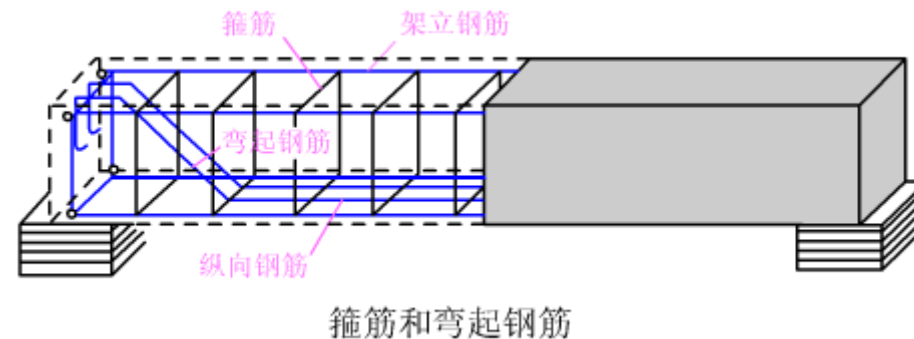


第四章 受弯构件的斜截面承载力

§ 4.1 概述

前面我们讨论是纯弯情况，其破坏是由于混凝土压应力达到强度限值引起的，破坏截面与轴线正交，即沿垂直裂缝发生正截面破坏，通常情况，除了弯矩外，还有剪力的作用，构件可能会沿斜截面发生剪切破坏，所以在设计中除了有足够的截面尺寸、纵向受拉钢筋外，还需配置一定量的抗剪腹筋，所谓腹筋它主要指垂直于梁轴线的箍筋和由纵向钢筋弯起形成的斜钢筋。



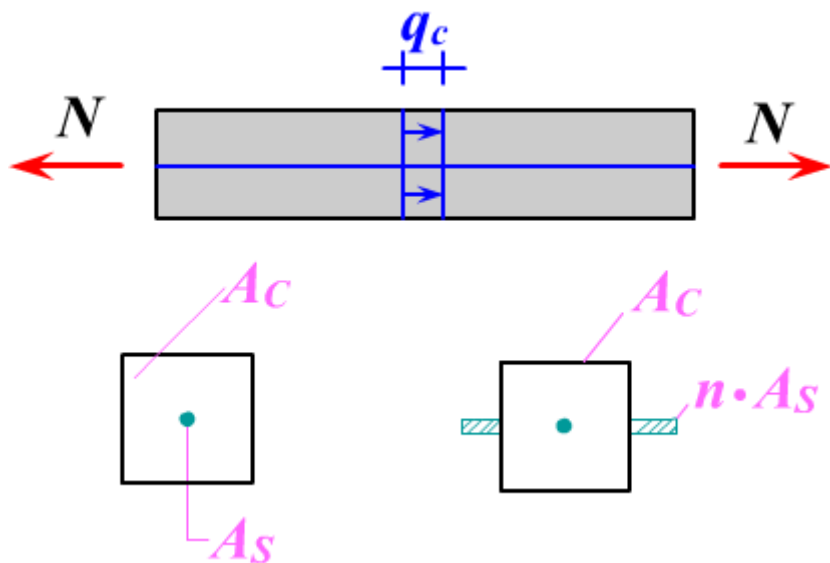
§ 4.2 斜裂缝、剪跨比及斜截面受剪破坏形态

4.2.1 斜裂缝

1. 无腹筋梁简支梁裂缝出现前的应力状态

1) 换算截面概念及计算

现考虑一钢筋混凝土轴拉杆的截面应力计算。



按材料力学:

$$\sigma_c = \sigma_s = \frac{N}{A_c + A_s} \quad (\text{错})$$

正确做法:

平截面假定:

$$e_c = e_s$$

本构关系:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_c &= E_c \mathbf{e}_c \\ \mathbf{s}_s &= E_s \mathbf{e}_s \end{aligned} \Rightarrow \frac{\mathbf{s}_s}{E_s} = \frac{\mathbf{s}_c}{E_c} \Rightarrow \mathbf{s}_s = \frac{E_s}{E_c} \mathbf{s}_c = n \cdot \mathbf{s}_c$$

弹性模量比

静力平衡:

$$\mathbf{s}_c + A_c = N \Rightarrow (A_c + n \cdot A_s) \mathbf{s}_c = N \Rightarrow \mathbf{s}_c = \frac{N}{A_c + nA_s}$$

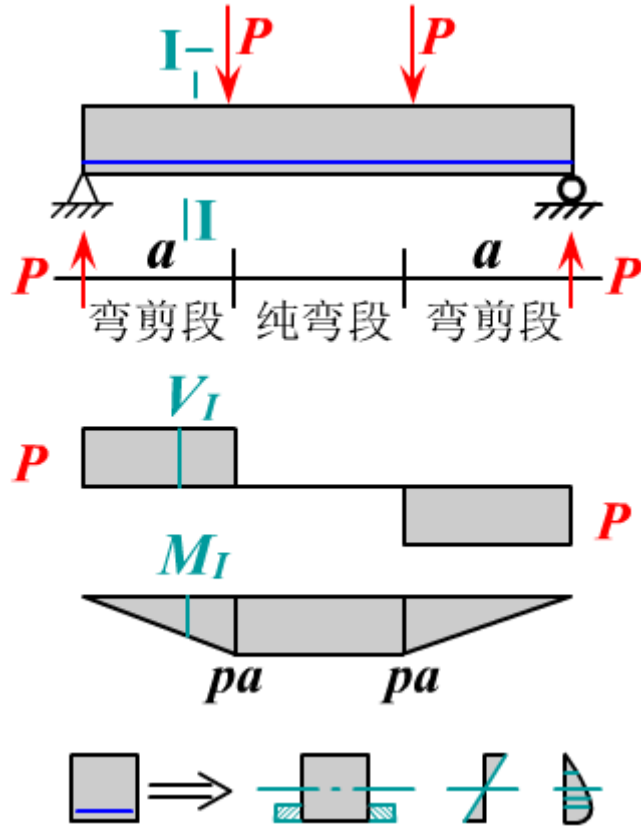
令 $A_0 = A_c + nA_s$ ——截面换算面积

$$\text{则 } \mathbf{s}_c = \frac{N}{A_0} \quad \mathbf{s}_s = n\mathbf{s}_c$$

故上式表明: 可用材料力学公式计算钢筋混凝土构件的应力, 但截面应为换算截面, 即将钢筋面积乘以弹性模量比值 n 到等效混凝土截面面积。钢筋应力等于同一位置混凝土应力 n 倍。

2) 主应力及主应力迹线

对于图示的无腹筋简支梁，利用换算截面概念可简单求得正应力及剪应力为



$$s_c = \frac{M_I y_i}{I_0} \quad t_c = \frac{V_I S_i}{I_0 b}$$

式中：

I_0 —— 换算截面的惯性矩

y_i —— 计算点至换算截面形心的距离

S_i —— 通过计算点且平行于中和轴的直线所切出的上（下）部面积对中性轴的面积矩

b —— 肋宽

任意点的应力状态可用主拉、主压应力表示

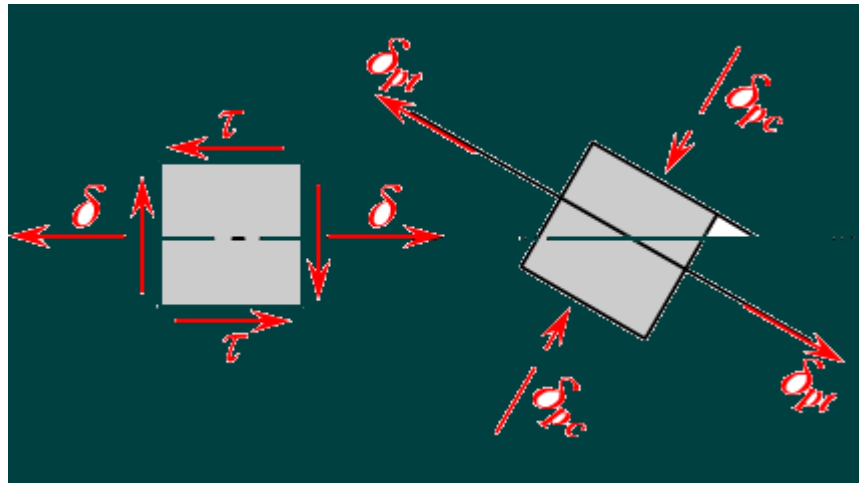
主拉应力:
$$\sigma_{pt} = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}$$

主压应力:
$$\sigma_{pc} = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}$$

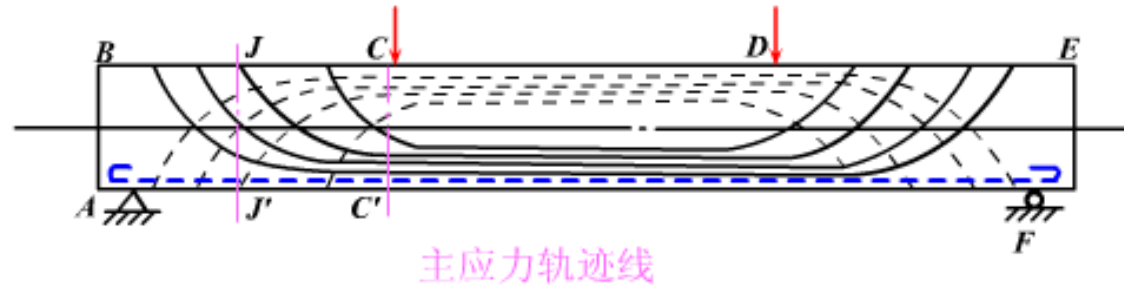
主应力的作用方向与梁纵轴的夹角



$$a = \frac{1}{2} \arctg \left(-\frac{2\tau}{\sigma} \right)$$



将各截面上主拉（压）应力作用方向连起来就得主拉（压）应力迹线。



在纯弯段因剪力为零，即为 $t = 0$ ，故主应力为正应力，主应力迹线与梁轴线平行，在弯剪段因 M, V ，故主应力方向倾斜。

梁中性轴处：

$$s = 0, t = t_{\max}$$

$$s_{pt} = t_{\max}, s_{pc} = -t_{\max}$$

$$a = \frac{1}{2} \arctg(-\infty) = \frac{p}{4} \text{ 或 } \frac{3p}{4}$$

梁下边缘处：

$$s = s_{\max}, t = 0$$

$$s_{pt} = s_{\max}, s_{pc} = 0$$

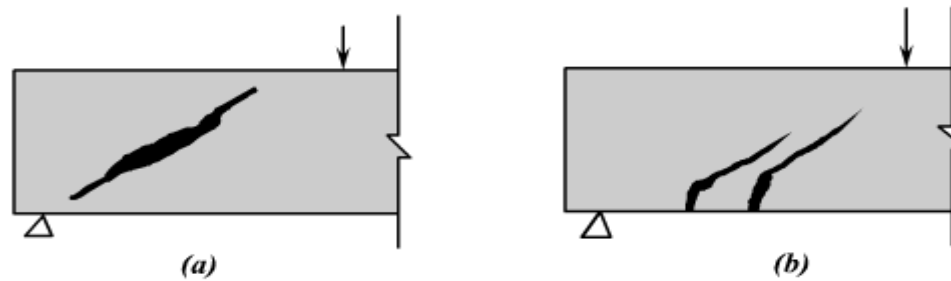
$$a = 0 \text{ 或 } p$$

2. 斜裂缝形态

材料开裂与否主要取决于主应力是否达到或超过材料强度。在纯弯段必然是下边缘首先开裂，然后不断沿伸，发生正截面破坏。在弯剪段，可能有两种情况：

情况1（在剪跨比较大情况）：

下边缘主拉应力首先达到抗拉强度，使混凝土开裂，并沿主压应力迹线沿伸，在中性轴处倾斜度为 45° ，此裂缝称为弯剪斜裂缝。



斜裂缝
(a) 腹剪斜裂缝 (b) 弯剪斜裂缝

情况2（在剪跨比较小情况）：

中性轴处主拉应力首先使混凝土开裂，方向为 45° ，并沿主压应力迹线向两端延伸，此裂缝称为腹剪斜裂缝。

4.2.2 剪跨比 λ

定义：计算截面的弯矩与剪力和截面有效高度乘积之比值，即

$$l = \frac{M}{Vh_0} \quad \text{左式称为广义剪跨比}$$

对于集中荷载：

$$M = Pa, V = P$$

$$\therefore l = \frac{Pa}{Ph_0} = \frac{a}{h_0}$$

a ——剪跨，集中荷载至支座距离

对于均布荷载：

$$l = \frac{b - b^2}{1 - 2b} \cdot \frac{L}{h_0}$$

bL ——计算截面距支座的距离

$$s = a_1 \frac{M}{bh_0}; t = a_2 \frac{V}{bh_0}$$

$$\text{故: } \frac{s}{t} = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{M}{Vh_0} = \frac{a_1}{a_2} \cdot I$$

所以, I 实质反映了正应力与剪应力的相对大小, I 愈大, 正应力愈大, 故产生弯剪斜裂缝, 反之, I 愈小, 剪应力愈大, 产生腹剪斜裂缝。

4.2.3 斜截面破坏的三种主要形态

1. 无腹筋梁的斜截面受剪

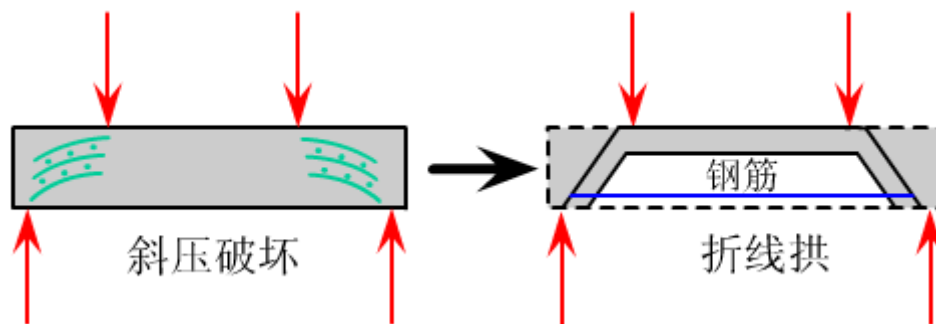
1) 斜压破坏

(1) 产生条件

梁的剪跨比或高跨比较小 ($\frac{a}{h_0} < 1, \frac{L}{h_0} < 4$)，剪应力为主。

(2) 破坏特征

在腹中出现腹剪斜裂缝，随外力不断加大产生一系列平行的斜裂缝，将梁弯剪段分成若干根倾斜的受压构件，破坏是由斜向受压构件压酥引起的，受力模型为一个以纵向钢筋为拉杆的折线拱。



2) 剪压破坏

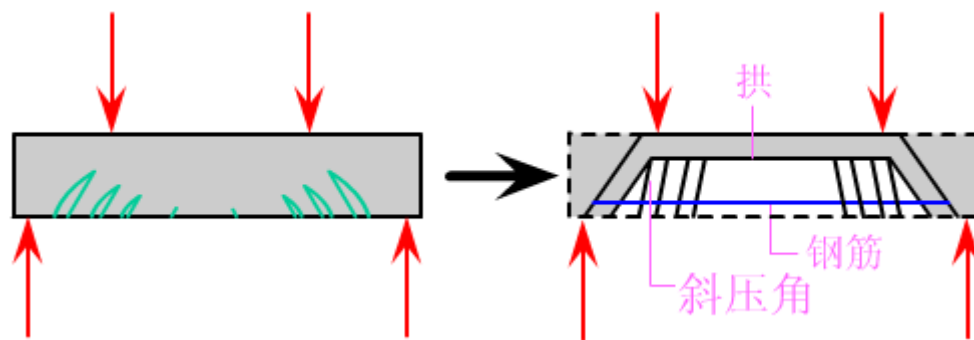
(1) 产生条件

梁的剪跨比或高跨比适中 ($1 < \frac{a}{h_0} < 3, 4 < \frac{L}{h_0} < 9$)，剪应力与正应力比较接近。

(2) 破坏特征

先产生一系列弯剪斜裂缝，其中有一条宽度较大的临界裂缝，随外力增大，临界裂缝向压区倾斜沿伸，导致剪压区减小，正应力和剪应力加大，当混凝土达到压剪受力状态时抗压强度时破坏，具有适筋梁破坏的特征，对于薄腹梁也有可能产生腹剪斜裂缝。

受力模型为一超静定桁架，其中桁架上弦为混凝土刚性拱，下弦为钢筋，斜压腹杆为裂缝间的混凝土块体，破坏是上弦拱的压坏。



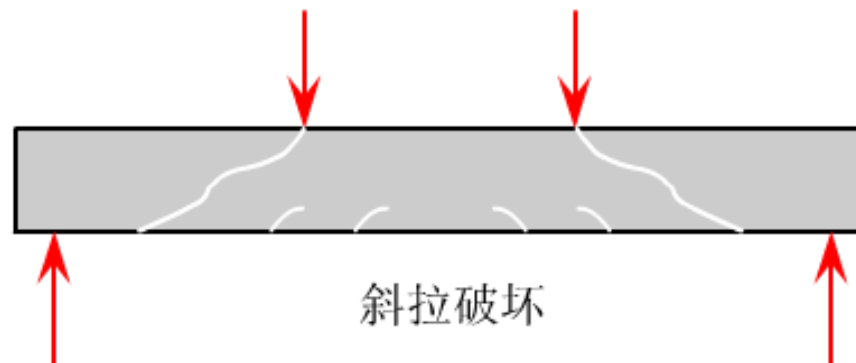
3) 斜拉破坏

(1) 产生条件

梁的剪跨比或高跨比较大 ($\frac{a}{h_0} > 3, \frac{L}{h_0} > 9$) ，正应力占主导地位。

(2) 破坏特征

首先产生弯剪斜裂缝，但该斜裂缝很快集中成一条临界裂缝，并迅速向力作用点延伸，使梁分为两部分而破坏，类似于少剪梁的破坏，因斜裂缝发展过快，无法形成上述拱结构或超静定桁架结构。破坏主要是因混凝土斜向拉裂引起的。

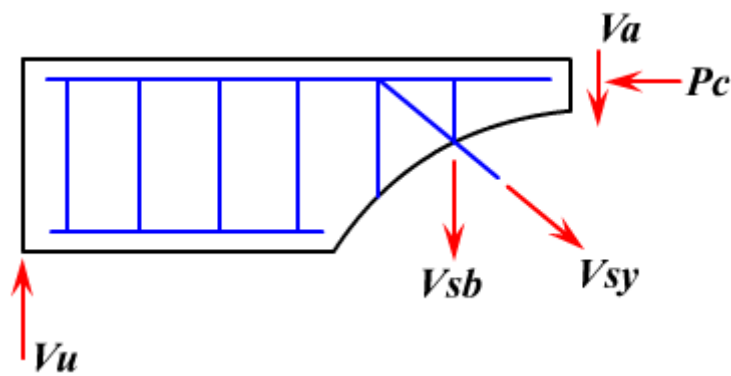


2. 有腹筋简支梁的抗剪性能

为提高抗剪能力可在梁内设置弯起钢筋和箍筋。

$$\sum Y = 0 \quad V = V_c + V_{sb} + V_{sv}$$

1) 有腹筋梁裂缝出现前后的受力状态



(1) 斜裂缝出现前

开裂前腹筋应力很小，同无腹筋梁。

(2) 斜裂缝出现后

抗剪能力明显提高，原因：

- ① 腹筋直接承担了部分剪力；
- ② 抑制斜裂缝扩展；
- ③ 提高了咬合、摩阻作用；
- ④ 延缓了沿纵筋的粘结劈裂，从而间接提高"销栓作用"。

2) 配箍量对斜截面破坏形态的影响

配箍率定义:
$$r_{sv} = \frac{nA_{sv}}{bS}$$

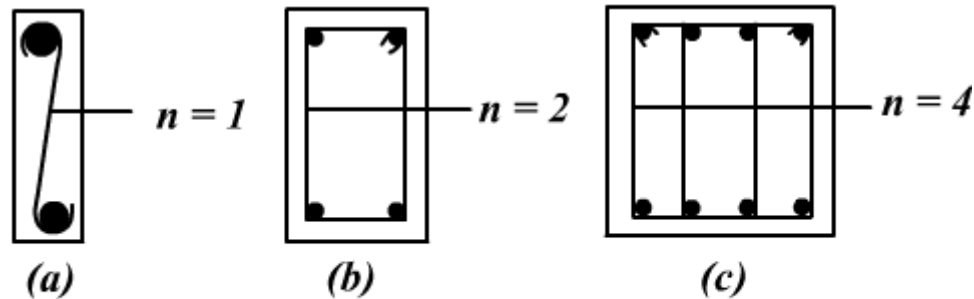
r_{sv} —— 竖向箍筋配箍率

n —— 在同一截面内箍筋的肢数

A_{sv} —— 单肢箍筋的截面面积

b —— 截面宽度

S —— 沿构件轴线方向上箍筋的间距



箍筋的肢数

(a) 单肢箍 (b) 双肢箍 (c) 四肢箍

(1) 在剪跨比适中情况

若配箍量过多，则由原无腹筋梁的剪压破坏转为斜压破坏；
若配箍量适中，剪压破坏形态不变，抗剪能力明显提高；
若配箍量过少，剪压破坏形态不变，抗剪能力略有提高。

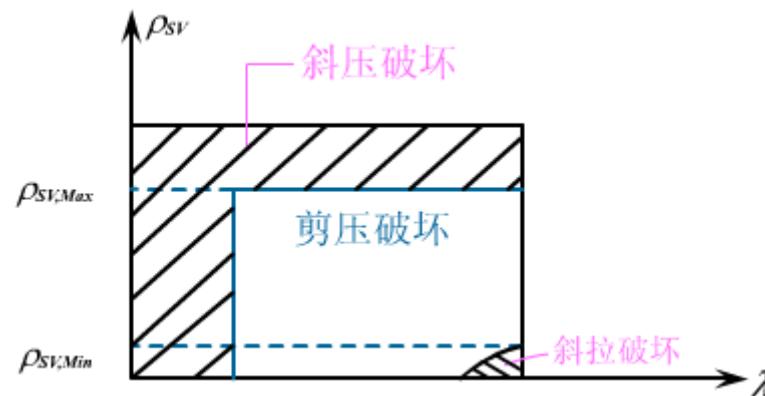
(2) 剪跨比 l 较大情况

若配箍量过少，斜拉破坏的形态不变；
若配箍量适中，由斜拉破坏转为压剪破坏；
若配箍量过多，由斜拉破坏转为斜压破坏。

(3) 剪跨比 l 较小情况

无论配箍量变化，仍为斜压破坏。

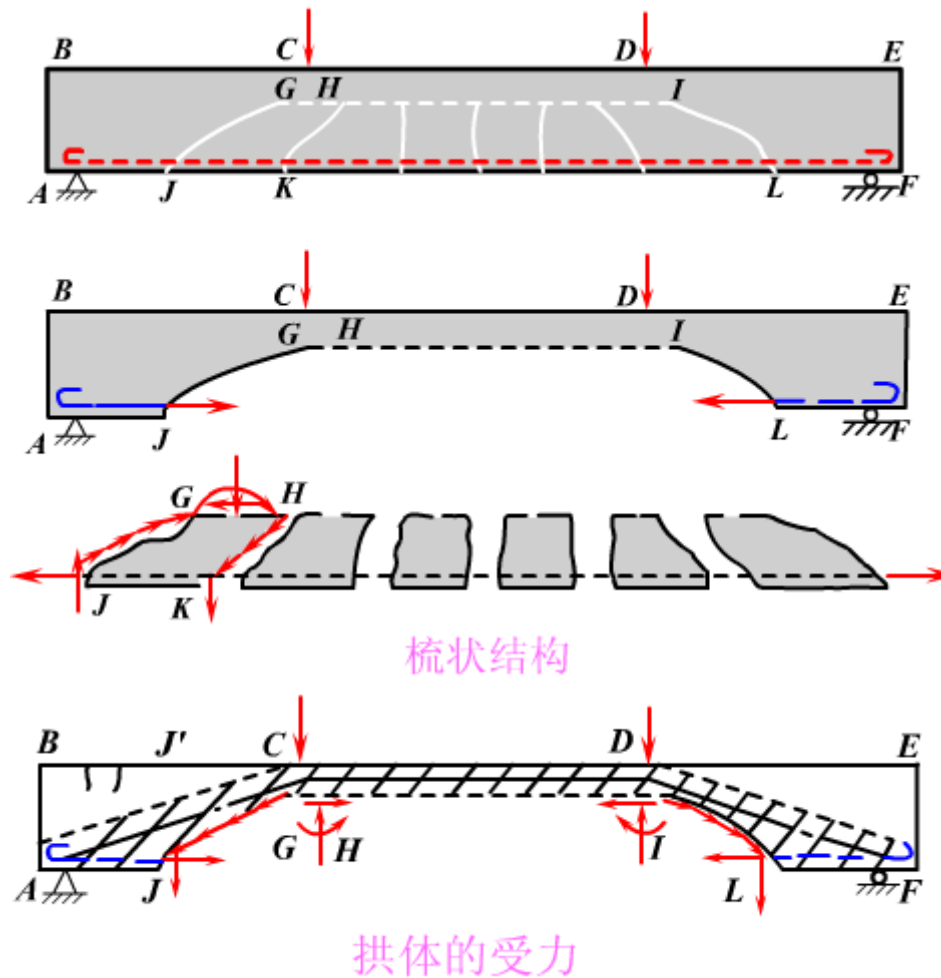
对于已知截面及材性的梁，破坏形态变化与 r_{sv}, l 之间关系为图所示。



§ 4.3 简支梁斜截面受剪机理

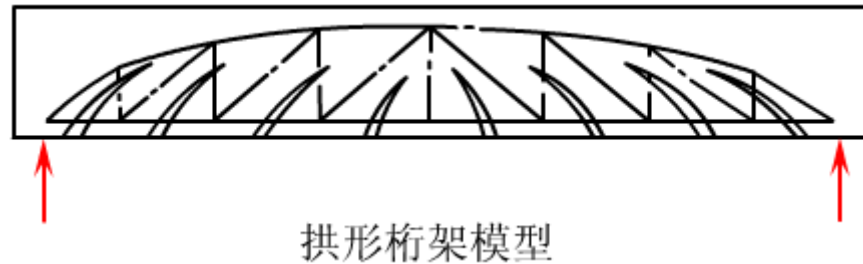
4.3.1 带拉杆的梳形拱模型

前述无腹筋梁的受剪机理可以看成拱



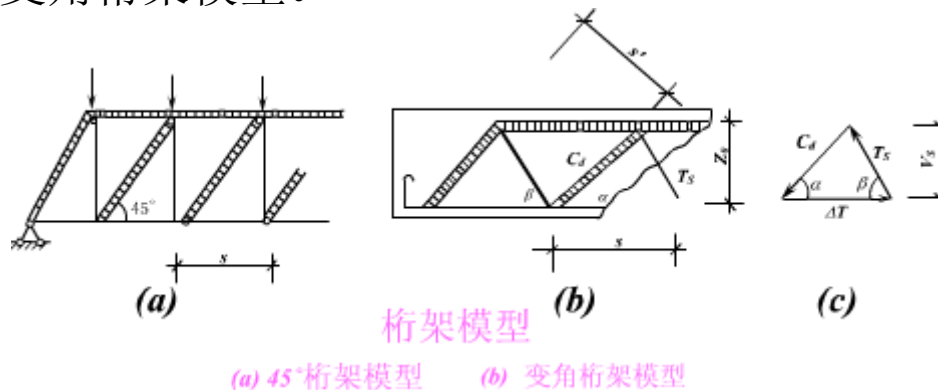
4.3.2 拱形桁架模型

在上述模型中加入箍筋作为受拉腹杆，则构成拱形桁架模型。



4.3.3 桁架模型

Ritter和Morsch在20世纪初提出，把带裂缝钢筋混凝土梁比拟为一个铰接桁架，其中压区混凝土为上弦杆，受拉纵筋为下弦杆，混凝土竖向拉杆，斜裂缝间混凝土为斜压杆（其倾角为 α ），后认识到倾角并不一定是常数，而是变角，故称为变角桁架模型。



§ 4.4 梁斜截面抗剪能力计算公式

4.4.1 影响斜截面受剪承载力的主要因素

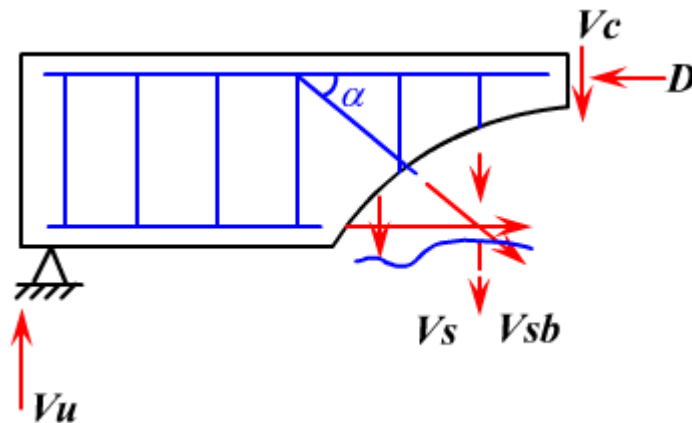
1. 剪跨比
2. 混凝土强度
3. 箍筋配箍率
4. 纵筋配筋率
5. 斜截面上的骨料咬合力
6. 截面尺寸和形状

4.4.2 有腹筋简支梁斜截面抗剪能力计算公式

抗剪机理认识还不清楚，大多数规范采用在理论上有一定依据的模式，而模式中有关参数则通过试验确定（半理论半经验公式）。

1. 计算表达式

由前述，在剪压破坏时极限平衡方程为



$$\sum Y = 0$$

混凝土和箍筋的抗剪力

$$V_u = V_c + V_s + V_{sb} = V_{cs} + V_{sb}$$

弯起钢筋承担的剪力

2. 仅配有箍筋时抗剪能力计算公式

理论模式:

$$\frac{V_u}{bh_0} = a_c f_t + a_{sv} r_{sv} f_{yv} = a_c f_t + a_{sv} \frac{A_{sv}}{bS} f_{yv}$$

或
$$V_u = a_c f_t b h_0 + a_{sv} f_{yv} \frac{A_{sv}}{S} h_0$$

经实验分析: $a_c = 0.7$ $a_{sv} = 1.25$ (对于均布荷载)

$a_c = \frac{1.75}{l + 1.0}$ $a_{sv} = 1.0$ (对于集中力, 或是集中力产生的剪力占总剪力的75%以上)

故得规范计算公式为

(1) 均布荷载下矩形、T形和工形截面的简支梁，当仅配箍筋时：

$$V_u = V_s = 0.7 f_t b h_0 + 1.25 f_{yv} \frac{A_{sv}}{S} h_0$$

式中： V_{cs} —— 斜截面上混凝土和箍筋的受剪承载能力设计值

f_t —— 混凝土轴心抗拉强度

f_{yv} —— 箍筋抗拉强度设计值

A_{sv} —— 配置在同一截面内箍筋各肢的全部截面面积

$A_{sv} = n \cdot A_{sv1}$, n 为同一截面内箍筋的肢数

A_{sv1} 为单肢箍的面积

S —— 沿构件轴线方向箍筋的间距

b —— 矩形截面的宽度，T形或工形截面的腹板宽度

h_0 —— 截面的有效高度

(2) 以集中荷载作用为主 (75%)

$$V_u = V_{cs} = \frac{1.75}{l+1} f_t b h_0 + 1.0 f_{sv} \frac{A_{sv}}{S} h_0$$

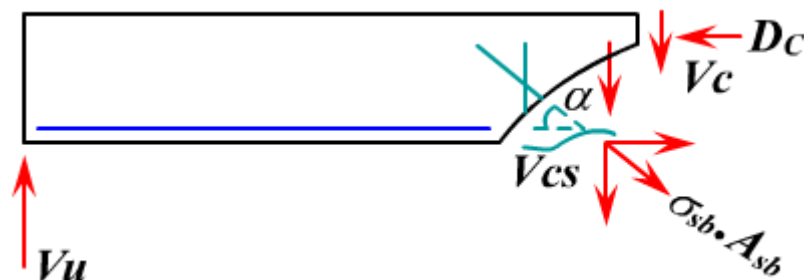
式中: l —— 剪跨比, $l = a / h_0$

a —— 计算截面至支座截面或节点边缘的距离, 计算截面取集中力作用处

$l > 3$ 取 $l = 3$, $l < 1.4$ 取 $l = 1.4$

3. 既配有箍筋，又配有弯起钢筋时抗剪能力计算公式

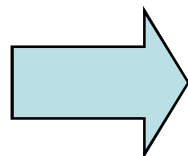
此时认为弯起钢筋应力达到屈服强度80%，箍筋应力达到屈服强度。



$$V_u = V_{cs} + V_{sb}$$

故：

$$V_{sb} = \sum_{i=1}^n s_{sb} A_{sb} \sin a_i$$



$$V_u = V_{cs} + 0.8 \sum_{i=1}^n f_{yi} A_{sbi} \sin a_i$$

$$= \sum_{i=1}^n 0.8 f_{yi} A_{sbi} \sin a_i$$

式中：

A_{sbi} —— 第*i*根弯起钢筋的面积

$$= 0.8 \sum_{i=1}^n f_{yi} A_{sbi} \sin a_i$$

a_i —— 第*i*根弯起钢筋的弯起角

4.4.3 抗剪设计表达式

$$V \leq 0.7 f_t b h_0 + 1.25 f_{yv} \frac{A_{sv}}{S} h_0 + 0.8 \sum_{i=1}^n f_{yi} A_{sbi} \sin a_i$$

或

$$V \leq \frac{1.75}{l+1} f_t b h_0 + 1.0 f_{yv} \frac{A_{sv}}{S} h_0 + 0.8 \sum_{i=1}^n f_{yi} A_{sbi} \sin a_i$$

此处： V ——计算截面处的设计剪力

4.4.4 对 V_{cs} 含义正确理解

$$V_{cs} \leq 1.25 f_{yv} \frac{A_{sv}}{S} h_0 + 0.8 \sum_{i=1}^n f_{yi} A_{sbi} \sin a_i$$

$$V_{cs} \leq 1.0 f_{yv} \frac{A_{sv}}{S} h_0 + 0.8 \sum_{i=1}^n f_{yi} A_{sbi} \sin a_i$$

$$QV_{cs} = V_c + V_{sv}$$

$$\therefore V_c = 0.7 f_t b h_0, V_{sv} = 1.25 f_{yv} \frac{A_{sv}}{S} h_0$$

V_c 表示的是无箍筋梁抗剪能力，它不是指混凝土本身抗剪强度，而是包括混凝土，"销栓作用"、"摩阻作用"等综合影响。

同理， V_{sv} 也是指增加箍筋后的综合作用。

4.4.5 计算公式的适用范围

由于斜压破坏主要取决于混凝土强度和截面尺寸，故可通过限制最小截面尺寸方法来控制斜压破坏，对于斜拉破坏则可通过限制最小配箍率方法予以避免。

1. 最小截面尺寸--公式上限值

为防止斜压破坏和限制在使用荷载下裂缝宽度，应满足：

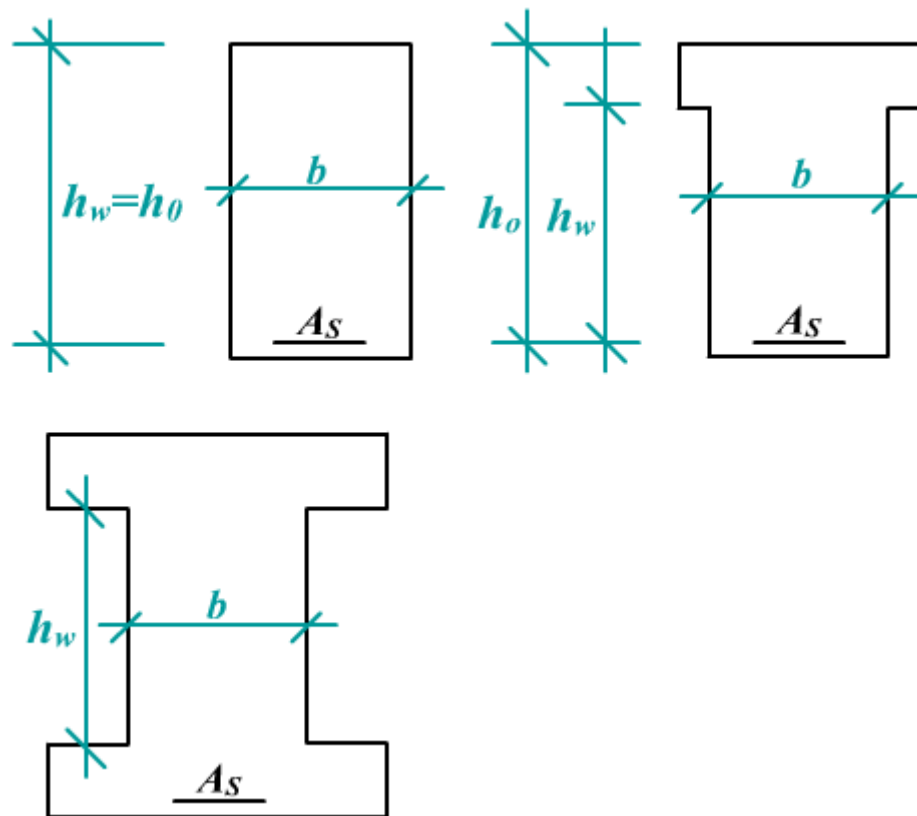
$$\frac{h_w}{b} \leq 4 \qquad V \leq 0.25 b_c f_c b h_0$$

$$\frac{h_w}{b} \geq 6 \text{ (薄腹梁)} \qquad V \leq 0.2 b_c f_c b h_0$$

$$4 < \frac{h_w}{b} < 6 \text{ 内插}$$

式中： b_c —— 混凝土强度影响系数 $c \leq 50, b_c = 1, c = 80, b_c = 0.8$ 当中内插。

h_w —— 腹板高度



2. 最小配箍率（下限值）

为避免斜拉破坏

$$r_{sv} \geq r_{sv \min} \left(0.24 \frac{f_t}{f_{yv}} \right)$$

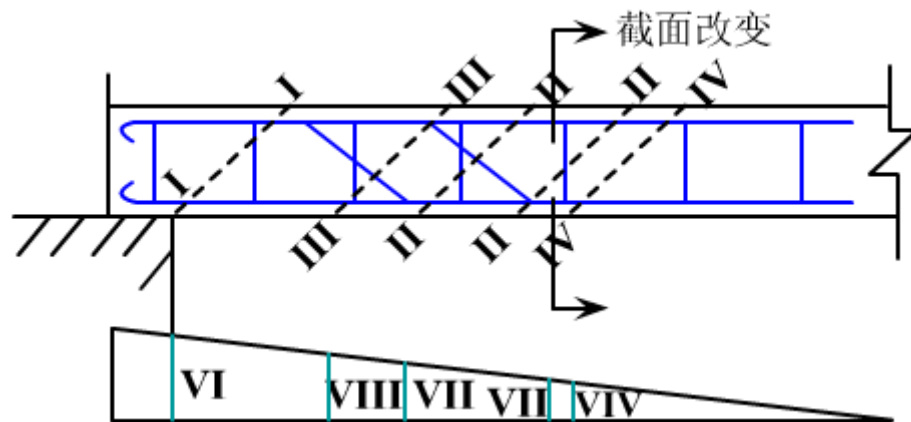
注意：当 $V \leq V_c$ 时，只需构造配置箍筋，下限值不控制。

§ 4.5 斜截面受剪承载力的设计计算

1. 计算截面位置

- (1) 支座边缘处截面 (I-I)
- (2) 弯起钢筋弯起点处截面 (II-II)
- (3) 箍筋直径或间距改变处截面 (III-III)
- (4) 腹板宽度改变处截面

其设计剪力取值如图所示



2. 设计计算步骤

先由正截面强度定截面尺寸和纵向钢筋，然后按抗剪公式计算箍筋或弯起钢筋数量。

