

# 拉伸载荷作用下共面表面裂纹间应力强度因子影响系数的有限元分析

徐建刚<sup>\*1</sup>, 任克亮<sup>2</sup>

(1. 西北工业大学 力学与土木建筑学院, 西安 710072; 2. 宁夏大学 物理电气信息学院, 银川 750021)

**摘要:**采用参数化有限元方法, 结合节点力法和循环迭代算法, 对一有限厚矩形板表面有两个相邻共面半椭圆表面裂纹在拉伸载荷作用下进行了求解, 得到了两裂纹在不同形状和相隔距离时的应力强度因子的影响系数, 计算结果对含三维广布裂纹结构的剩余强度和疲劳寿命有参考意义。

**关键词:**有限元方法; 应力强度因子; 裂纹影响系数  
**中图分类号:** V215.2; O346.23 **文献标识码:** A

## 1 引言

由腐蚀、疲劳等潜在因素所形成的三维广布裂纹是飞机结构中常见的损伤形式, 它不仅使结构的强度及刚度降低, 甚至影响结构的使用安全。结构表面的广布裂纹, 在外界载荷作用下存在相互影响、相互促进, 结果导致各裂纹的应力强度因子不能独立于其他裂纹而单独存在, 使得一条裂纹的扩展与其他各条裂纹的扩展同步<sup>[1]</sup>。而现行损伤容限分析所考虑的是根据长期使用经验确定的单一裂纹情况, 完全没有考虑到广布裂纹的存在, 其后果是导致结构损伤容限能力下降(体现在裂纹扩展速率增加、剩余强度降低、临界裂纹尺寸减小), 破损安全特性不复存在, 这时无无论是多途径传力结构还是止裂结构都不能提供足够的结构完整性<sup>[2]</sup>。为了定量描述广布裂纹间的影响规律, 本文选取一有限厚矩形板表面有两个共面半椭圆表面裂纹在拉伸载荷作用下为基本计算模型, 采用参数化有限元方法并结合循环迭代算法, 对两裂纹在不同形状和相隔距离时的影响系数进行求解, 结果可为工程实践中定量评估含广布裂纹结构的剩余强度提供参考。

## 2 计算模型

为了求解相邻裂纹间的影响系数, 本文选取在

拉伸载荷作用下的一块表面有两个共面半椭圆表面裂纹的有限厚矩形板为计算模型, 取尺寸较大的为主导裂纹, 较小的为从属裂纹, 两个裂纹的几何参数见图1, 模型参数: 厚度  $t = 3$  mm, 宽度  $2W = 100$  mm, 高度  $H = 120$  mm, 其中材料常数: 弹性模量为 69580 MPa, 抗拉强度为 447.86 MPa, 屈服强度为 342.02 MPa, 泊松比为 0.3。

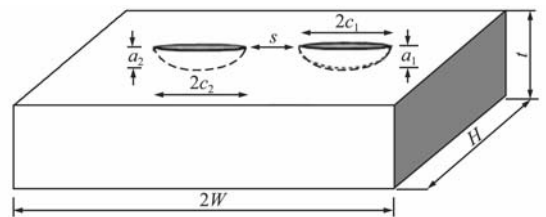


图1 相邻裂纹影响系数的计算模型  
Fig. 1 Model for computing the interaction factors

## 3 有限元分析

### 3.1 网格划分

整体结构的有限元网格包括两部分: 一部分是包含裂纹在内的两个小区域, 称为裂纹体; 另一部分是除裂纹体以外的部分, 两部分网格采用多点约束方程来联系起来。其中裂纹尖端单元采用退化的20节点等参奇异单元, 它是通过将普通20节点等参单元的某一个面退化为一号线, 该线为裂纹的前沿, 再将邻近该线的四个中间节点移动到1/4边长处, 就构成了退化20节点奇异等参元<sup>[3]</sup>。通过这种构造而成的单元, 能满足断裂力学所要求的奇异性, 适用于线弹性及弹塑性断裂力学参数的计算。在非裂纹体内采用8节点实体单元。

收稿日期: 2008-09-09; 修改稿收到日期: 2009-01-17.  
基金项目: 教育部科学技术研究重点(209136)资助项目.  
作者简介: 徐建刚\*(1963-)男, 博士, 教授  
(E-mail: xjgo@xyyou.edu.cn).

### 3.2 应力强度因子的求解

为了有效分析结构的疲劳特性,通常存在如下几种求解应力强度因子的方法:(1)交互法;(2)权函数法;(3)边界元和有限元方法等方法。在有限元法求解应力强度因子时,一般都不能直接解出,需要由有限元计算结果作进一步的推导才能最终确定  $K$  值。在用有限元结果推导应力强度因子时,采用节点力法克服了用位移法求解  $K$  时需要对各点的应力状态做出假设这一限制<sup>[4]</sup>,它是通过将半椭圆裂纹用一系列的楔形单元作分割,如图2所示。为了计算应力强度因子,需要知道沿着与裂纹前沿正交的双曲线(虚线)上的节点力,图中的阴影区的正应力可表示为

$$\sigma_y = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} + A'_1 r^{\frac{1}{2}} + A'_2 r^{\frac{3}{2}} + A'_3 r^{\frac{5}{2}} + \dots \quad (1)$$

式中  $r$  为沿裂纹外法线到裂纹边缘的距离。当楔元宽度  $t_i$  较小或当  $K$  值沿弧向变化不明显时,可以假设式(1)中  $K$  和  $A$  均为常数。阴影区内的法向力合力为

$$F_y = t_a \int_0^R \sigma_y dr, t_a = (t_i + t_{i+1})/2 \quad (2)$$

把式(1)代入式(2)作积分,则有

$$F_y = t_a \sqrt{R} \left( \frac{2K}{\sqrt{2\pi}} + A_1 R + A_2 R^2 + \dots \right) \quad (3)$$

若只取式(3)的第一项,并以表观应力强度因子  $K_{ap}$  取代  $K$ ,则有

$$F_y = \frac{2K_{ap}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{R t_a} \quad (4)$$

把由有限元分析所得沿楔单元边界上的节点力相加得

$$F_y = \sum_{j=1}^N F_j^e \quad (5)$$

式中  $F_j^e$  是  $j$  单元在  $y=0$  平面上总的节点力,  $N$  是计算节点力的总单元数,这样可求出给定  $R$  值时的  $F_y$ , 取出一系列不同的  $R$ , 则能得到相应的  $F_y$ , 根据这些  $F_y$  由式(4)求出各个  $R$  时的  $K_{ap}$ , 并对这一系列  $K_{ap} - R/a$  数据点作数据拟合,取直线与  $R/a=0$  的交点,则可得到对应点的  $K$  值。

### 3.3 应力强度影响系数计算

为了描述含多裂纹结构在外界载荷作用下的疲劳强度和疲劳特性,必须了解相邻裂纹之间的影响系数律。在求解相邻裂纹间的影响系数时,先求解结构表面只有一个裂纹在各种尺寸大小时其

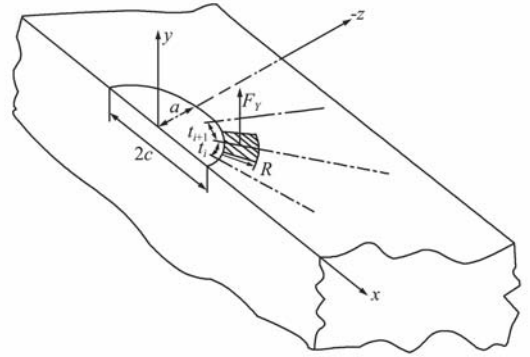


图2 裂纹面前沿楔单元节点力

Fig. 2 Discrete nodal forces along  $y=0$  plane for the wedge  $i$  前沿参考点处的应力强度因子  $K$ , 然后求解同一结构模型中存在两个大小不等裂纹在不同位置处时主导裂纹前沿对应点处的应力强度因子  $K'$ , 最后可得应力强度因子影响系数  $\beta = K'/K$ <sup>[5]</sup>。

#### 3.3.1 裂纹内点间的距离 $s$ 对 $\beta$ 的影响

为了定量分析两裂纹内点间距离  $s$  (见图1)对  $\beta$  影响,以下取主导裂纹的尺寸  $(a_1, c_1)$  和附属裂纹尺寸  $(a_2, c_2)$  保持不变,分析当  $s$  发生变化时对应主导裂纹前沿点 ( $\theta=0, \pi/2, \pi$ ) 应力强度因子影响系数  $\beta$  的变化情况,结果见表1。比较发现,当两个裂纹的尺寸不变而  $s$  逐渐减小时,对应主导裂纹前沿参考点处的应力强度因子逐渐增大,但在  $s$  逐渐增大时裂纹间的影响慢慢减弱,当  $s/(c_1+c_2)$  取值在 4~5 时,附属裂纹对主导裂纹的影响基本消失,这时二者可以认为是独立的,不存在相互影响。

表1 主导裂纹前沿参考点处应力强度影响系数随内点间距离变化

Tab. 1 Interaction factors for primary surface cracks at  $\theta=0, \theta=\pi/2, \theta=\pi$  under different interval

	$a_1/t=0.7, a_1/c_1=0.6, a_2/t=0.7, a_2/c_2=0.6, d=0$					
$s/(c_1+c_2)$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
$\beta_0$	1.61291	1.32963	1.23205	1.2004	1.17846	1.14652
$\beta_{\pi/2}$	1.29291	1.22975	1.20203	1.14965	1.11985	1.09756
$\beta_\pi$	1.20732	1.15711	1.13481	1.13234	1.13045	1.12856

#### 3.3.2 裂纹形状对 $\beta$ 的影响

前面分析了两裂纹内点间的距离  $s$  对应力强度因子的影响,实际工程中附属裂纹的形状变化对主导裂纹前沿的应力强度因子的影响也比较大,以下保持两个裂纹间的距离  $s$ 、主导裂纹的尺寸和附属裂纹的表面宽度不变,而改变附属裂纹的形状比  $a_2/c_2$ , 求解主导裂纹前沿参考点 ( $\theta=0, \pi/2, \pi$ ) 处的  $\beta$  值,结果见表2,比较发现,当附属裂纹的形状比逐渐增大时对应的主导裂纹前沿的应力强度因

子也同时增大;当  $s$  取值较大时,  $\beta$  的变化比小, 在  $s/(c_1 + c_2)$  取值为 4 ~ 5, 裂纹间的影响基本消失。

表 2 裂纹前沿参考点处应力强度影响系数随裂纹形状的变化

Tab. 2 Interaction factors for primary surface cracks at  $\theta = 0, \theta = \pi/2, \theta = \pi$  under different shape

	$a_1/t=0.7, a_1/c_1=0.6, c_2/c_1=0.3, (c_1 + c_2)/s = 0.7, d = 0$					
$a_2/c_2$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
$\beta_0$	1.03633	1.078284	1.09917	1.11748	1.19823	1.21135
$\beta_{\pi/2}$	1.00994	1.01967	1.04842	1.08746	1.10519	1.16833
$\beta_{\pi}$	1.01837	1.03027	1.03111	1.02024	1.03255	1.08274

## 4 结 论

针对复杂环境中结构表面由于腐蚀、疲劳等因素所形成的表面裂纹在疲劳载荷作用下相互影响、相互促进而加速了结构破坏这一问题, 本文采用参数化有限元方法, 同时结合循环迭代算法, 求解了相邻裂纹在不同大小和位置坐标时的应力强度因子影响系数为工程实际中定量评估含广布裂纹结构的强度有指导作用。

## Finite element solution of the interaction factors between coplanar surface cracks under tension loading

XU Jian-gang<sup>\*1</sup>, REN Ke-liang<sup>2</sup>

(1. School of Mechanics, Civil Engineering & Architecture, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;

2. School of Physics & Electrical Information Engineering, Ningxia University, Yinchuan 750021, China)

**Abstract:** In order to quantitatively describe the rules affecting adjacent cracks, a rectangular plate of finite thickness under remote tensile load with two coplanar semi-elliptical surface cracks of different geometric dimensions in close vicinity is used as a model, and a parametric finite element method along with the nodal forces method and circulatory iterative algorithm are used to calculate the interaction factors. The result provides a theoretical reference to analyze the remaining stress and fatigue span of the structure with multiple surface cracks in three dimensions.

**Key words:** finite element method; stress intensity factors; surface cracks interaction factor

## 参考文献 (References):

- [1] Leek T H, Howard I C. An examination of methods of assessing interacting surface cracks by comparison with experimental data[J]. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 1996, **68**(2):181-201.
- [2] Jones R, Molent L, Pitt S. Study of multi-site damage of fuselage lap joints[J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 1999, **32**(1):81-100.
- [3] Sethuraman R, Reddy G S S, Ilango I T. Finite element based evaluation of stress intensity factors for interactive semi-elliptical surface cracks[J]. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2003, **80**(2):843-859.
- [4] Moussa W A, Bell R, Tan C L. The interaction of two parallel non-coplanar identical surface cracks under tension and bending[J]. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 1999, **79**(3):135-145.
- [5] Murakami Y, Nemat-nasser S. Interacting dissimilar semi-elliptical surface flaws under tension and bending[J]. *Engng Fract Mech*, 1982(16):373-386.