



CSTAM 2012-B03-0217

压力驱动剪切流动中湍流转捩的准则

窦华书, KH00 Boo Cheong

浙江理工大学机械与自动控制学院

新加坡国立大学机械工程系

第七届全国流体力学学术会议

2012年11月12—14日 广西·桂林

压力驱动剪切流动中湍流转捩的准则

窦华书^{*, 2)}, KHOO Boo Cheong⁺

* (浙江理工大学机械与自动控制学院, 浙江杭州 310018)

+ (新加坡国立大学机械工程系, 新加坡 119260)

摘要 湍流转捩是现代流体动力学的一个重要问题。在以前的工作中, 本文作者提出了流动稳定性和湍流转捩的能量梯度理论, 这个理论的结果已取得了与许多模型实验的一致性, 这些实验模型包括 Plane Couette flow, Plane Poiseuille flow, Hagen-Poiseuille flow, Taylor-Couette flow, Boundary layer flow, Axial flow in straight annulus, 180° bend flow, Radial swirl flow, 这些结果证实了能量梯度理论的可靠性。根据此理论, 我们对剪切流动中湍流转捩的物理机理进行了深入的分析, 提出了压力驱动剪切流动中湍流转捩的准则: 湍流转捩发生的必要和充分条件是时均流动的速度剖面上存在拐点, 或 Re 数为无穷大。这个准则, 与所有找到的现有的数值模拟和实验结果都一致。然而, 需要指出, 这个准则对剪切驱动流动中的湍流转捩是无效的, 原因是由于外部能量的输入。

关键词 湍流转捩, 准则, 能量梯度, 拐点

引言

由于在基础科学和工程应用中的重要性, 湍流转捩成为现代流体动力学的一个重要问题。自 Reynolds (1883年) 对管流所开创性的著名的研究完成以来, 湍流研究有超过 120 年的历史[1]。Reynolds 对圆管流动, 通过大量实验证明当雷诺数超过一临界值时, 管内的层流会转捩为湍流。导致层流失稳并转捩成湍流的物理原理至今仍然不很清楚。Lin 对两平行板间的流动, 用数学上的渐进方法, 证明存在一个临界 Re 数, 当大于此 Re 数, 层流会失稳[2]。自此, 人们认为, 从层流到湍流的转捩可能是由于层流发生失稳引起的。然而, 湍流怎么发生仍是一个谜。Emmons 第一次通过实验, 在边界层的自然转捩中, 发现了湍流斑。他的测量数据表明湍流斑是湍流转捩的初始阶段并且是一种特有的局部现象[3]。Hof 等最近的研究表明, 湍流斑是层流速度剖面所产生的拐点而引起的局部流动特性[4]。因此, 湍流的初始产生是与拐点密切相关的。但是拐点与湍流转捩到底是什么关系, 还没有人描述。

线性稳定性理论被广泛用来研究流动的稳定性, 也被用来研究湍流转捩[5]。这种理论数学上是精确的, 但物理上针对不同的物理现象

的适用性并不清楚, 有些现象并不能用线性理论来描述。许多作者把线性稳定性分析的结果与湍流转捩的数据进行对比, 这种对比没有物理基础, 也得出不出有用的研究结果。因为湍流的转捩是非线性扰动引起的, 并不是线性扰动引起的。如果线性扰动最后不能发展为非线性扰动, 可以说线性扰动和湍流转捩并没有必然的直接关系。线性扰动只有发展到非线性扰动后, 才能导致后来的湍流转捩, 若不能导致后来的非线性扰动发展, 就不会导致湍流转捩。

利用线性理论研究最多的是边界层流动, 并与实验得到的临界 Re 数有比较接近的一致性(尽管还有较大差别), 这是因为在边界层流动中, 从线性失稳到非线性失稳的必然性所致。在边界层流动中, 可以观察到从线性扰动到非线性扰动的发展过程, 但在槽道流动和管流中, 就比较难观察到, 这里多数是旁路转捩。主要是因为在这些流动中, 线性扰动很难存在, 在实验中实现较困难。

关于湍流转捩, 除了有些经验公式外, 至今没有任何物理上的判定准则。一般认为湍流转捩是由流动失稳引起的, 但流动失稳怎么引起转捩, 一直不清楚。在实验和数值模拟中, 人们发现, 拐点的出现会导致湍流转捩。但拐点怎么引起转捩, 其物理机理也不清楚。实际

1) 基金资助项目

2) Email: huashudou@yahoo.com

上拐点出现只是在有的情况下会导致转捩，有的情况不会导致转捩，其区别和准则，也无任何研究。例如平面 Poiseuille-Couette 流动，就有拐点，但在 Re 数不是很高时也不会出现转捩。

对于无粘流动，Rayleigh(1880 年)证明无粘流动平行流失稳的必要条件是速度剖面上存在拐点[6]。这只是一个必要条件，并不是充分条件。后来 Fjørtoft(1950)又给出了进一步的必要条件[7]。到现在还没有人给出充分条件。这些研究表明对无粘平行流，有了拐点也并不一定能失稳。严格来说，一个好的物理学准则，应该是它既是必要条件，又是充分条件。Rayleigh 这样的无粘准则与粘性流动的失稳有没有直接关系还没有得到证明。

如果把粘性流动和无粘流动分别分析，再对比粘性在里面的作用，这是与流动物理相违背的。原因是，粘性流动和无粘流动分别由不同的方程和边界条件支配。对平行流动，当粘度趋于零时，粘性流动的解并不趋于无粘流动的解。另一方面，纳维-斯托克斯(Navier-Stokes, 简称为 NS)方程是非线性的，其稳定性是不能由其中的各部分的稳定性来迭加的。也就是说，两个稳定的流动，迭加后可能是不稳定的，反之亦然。

综上所述，湍流转捩还没有任何准则。实验中发现的拐点导致湍流转捩，还没有合理的解释。况且许多情况下有拐点并不导致转捩。而从无粘准则来推论粘性流动中的稳定性显然是错误的。

最近，本文作者提出了一个新的流动失稳和湍流转捩的分析方法，即能量梯度理论。在管流，通道流动和平面库埃特流动中，对湍流转捩的临界条件，此方法得到了与实验数据的很好的一致性[8-12]。

本文利用本文作者提出的能量梯度理论来研究湍流的转捩。对于粘性流动，研究平行流转捩的条件。我们发现，拐点导致湍流转捩，只在压力驱动流中有效，在剪切驱动流中无效。这样的发现主要是由于湍流转捩是能量发展过程这一基本现象。进而提出了压力驱动剪切流中湍流转捩的准则。这一准则与所有能收集到的实验数据完全一致。

1 能量梯度理论

本文作者提出了一个新的方法，目的是阐明壁面剪切流动从层流到湍流转捩的现象[8-12]。在该模型中，整个流场被视为一个能量场，发现总机械能在流动的横向方向的梯度和总机械能在流向的粘性摩擦损失决定了不稳定现象，因此建议，对于一个给定有限扰动的流动，能量梯度在横向方向有潜力放大速度扰动，而粘性摩擦损失在流向的大小可以抵抗和吸收速度扰动。流动不稳定或转捩到湍流取决于能量梯度放大和粘滞阻尼对初始扰动的相对大小。能量梯度理论对 Plane Poiseuille flow, Pipe Poiseuille flow 和 Plane Couette flow 的临界条件的分析已取得了与实验一致的结论。我们曾进行了详细和严格的推导,从物理角度给了这种方法一个坚实的基础，并解释了近现代实验结果与文献中的雷诺数[8-12]。在这里，我们给一个简短的介绍，以便更好地了解这项工作在本文章中的应用。

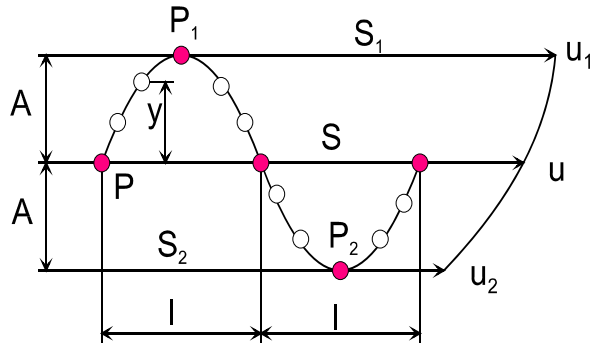


图 1 平行流中扰动粒子作周期振动的模型

如图 1, 对于一个给定的基本流，如果流体粒子受到扰动，它可能在流动方向的法向发生振荡。运动过程中，流体粒子可以通过与其它干扰获得机械能(ΔE)，同时由于流体沿流线方向的粘性摩擦，这种粒子可能有机械能损失(ΔH)。分析表明， ΔE 和 ΔH 确定流体粒子的稳定性。对于平行流动，通过干扰获得的机械能和由于粘性摩擦造成的机械能损失的总的相对大小决定扰动放大或衰减。因此，对于给定的基本流动，稳定性判据(以半个周期来描述)，可以写为：

$$F = \frac{\Delta E}{\Delta H} = \left(\frac{\partial E}{\partial n} \frac{2A}{\pi} \right) / \left(\frac{\partial H}{\partial s} \frac{\pi}{\omega} u \right) = \frac{2}{\pi^2} K \frac{A\omega}{u} = \frac{2}{\pi^2} K \frac{v'_m}{u} < Const \quad (1)$$

其中

$$K = \frac{\partial E / \partial n}{\partial H / \partial s} \quad (2)$$

在这里, F 是一个标量, 它表示在半周期内流体粒子总的机械能的增加和由于粘性引起的总机械能损失的比。 K 是一个无因次变量, 为坐标的函数, 它表示基本流动中横向的能量梯度和沿流线方向的能量损失的比。 E ($E = p + 0.5\rho V^2$) 是每单位体积流体的总机械能, s 是沿流向的方向, n 是沿横向方向。 H 是每单位体积流体沿流线方向的损失的总机械能。此外, ρ 是流体密度, u 是主流流向速度, A 是扰动的振幅, ω 是干扰的频率, $v'_m = A\omega$ 是速度扰动的振幅。

对于给定的流动几何和流动条件, 通过 NS 方程的分析可知, 流场中 K 的值与全局 Re 数成正比。因此, 可以把 K 看作是一个当地局部 Re 数。这样, 方程(1)可以写为,

$$Re \frac{v'_m}{u} < Const \quad (3)$$

因为, 对于给定的流动, u 和 U 是存在确定的关系的, 进一步有

$$\left(\frac{v'_m}{U} \right)_c = \frac{C_1}{Re} \quad (4)$$

这里 C_1 是一个常数。

公式(4)中所表达的扰动和 Re 数的反比例关系, 与管流, 槽道流动和边界层流动实验的结果一致, 而且和用 NS 方程渐近分析得出的结果相一致(当 $Re \rightarrow \infty$)[8]。

就方程(1)和(2)来说, K 在流场中的分布和扰动的性质可能是描述流动中扰动放大或衰减的最好方式。根据这一方法, 可以发现, 对于给定的干扰, 流动不稳定首先发生在 K 最大的位置(K_{max} 处), 这被理解为最“危险”的位置。

因此, 对于一个给定的扰动, 不稳定的发生取决于这一无量纲函数 K 的大小, 临界条件是由流动中 K 的最大值 K_{max} 来确定的。对于一个给定几何形状和性质的流体, 当流场中某点 K 的最大值超过某一临界值 K_c 时, 由于有限幅度扰动的发展, 流动会出现不稳定, 见公式(1)。在早期阶段, 湍流转捩是一个局部现象。分析表明, 湍流转捩是由于基本流动的能量梯度和扰动的放大, 而不仅仅是线性特征值的不稳定性。在线性稳定性分析中, 线性方程的特征值不稳定要求扰动是无穷小。事实上, 在 Hof 等人最近的详细的实验中, 将注射流体作为一种扰动源, 发现层流在有限 Re 内转捩需要有限扰动。我们的研究表明, 湍流转捩的扰动振幅随 Re 的 -1 次方变化, 即公式(4), 这与 Hof 等人和 Lemoult 等人实验数据吻合, 见[8-12,15]。

我们的研究表明, 用能量梯度理论得到的结论与在 Plane Poiseuille flow, Pipe Poiseuille flow 和 Plane Couette flow 实验条件下得到的转捩条件是一致的(见表 1 和图 2)。从表中可以推断, 对于 Plane Poiseuille flow 和 Pipe Poiseuille flow, 湍流转捩发生在临界值 K_c 在 385 左右, 对于 Plane Couette flow, 临界值 K_c 在 370 左右。这表明, 平行流湍流转捩可能发生在临界值 $K_c \approx 370-385$ 。这些发现进一步表明: 流动不稳定性可能是在有限扰动下流场能量变化的结果, 而不是线性方程不稳定的特征值引起的。由线性稳定性分析得到的转捩临界条件和对三种不同类型的流动进行实验得到的数据不一致, 如表 1 所示。对于平面泊肃叶流, 由于在文献中发现 Re 定义不同, 这里给出了两个雷诺数定义。能量梯度方法应用于同心旋转圆柱间的泰勒-库埃特流动也是有效的[11]。

表 1 平面流、管泊肃叶流以及平面剪切流的临界雷诺数和能量梯度参数比较。 u 是平均速度, u_0 是在通道中间平面的速度, D 是管道直径, h 是平面泊肃叶流 ($L=2h$) 和平面剪切流通道宽度的一半。

Flow type	Re expression	Eigenvalue analysis, Re_c	Energy method Re_c	Exp. Re_c	K_{max} at Re_c (from exp.), $\equiv K_c$
Pipe Poiseuille	$Re = \rho U D / \mu$	Stable for all Re	81.5	2000	385
Plane Poiseuille	$Re = \rho U L / \mu$	7696	68.7	1350	389
	$Re = \rho u_0 h / \mu$	5772	49.6	1012	389
Plane Couette	$Re = \rho U h / \mu$	Stable for all Re	20.7	370	370

对于平面泊肃叶流，在 $K_{max} > K_c$ 的位置应该说是转捩最危险的位置，这已经在 1975 年被 Nishioka 等人通过实验证明[13]。Nishioka 等人的实验(1975 年)详细地显示了平面泊肃叶流转捩(见图 3)。测得的瞬时速度分布表明，最先的速度的振荡出现在 $y/h=0.50-0.62$ 。我们的能量梯度法表明，最先的转捩发生 $y/h=0.58$ ，这与实验是一致的。

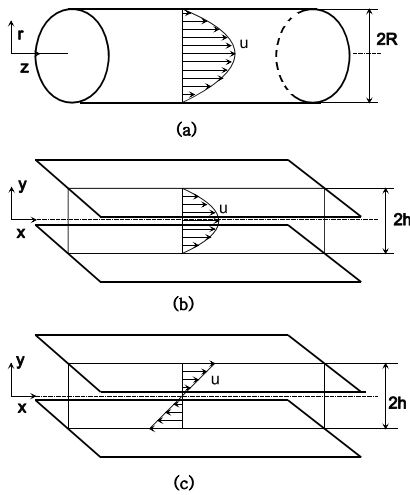


图 2 平行流动(a) Pipe Poiseuille flow; (b) Plane Poiseuille flow; (c) Plane Couette flow.

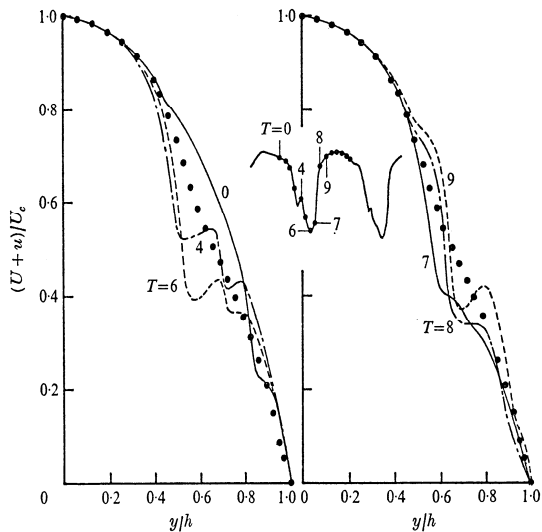


图 3 平面 Poiseuille 流动的实验结果
(Nishioka et al, 1975)

对于管流，2008 年，Nishi 等人做的一次实验中表明，速度剖面的振荡第一次发生在

$r/R=0.53-0.73$ 处[14]，这与基于能量梯度法得出的 $r/R=0.58$ 是最危险的位置的结论相一致(见图 4)。

应该指出，虽然能量梯度法不是直接从纳维-斯托克斯(Navier-Stokes)方程得出的，但它与 NS 方程是不矛盾的。由于能量梯度法和 NS 方程都是基于牛顿第二定律的，它们可以相互兼容。

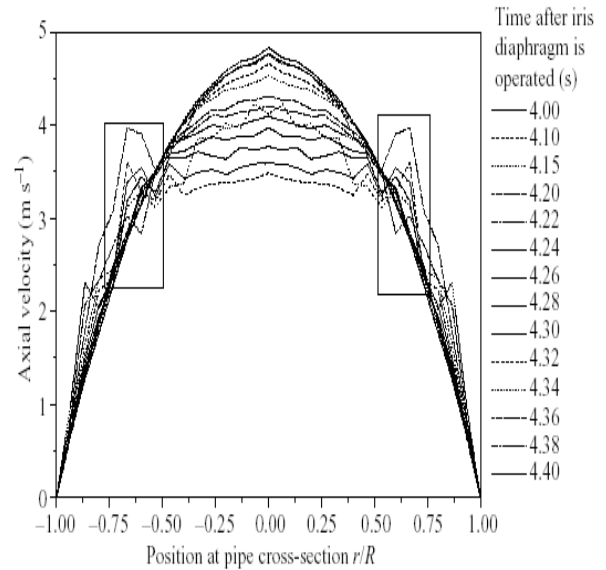


图 4 Pipe Poiseuille 流动的实验结果, $Re=2450$
(Nishi et al, 2008)

2 必要和充分条件

根据稳定性判据公式(1)，可以看出，流动的稳定性 and 转捩取决于基本流动分布和扰动。在实际的湍流转捩过程中，由于扰动是非线性的，在扰动和平均流的干扰过程中，平均速度剖面被不断修正[13-17]。到后来平均流动的剖面远不同于初始的基本流动剖面(如图 4)。因此，在转捩过程中，公式(1)中的基本流动应用平均流动来代替。这样，公式(1)中所有的基本流动参数都用平均流动参数来表示，判据可改写为：

$$F = \frac{\Delta \bar{E}}{\Delta H} = \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial n} \frac{2A}{\pi} \right) / \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial s} \frac{\pi - u}{\omega} \right) = \frac{2}{\pi^2} \bar{K} \frac{A \omega}{u}$$

$$= \frac{2}{\pi^2} \bar{K} \frac{v'_m}{u} \quad (5)$$

其中

$$\bar{K} = \frac{\partial \bar{E} / \partial n}{\partial \bar{H} / \partial s} \quad (6)$$

这里上横杠表示时间平均的量。

2.1 必要条件证明

在非线性扰动的作用下，平均流动的剖面会逐渐偏离初始的基本流动剖面[13-17]。在剖面上，最大扰动的位置会最先失稳。大家知道，对时均流动，层流和湍流的动量方程是不一样的。湍流的动量方程里多了一项湍流应力项。这样，在时间坐标上，从层流过渡到湍流，控制方程是不连续的，即存在数学上的间断或奇点。因此，湍流转捩必须经过一个奇点才能实现。那么层流怎么才能进入这个奇点，这个奇点是什么？我们认为这样的奇点应该从NS方程里去找。方程(6)是能量梯度函数，代表层流流动NS方程里的s和n方向的机械能变化之间的关系。可以这样说，K在某些点上的奇性就代表了NS方程的某些性质的奇性。若K为奇性，则(6)式的分母必须为零。利用NS方程，对压力驱动流动，能量梯度函数可写为（只考虑大小，不考虑符号）：

$$\bar{K} = \frac{\partial \bar{E} / \partial n}{\partial \bar{H} / \partial s} = \frac{\partial \bar{E} / \partial n}{\partial \bar{E} / \partial s} = \frac{\overline{\rho \mathbf{u} \boldsymbol{\omega}} + (\mu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}})_n}{\partial \bar{E} / \partial s} \quad (7)$$

这里 $\bar{\boldsymbol{\omega}} = \nabla \times \bar{\mathbf{u}}$ 是涡量矢量。

这样，由NS方程，我们有

$$\begin{aligned} \bar{K} &= \frac{\overline{\rho \mathbf{u} \boldsymbol{\omega}} + (\mu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}})_n}{(\mu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}})_s} \\ &= \frac{\overline{\rho \mathbf{u} \boldsymbol{\omega}}}{(\mu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}})_s} + \frac{(\mu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}})_n}{(\mu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}})_s} \end{aligned} \quad (8)$$

对平行流动， $(\mu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}})_n = 0$ ，可得到

$$\bar{K} = \frac{\overline{\rho \mathbf{u} \boldsymbol{\omega}}}{(\mu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}})_s} \quad (9)$$

令 $\bar{K} = \infty$ ，我们得到

$$(\mu \nabla^2 \bar{\mathbf{u}})_s = 0 \quad (10)$$

上式表示速度剖面上的一个拐点。这表明，无论对于管流还是平面 Poiseuille 流动，如果控制方程从层流到湍流有间断或奇性，必须存在拐点。因此，必要条件得到证明。

2.2 充分条件证明

在非线性扰动的作用下，当平均流动的速度剖面出现拐点时，拐点处是没有能量损失的(NS方程)。速度剖面上的拐点及能量梯度方向见图5。这里总的机械能的梯度用 ∇E 表示， $(\nabla E)_x$ 和 $(\nabla E)_y$ 表示在x和y方向的分量。 $\alpha = 90^\circ$ 表示拐点出现， $\alpha < 90^\circ$ 表示没有拐点出现。当有拐点时，根据(6)式，分母上为零，这样K在此拐点的值为无穷大。根据(5)式，此时若无因次扰动不为零，(5)式右边必为无穷大，即，

$$F = \frac{2}{\pi^2} \bar{K} \frac{v'_m}{u} = \infty \quad (11)$$

这样，流动在拐点处具有无穷大的放大扰动的能力。如果公式右边无因次扰动不为零，扰动会快速放大，流动就会很速转捩为湍流。因此，充分条件得到证明。

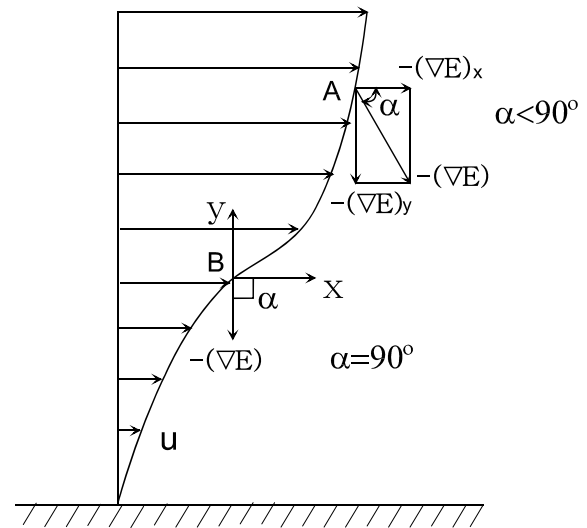


图5 速度剖面上的拐点及能量梯度的方向

拐点导致转捩这一现象，在许多实验和数值模拟中已得到验证[13-17]。其物理意义是，在拐点处，没有能量耗散，只有扰动放大。这样，当周期足够长，必然导致湍流转捩。

3 结 论

能量梯度理论是一个通用的研究流动失稳的方法,可用于平行流动和曲线流动。利用作者提出的能量梯度理论,对剪切流动中湍流转捩的物理机理进行了深入的分析,提出了压力驱动剪切流动中湍流转捩的准则:湍流转捩发生的必要和充分条件是时均流动的速度剖面上存在拐点,或Re数为无穷大。在本文中,对必要和充分条件都进行了证明。这个准则,与所有找到的现有的数值模拟和实验结果都一致。然而,需要指出,这个准则对剪切驱动流动中的湍流转捩是无效的,原因是剪切驱动流动中有外部能量输入。

致谢

作者感谢与邓学莹教授和余振苏教授进行的多次有益的讨论。

参考文献

- 1 Reynolds, O., An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels, Phil. Trans. Roy. Soc. London A, 1883, 174: 935~982
- 2 Lin, C.-C., On the Stability of Two-Dimensional Parallel Flows, PNAS, 1944, 30(10): 316~324
- 3 Emmons, H.W., The laminar-turbulent transition in a boundary layer -Part 1, J. of Aero. Sciences, 1951, 18: 490~498
- 4 Hof, B., de Lozar, A., Avila, M., Tu, X., Schneider, T.M. Eliminating Turbulence in Spatially Intermittent Flows, Science, 2010, 327(5972): 1491~1494
- 5 Drazin, P.G., and Reid, W.H., Hydrodynamic Stability, Cambridge University Press, Cambridge, 2nd Edition, 2004,
- 6 Rayleigh, L., On the stability or instability of certain fluid motions. Proc. Lond. Maths. Soc., 1880, 11: 57~70
- 7 Fjørtoft, F., Application of integral theorems in deriving criteria of stability for laminar flows and for the baroclinic circular vortex. Geofys. Publ., 1950, 17: 1~52
- 8 Dou, H.-S., Physics of flow instability and turbulent transition in shear flows, International Journal of Physical Science, 2011, 6 (6) : 1411~1425
- 9 Dou, H.-S., Viscous instability of inflectional velocity profile, Proceedings of the Forth International Conference on Fluid Mechanics, Ed. by F. Zhuang and J. Li, Tsinghua University Press & Springer-Verlag, 2004, July 20~23, Dalian, China, pp. 76~79
- 10 Dou, H.-S., Mechanism of flow instability and transition to turbulence, International Journal of Non-Linear Mechanics, 2006, 41: 512~517
11. Dou, H.-S., Khoo, B.C., and Yeo, K.S., Instability of Taylor-Couette Flow between Concentric Rotating Cylinders, Inter. J. of Thermal Science, 2008, 47(11): 1422~1435
- 12 Dou, H.-S., Khoo, B.C., Investigation of Turbulent transition in plane Couette flows Using Energy Gradient Method, Advances in Appl. Math. and Mech., 2011, 3(2): 165~180
- 13 Nishioka, M., Iida, S., and Ichikawa, Y., An experimental investigation of the stability of plane Poiseuille flow, J. Fluid Mech., 1975, 72: 731~751
- 14 Nishi, M., Unsal, B., Durst, F., and Biswas, G., Laminar-to-turbulent transition of pipe flows through puffs and slugs, J. Fluid Mech., 2008, 614: 425~C446
15. Lemoult, G., Aider, J.-L., Wesfreid, J. E., Experimental scaling law for the subcritical transition to turbulence in plane Poiseuille flow, Physical Review E, 2012, 85(2): No. 025303
- 16 Wedin, H. and Kerswell, R.R., Exact coherent structures in pipe flow: travelling wave solutions, J. Fluid Mech. 2004, 508: 333~371
- 17 王新军, 罗纪生, 周恒, 平面槽道流中层流-湍流转捩的“breakdown”过程的内在机理, 中国科学 G 辑, 2005, 35(1): 71~78

CRITERION OF TURBULENT TRANSITION IN PRESSURE DRIVEN FLOWS

DOU Hua-Shu¹ KHOO Boo Cheong²

(1 Faculty of Mechanical Engineering and Automation, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou, Zhejiang Province 310018, China)

(2 Department of Mechanical Engineering, National University of Singapore, Singapore 119260)

Abstract Turbulent transition is an important problem of modern fluid dynamics. In our previous works, the energy gradient theory was proposed and it yields very good agreement with experimental data for various test models. These include plane Couette flow, plane Poiseuille flow, pipe Poiseuille flow, Taylor-Couette flow,

boundary layer flow, axial annulus flow, 180° bend flow, radial swirl flow, etc., which confirms the reliability of the theory. Following this theory, criterion of turbulent transition is proposed for pressure driven flows: the necessary and sufficient condition for turbulent transition is the existence of an inflection point on the velocity profile of the time-averaged flow. This criterion agrees well with all the available experimental data and simulation results. However, this criterion is not suitable for shear driven flows due to the input of external energy.

Key words turbulent transition, criterion, energy gradient theory, velocity inflection