t=(S')^\sigma$, 这里 S' 如 (5.1) 所示, φ 是定理 5.2 证明中所定义的映射. 由于 π_2, 使得 M 和 N_1 均不动, 易知 τ 在 $\varphi(\mathfrak{E})$ 上的限制, 使得 $\varphi(M)$ 和 $\varphi(N_1)$ 也不动. 因此 T_0 具有形式 $\mathrm{diag}(I^{(2)},B^{(2(\nu-m)+\delta)})$. 令 $T=\mathrm{diag}(I^{(m)},I^{(m)},B)$, 以及 $\tau_2(X)=X^\sigma T$, $\forall\,X\in V(\Gamma)$, 则容易验证 (3) 成立.

(4) 令 $\pi_3=\tau_2\pi_2$, 则 π_3 使得集合 $\Gamma(i,0)\cup\overline{\Gamma(i,0)}\cup\Gamma(1,e_i)\cup\overline{\Gamma(1,e_i)}$ 中的每一个点均不动, 其中

$$e_i=(\overset{i-2}{0}\quad \overset{1}{1}\quad \overset{m-i}{0}),\quad 2\le i\le m.$$

不难看出在 $S(2,m-2)$ 中与 $\Gamma(1,0)$ 和 $\Gamma(i,0)$ 均有邻接点的集合仅有 $\Gamma(1,i;0)$. 由于集合 $\Gamma(1,0)$ 和 $\Gamma(i,0)$ 均不动, $\pi_3(\Gamma(1,i;0))=\Gamma(1,i;0)$. 任选 $\Gamma(1,0)$ 中的两点 P_1,P_2 如下

$$P_j=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc}1 & m-1 & 1 & m-1 & \nu-m & \nu-m & \delta\end{array}\\ \begin{pmatrix}a_j & 0 & 1 & 0 & \alpha_j & \beta_j & \gamma_j\\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{array},\quad j=1,2.$$

令 $S_1=\{X\in\Gamma(1,i;0)\,|\,X\sim P_1, X\sim N_i\}$, 则通过计算可得

$$S_1=\left\{\begin{pmatrix}a_1 & 0 & y & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ -y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & I^{(i-2)} & 0 & 0 & 0 & 0^{(i-2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & I^{(m-i)} & 0 & 0 & 0 & 0^{(m-i)} & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right\},$$

其中 $y\in\mathbb{F}_q$. 容易看出 S_1 中有 q 个点. 由于 P_1 和 N_i 均不动, $\pi_3(S_1)=S_1$. 由 (3) 知

$\pi_3(\Gamma(1,e_i))=\Gamma(1,e_i)$. 不难证明在 $\Gamma(1,e_i)$ 中与 S_1 中每一个点均邻接的点只有一个, 为

$$P_{e_i}=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 1 & e_i & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ -e_i{}^t & I^{(m-1)} & 0 & 0^{(m-1)} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 $\Gamma(1,0)$ 中的每一个点以及 N_i 不动, 所以 $\Gamma(1,e_i)$ 中的每一个点也被固定下来. 显然, $\{M\}\cup\Gamma(1,e_i)\cup\overline{\Gamma(1,e_i)}$ 是一个极大集, 且对 $\overline{\Gamma(1,e_i)}$ 中的每一个点 X_0, 在 $\Gamma(1,e_i)$ 中有 $q^{2(\nu-m)-1+\delta}(q-1)$ 点与之相邻, 这些点被 X_0 唯一确定. 因此 π_3 使得 $\overline{\Gamma(1,e_i)}$ 中的每一个点均不动. 令 $S_2=\{X\in\Gamma(1,i;0)\,|\,X\sim P_2$ 且 $X\sim P_{e_i}\}$, 则

$$S_2=\left\{\begin{pmatrix} a_2 & 0 & c_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ t & 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \alpha_1-\alpha_2 & \beta_1-\beta_2 & \gamma_1-\gamma_2 \\ 0 & I^{(i-2)} & 0 & 0 & 0 & 0^{(i-2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I^{(m-i)} & 0 & 0 & 0 & 0^{(m-i)} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\},$$

其中 $t=a_1-a_2-c_1-c_2$, $c_1,c_2\in\mathbb{F}_q$, $2c_2+2(\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)^T+(\gamma_1-\gamma_2)\Delta(\gamma_1-\gamma_2)^T=0$. 因此在 S_2 中有 q 个点, 且 $\pi_3(S_2)=S_2$. 进一步可以证明在 $\Gamma(i,0)$ 中与 S_2 的每一个点均邻接的点仅有一个, 为

$$P_{(i,0)}=\begin{pmatrix} 0 & c_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & \alpha_1-\alpha_2 & \beta_1-\beta_2 & \gamma_1-\gamma_2 \\ I^{(i-1)} & 0 & 0 & 0^{(i-1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I^{(m-i)} & 0 & 0 & 0^{(m-i)} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 P_1 和 P_2 是 $\Gamma(1,0)$ 中的任意两点, $\Gamma(i,0)$ 中的每一个点被固定下来. 与固定 $\overline{\Gamma(1,e_i)}$ 的每一个点类似, $\overline{\Gamma(i,0)}$ 中的每一个点同时也被固定下来.

(5) $\pi_3(X)=X$, $\forall\, X\in\Gamma(1,i;0)$.

对任意

$$X=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} 1 & i-2 & 1 & m-i & 1 & i-2 & 1 & m-i & \nu-m & \nu-m & \delta \end{array} \\ \begin{pmatrix} b_1 & 0 & c_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ b_2 & 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\in\Gamma(1,i;0),$$

我们可以找到以下三个顶点

$$Q_1=\begin{pmatrix} b_1 & 0 & 1 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & I^{(m-1)} & 0 & 0^{(m-1)} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\in\Gamma(1,0),$$

$$Q_2=\begin{pmatrix} 0 & c_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ I^{(i-1)} & 0 & 0 & 0^{(i-1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I^{(m-i)} & 0 & 0 & 0^{(m-i)} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\in\Gamma(i,0),$$

$$Q_3=\begin{pmatrix} s & 0 & 1 & e_i & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ -e_i^t & I^{(m-1)} & 0 & 0^{(m-1)} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\in\Gamma(1,e_i),$$

其中, $s=b_1+b_2+c_1+c_2$, $(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3)=(\alpha_1+\alpha_2,\beta_1+\beta_2,\gamma_1+\gamma_2)$, 使得 $\{X,Q_1,Q_2,Q_3\}$ 是 $\mathscr{H}_2$ 中的一个拟四面体. 由于每一个顶点 Q_i $(i=1,2,3)$ 是固定的, 我们有 $\pi_3(X)=X$, 对任意 $X\in\Gamma(1,i;0)$.

(6) 在 (3) 中的 σ 是 $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_q)$ 的恒等自同构.

令

$$S_3=\left\{\begin{pmatrix}0&0&c&0&1&0&0&0&0&0&0\\-c&0&0&0&0&0&1&0&\alpha_1&\beta_1&\gamma_1\\0&I^{(i-2)}&0&0&0&0^{(i-2)}&0&0&0&0&0\\0&0&0&I^{(m-i)}&0&0&0&0^{(m-i)}&0&0&0\end{pmatrix}\right\}\subseteq\Gamma(1,i;0),$$

$$S_4=\left\{\begin{pmatrix}0&0&c&0&1&0&0&0&b\alpha_1&b\beta_1&b\gamma_1\\-c&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&I^{(i-2)}&0&0&0&0^{(i-2)}&0&0&0&0&0\\0&0&0&I^{(m-i)}&0&0&0&0^{(m-i)}&0&0&0\end{pmatrix}\right\}\subseteq\Gamma(1,i;0),$$

$S_k=\{X\in\Gamma(1,be_i)\mid$ 存在 $P\in S_{k-2}$, 使得 $X\sim P\}$, $\;k=5,6$,

$S_k'=\{X\in\Gamma(1,b^\sigma e_i)\mid$ 存在 $P\in S_{k-2}$, 使得 $X\sim P\}$, $\;k=5,6$.

计算可得

$$S_5=S_6=\left\{\begin{pmatrix}0&0&1&be_i&b\alpha_1&b\beta_1&b\gamma_1\\-b{e_i}^t&I^{(m-1)}&0&0^{(m-1)}&0&0&0\end{pmatrix}\right\},$$

$$S_5'=\left\{\begin{pmatrix}0&0&1&b^\sigma e_i&b^\sigma\alpha_1&b^\sigma\beta_1&b^\sigma\gamma_1\\-b^\sigma{e_i}^t&I^{(m-1)}&0&0^{(m-1)}&0&0&0\end{pmatrix}\right\},$$

$$S_6'=\left\{\begin{pmatrix}0&0&1&b^\sigma e_i&b\alpha_1&b\beta_1&b\gamma_1\\-b^\sigma{e_i}^t&I^{(m-1)}&0&0^{(m-1)}&0&0&0\end{pmatrix}\right\}.$$

分别由 (3) 和 (5) 可知 $\pi_3(\Gamma(1,be_i))=\Gamma(1,b^\sigma e_i)$, 以及 $\Gamma(1,i;0)$ 中的每一个点被固定, 因此有 $\pi_3(S_5)=S_5'$, $\pi_3(S_6)=S_6'$. 而由 $S_5=S_6$ 可得 $S_5'=S_6'$, 从而 $b^\sigma=b$, 对所有的 $b\in\mathbb{F}_q$. 这就证明了 σ 是 $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_q)$ 的恒等自同构.

(7) $\pi_3(X)=X$, $\forall\, X\in\Gamma(i,\eta)\cup\overline{\Gamma(i,\eta)}$.

对 η 中非零分量的个数 t 用数学归纳法进行证明. 当 $t=0$ 时, 我们在 (4) 中已经证明了对任意 $X\in\Gamma(i,0)\cup\overline{\Gamma(i,0)}$, 有 $\pi_3(X)=X$. 假设它对任意 $X\in\Gamma(i,\eta')\cup\overline{\Gamma(i,\eta')}$ 成立, 其中 η' 的非零分量的个数为 $t-1$ $(1\le t\le m-i)$. 用 $\Gamma(i,\eta')$, $\Gamma(i,j;\eta_{11},\eta_{12},0)$ 和 N_j 分别代替 (4) 中的 $\Gamma(1,0)$, $\Gamma(1,i;0)$ 和 N_i, 其中

$$P=(\overset{j-i-1}{\eta_{11}}\quad\overset{1}{0}\quad\overset{m-j}{\eta_{12}})=\eta',$$

重复 (4) 中固定 $\Gamma(1,e_i)$ 的每一个点的过程, 可以证明 $\pi_3(X)=X$, 对任意 $X\in\Gamma(i,\eta)$, 其中 η 中非零分量的个数是 t. 从而, $\overline{\Gamma(i,\eta)}$ 中的每一个点也被固定了下来.

(8) $\pi_3(X)=X$, $\forall\, X\in S(r,t)$, 其中 $r+t=m$.

利用拟四面体的性质, 我们对 $X\in S(r,t)$ 与 M 的距离作数学归纳. 由推论 3.6, 对任意 $X\in S(r,t)$, $\partial(X,M)=r$. 当 $r=1$ 时, 由以上步骤可知该断言成立. 假设该断言对 $r=k-1$ $(k\le m)$ 成立. 对于 $S(k,m-k)$ 中一点

$$P=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc}k&m-k&k&m-k&\nu-m&\nu-m&\delta\end{array}\\\begin{pmatrix}0&0&I&0&0&0&0\\0&I&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\end{array},$$

存在

$$T_1 = \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}, I^{(\nu-m)}, I^{(\nu-m)}, I^{(\delta)} \right) \in O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q),$$

其中

$$A = \mathrm{diag}(1, 1, 0^{(k-2)}, I^{(m-k)}),$$
$$B = \mathrm{diag}(0, 0, I^{(k-2)}, 0^{(m-k)}),$$

使得 $RT_1 = P$, $MT_1 \in S(k-2, m-k+2)$, 且 N_1T_1, N_2T_1 和 LT_1 均属于 $S(k-1, m-k+1)$. 由于 $\{M, N_1, N_2, L\}$ 是 $\mathscr{H}_2$ 中的一个拟四面体, 由归纳假设可得 $\pi_3(P) = P$. 对于任意 $X \in S(k, m-k)$, 由定理 5.5 存在 $T_2 \in O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q)$, 使得 $PT_2 = X$, $MT_1T_2 \in S(k-2, m-k+2)$ 以及 $N_1T_1T_2$, $N_2T_1T_2$, LT_1T_2 都在 $S(k-1, m-k+1)$ 中. 因此, 对任意 $X \in S(k, m-k)$, 有 $\pi_3(X) = X$.

(9) $\pi_3(X) = X$, $\forall\, X \in S(r, t)$, 其中 $r + t < m$.

利用极大集的性质, 对 $X \in S(r, t)$ 与 M 的距离作数学归纳. 当 $2m - 2t - r = 2$ 时, 我们在 (2)–(7) 已经证明了该断言对 $X \in S(0, m-1)$ 成立. 假设当 $2m - 2t - r = k - 1$ 时成立, 其中 $3 < k \leq d$, d 是 Γ 的直径. 现在证明当 $2m - 2t - r = k$ 时结论成立. 对于极大集 $\mathfrak{C} = \{M\} \cup \Gamma(1,0) \cup \overline{\Gamma(1,0)}$ 中的一点

$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & m-1 & m & 1 & \nu-m-1 & \nu-m & \delta \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I^{(m-1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \in \overline{\Gamma(1,0)},$$

存在

$$T_1 = \begin{pmatrix} A & B & C & 0 & 0 \\ B & A & 0 & C & 0 \\ D & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I^{(\delta)} \end{pmatrix} \in O_{2\nu+\delta}(\mathbb{F}_q),$$

其中

$$A = \mathrm{diag}(1, 0^{(r)}, I^{(t)}, 0^{(m-r-t-1)}),$$
$$B = \mathrm{diag}(0, I^{(r)}, 0^{(t)}, 0^{(m-r-t-1)}),$$
$$C = \mathrm{diag}(0^{(r+t+1)\times(\nu-k-t+1)}, I^{(m-r-t-1)}),$$
$$D = \mathrm{diag}(0^{(\nu-k-t+1)\times(r+t+1)}, I^{(m-r-t-1)}),$$
$$E = \mathrm{diag}(I^{(\nu-k-t+1)}, 0^{(m-r-t-1)}),$$

使得 $QT_1 \in S(r, t)$, $MT_1 \in S(r, t+1)$. 此外, 容易验证对任意 $Y \in \Gamma(1, 0)$, 有 $YT_1 \in S(r+1, t)$, 这就推出

$$\pi_3(QT_1) = QT_1.$$

由定理 5.2 及归纳假设, 我们可验证对任意 $X \in S(r, t)$, 有

$$\pi_3(X) = X.$$

通过以上步骤, 证明了 π_3 固定 $V(\Gamma)$ 中的每一个点. 因此对任意 $\tau \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$, 有 $\tau \in G^*$. 定理证毕.

参 考 文 献

[1] Biggs N., Algebraic Graph Theory, 2nd ed, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[2] Brouwer A., Cohen A., Neumaier A., Distance-Regular Graphs, Springer-Verlag, New York, 1989.

[3] Godsil C. D., Royle G. F., Algebraic Graph Theory, Grad. Texts in Math., Vol. 207, Springer, 2001.

[4] Godsil C. D., Royle G. F., Chromatic number and the 2-rank of a graph, *J. Combin. Theory Ser. B.*, 2001, **81**: 142–149.

[5] Gu Z., Wan Z., Orthogonal graphs of odd characteristic and their automorphisms, *Finite Fields Appl.*, 2008, **14**: 291–313.

[6] Hua L., Wan Z., Classical Groups, Shanghai Science and Technology Press, 1963 (in Chinese).

[7] Hubaut X. L., Strongly regular graphs, *Discrete Math.*, 1975, **13**: 357–381.

[8] Li F., Wang Y., Subconstituents of symplectic graphs, *European J. Combin.*, 2008, **29**: 1092–1103.

[9] Tang Z., Wan Z., Symplectic graphs and their automorphisims, *European J. Combin.*, 2006, **27**: 38–50.

[10] Wan Z., Geometry of Classical Groups over Finite Fields, Science Press, Beijing, New York, 2002.

[11] Wan Z., Geometry of Matrices, World Scientific, Singapore, 1996.

[12] Wan Z., Zhou K., Orthogonal graphs of characteristic 2 and their automorphisms, *Sci. China Ser. A*, 2009, **52**: 361–380.

[13] Wan Z., Zhou K., Unitary graphs and their automorphisms, *Ann. Comb.*, 2010, **14**: 367–395.

[14] Wei H., Wang Y., Suborbits of the transitive set of subspaces of type $(m, 0)$ under finite classical groups, *Algebra Colloq.*, 1996, **3**: 73–84.