

基于点插值的配点型无网格法解 Helmholtz 问题

李美香, 张宏伟*, 李卫国

(大连理工大学 应用数学系, 大连 116024)

摘要:基于点插值法的思想,用三角函数作为基函数在局部支持域内构造具有 Kronecker δ 函数性、单位分解性、高阶连续性、再生性和紧支性的形函数。用配点法离散微分方程,得到了具有稀疏带状性的系数矩阵,用 GMERS 方法求解代数方程组,分别研究了 Helmholtz 问题的边界层问题和波传播问题。通过数值算例可以发现,给出的数值结果非常接近于精确解,且随着节点的增加,其精确度越来越高,具有良好的收敛性。

关键词:Helmholtz 方程;无网格法;点插值法;配点格式

中图分类号:O242.2 **文献标识码:**A

1 引言

Helmholtz 方程在物理、力学及工程等诸多领域中有广泛的应用背景,如薄膜振动问题、弹性波问题、电磁场中的波导问题、散射理论及海洋工程中水波衍射问题等。因此研究其数值解不仅有实际意义,也有理论价值。

对于 Helmholtz 问题,其微分方程和边界条件可表示为

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g_2, & \text{在 } \Gamma_n \text{ 上} \\ u = g_1, & \text{在 } \Gamma_d \text{ 上} \end{cases} \quad (1)$$

式中 Δ 为 Laplace 算子, u 是位势函数, λ 为常数, Ω 代表微分方程的问题域, Γ_d 代表 Ω 具有 Dirichlet 条件的边界部分, Γ_n 代表 Ω 具有 Neumann 条件的边界部分。传统解 Helmholtz 问题的数值方法一般有边界元法^[1]、有限元法^[2] 及有限差分法^[3] 等。无网格法是利用一组散布在问题域中以及域边界上的节点表示该问题域及其边界,通过几个互不相关节点上的值拟合出一个逼近函数。这样不仅摆脱了网格的束缚,避免了大量的网格划分、复杂的网格生成及重新划分工作,减小了因网格畸变而引起的困难,而且提供了连续性好、形式灵活的形函数。该方法在函数的逼近、边界条

件的引入和能量泛函的积分等方面具有一定的灵活性。本文将基于点插值思想的配点型无网格方法应用于 Helmholtz 问题的研究,分别研究了 helmholtz 方程的波传播问题和边界层问题。

2 基于点插值法的配点格式

以问题域 Ω 上定义的函数 $u(x)$ 为例进行说明,在问题域 Ω 上,取一组离散节点 $x_i (i = 1, 2, \dots, N)$,并把节点 x_i 相关联的变量记为 u_i 。

2.1 点插值法构造形函数

点插值法(PIM)是一种实用的生成无网格形函数的方法。在问题域 Ω 中的任一计算点 x 处的点插值近似式可表示为

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^m B_i(x) a_i = [B_1(x), B_2(x), \dots, B_m(x)] a \quad (2)$$

式中 $B_i(x)$ 为定义在直角坐标系空间的基函数, m 为基函数的个数, a_i 为待定系数,本文采用 $\{1, \sin kx, \cos kx\}$ 作为基函数。为确定式中的系数 a_i ,将在计算点 x 的局部支持域中选择 m 个节点,将所有节点代入式(2)得

$$U_s = P_{(m \times m)} \cdot a_{(m \times 1)} \quad (3)$$

其中力矩矩阵:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & B_1(x_1) & \cdots & B_m(x_1) \\ 1 & B_1(x_2) & \cdots & B_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & B_1(x_m) & \cdots & B_m(x_m) \end{bmatrix}$$

收稿日期:2008-08-07;修改稿收到日期:2009-05-13.

基金项目:大连理工大学数学+X(842326)资助项目.

作者简介:张宏伟*(1955-),男,教授,博士生导师

(E-mail:hwzhang@dlut.edu.cn).

$$U_s = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T$$

$$a = [a_1, a_2, \dots, a_m]^T$$

求解式(3)得

$$a = P^{-1}U_s \tag{4}$$

将式(4)代回到式(2)得

$$u^h(x) = [1, B_1(x), \dots, B_m(x)]P^{-1}U_s =$$

$$\sum_{i=1}^m N_i(x)u_i = NU_s$$

其中

$$N = [1, B_1(x), \dots, B_m(x)]P^{-1} = [N_1(x), N_2(x), \dots, N_m(x)]$$

为形函数向量。这样得到形函数满足，

$$N_j(x_i) = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$$

即具有 Kronecker δ 函数性质，这使得用配点法离散微分方程时，可简单、精确地施加本质边界条件。除具有 Kronecker δ 函数性质外，这种形函数还具有单位分解性、高阶连续性，再生性及紧支性。

下面考察点插值法对函数 $u(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{6}$ 的逼近情况(其误差范数的定义同式(12,13))。图 1 是在区间 $[0, 1]$ 上用 21 个节点离散问题域，用 3 个节点插值构造形函数对函数逼近情况。

从图 1 可以看出 PIM 法对函数及函数的一阶导数的逼近都能得到很高的精度，但对函数的二阶导数在两边界处有很明显的误差。这是导数边界条件影响配点型无网格法求解精度的原因。

图 2 为不同节点时采用 PIM 近似所得到的函数逼近误差变化情况。

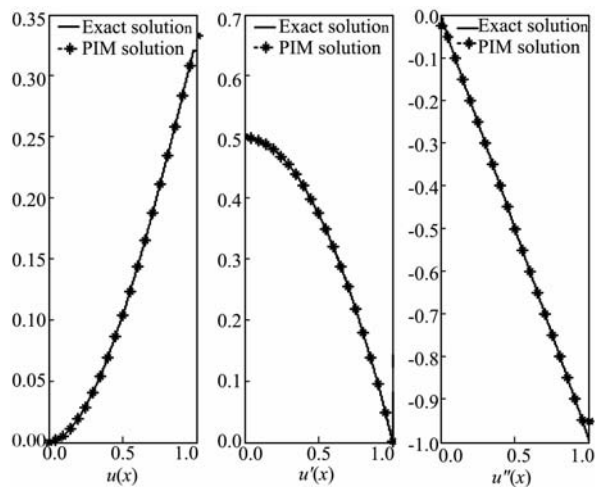


图 1 3 节点插值函数的逼近情况

Fig. 1 The approximation of a 3-node interpolation function

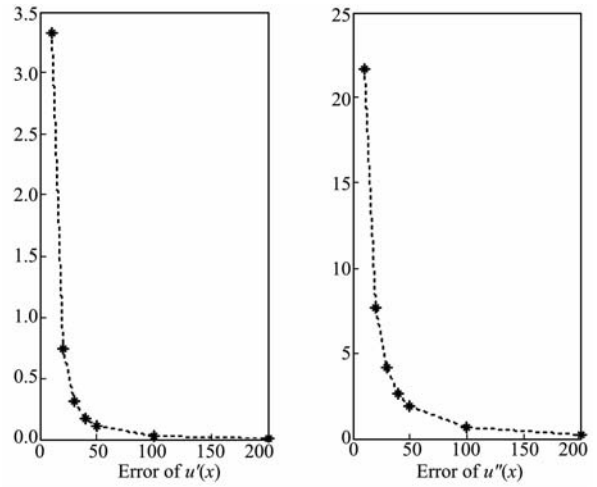


图 2 逼近误差随节点变化的情况

Fig. 2 The errors changes with nodes

由图 2 可看出，PIM 法的逼近误差随节点的增多而下降，所以，基于点插值的配点型无网格法求解带 Dirichlet 条件的微分方程时是收敛而稳定的。而采用移动最小二乘法时二阶导数的近似精度随节点逐步加密以后会出现一些震荡^[5]。

2.2 Helmholtz 方程的配点格式

配点法是使微分方程在问题域上的一组特定的点上得到满足。对于 Helmholtz 问题，设在问题域 Ω 内布有 N_s 个节点，在边界 Γ_d 上布有 N_d 个节点，在边界 Γ_n 上布有 N_n 个节点，共布有 $N = N_s + N_d + N_n$ 个节点。利用上面构造的无网格近似函数，可得到配节点 x_i 处的未知函数及其导数的近似表达式为

$$u_i^h = u^h(x_i) = N^T(x_i)U_s \tag{5}$$

$$\frac{\partial u_i^h}{\partial n} = \frac{\partial N^T(x_i)}{\partial n}U_s \tag{6}$$

将它们代入方程组(1)得到

$$\Delta u^h(x_i) + \lambda u^h(x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_s \tag{7}$$

$$u^h(x_i) = g_1(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N_d \tag{8}$$

$$\frac{\partial u^h(x_i)}{\partial n} = g_2(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N_n \tag{9}$$

组装相应节点的方程(7~9)可得到离散系统方程为

$$K_{(N \times N)}U_{(N \times 1)} = Q_{(N \times 1)} \tag{10}$$

式中 K 是总体刚度矩阵， U 是待求的未知列向量， Q 是已知载荷列向量。此处的总体刚度矩阵 K 具有稀疏带状性，可以采用矩阵的稀疏存储格式以节省存储空间，用 GMRES 法求解离散方程组。

3 数值算例

一维 Helmholtz 方程的波传播问题和边界层问题,其微分方程及边界条件如下:

$$\left. \begin{aligned} u'' + \lambda u &= 0, \quad 0 < x < 1 \\ u(0) &= 0, u(1) = 1 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

当 $\lambda > 0$ 时,即所谓的波传播问题,当 $\lambda < 0$ 时,即所谓的边界层问题。为了便于分析数值方法的精度和收敛性,将函数的结果误差 e_0 定义为

$$e_0 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (u_i - u_i^h)^2}{\sum_{i=1}^N (u_i)^2}} \quad (12)$$

函数的 k 阶导数的误差 e_x^k 定义为

$$e_x^k = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (u_{i,x}^{(k)} - u_{i,x}^{h(k)})^2}{\sum_{i=1}^N (u_{i,x}^{(k)})^2}} \quad (13)$$

式中 N 为节点数, u_i 为理论解, u_i^h 为数值解, $u_{i,x}^{(k)}$ 为 k 阶导数的理论解, $u_{i,x}^{h(k)}$ 为 k 阶导数的数值解。数值误差范数的 h 收敛率 $R(e)$ 定义为

$$R(e) = \frac{\log_{10}(e_{i+1}/e_i)}{\log_{10}(d_c^{i+1}/d_c^i)} \quad (14)$$

式中 e 可以是 e_0 或 e_x^k , d_c^{i+1} 和 d_c^i 为平均节点间距。

现分别取 $\lambda = 2, 25, -2, -25$, 基函数为 $\{1, \sin x, \cos x\}$ 。取局部支持域内 3 节点插值构造形函数,用不同节点离散问题域求解 Helmholtz 问题的结果误差 e_0 见表 1。

表 1 用 3 节点插值解 Helmholtz 问题的函数的结果误差

Tab. 1 The derivative errors of 3-node interpolation solving Helmholtz problem

λ 节点数	11	21	41	81
2	1.6906e-004	4.3277e-005	1.0958e-005	2.7577e-006
25	0.0315	0.0077	0.0019	4.8017e-004
-2	2.8343e-004	7.4232e-005	1.8997e-005	4.8055e-006
-25	0.0059	0.0017	4.4329e-004	1.1434e-004

表 3 用 5 节点插值解 Helmholtz 问题的函数的误差结果

Tab. 3 The errors of 5-node interpolation solving Helmholtz problem

λ 节点数	11	21	41	81
2	1.7500e-006	5.7676e-008	1.7351e-009	6.1625e-011
25	0.0012	3.5108e-005	1.4461e-006	1.3293e-007
-2	1.6071e-005	6.0764e-007	2.0082e-008	6.6866e-010
-25	9.1855e-004	5.2093e-005	2.0649e-006	6.8854e-008

表 2 为用 3 节点插值求解 Helmholtz 问题得到的函数导数的结果误差 e_0 的情况。

再取 $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x\}$ 为基函数,在计算点的局部支持域内取 5 个节点用点插值方法构造形函数,用不同节点方案离散问题域得到的结果误差 e_0 见表 3。

表 4 为用 5 个节点插值求解 Helmholtz 问题得到的函数导数的结果误差 e_0 的情况。

从数据可看出对同样的插值配点方案,函数导数的数值误差高于函数本身的数值误差。由表 1 和表 2 可得到,当节点密度增加 1 倍时,其相应的误差值缩小到约为原来的 $(1/2)^2 = 1/4$ 倍。由表 3 和表 4 可得到,对 5 个节点插值方案,函数的数值误差阶似乎为 $O(d^5)$,当节点密度增加 1 倍时,其相应的误差值缩小到约为原来的 $(1/2)^5 = 1/32$ 倍。

以下分析基于点插值的配点型无网格法解 Helmholtz 方程的 h 收敛率。用不同的插值方案得到的函数及其导数的 h 收敛率见表 5。

从表 5 可知用点插值配点型无网格法解 Helmholtz 方程可得到极佳的 h 收敛率;采用三节点插值方案, e_0 的收敛率约等于 2, e_{ix} 的收敛率与 e_0 的收敛率基本一致。采用五节点插值方案, e_0 的收敛率约为 4~5, e_{ix} 的收敛率也为 4~5,这说明该无网格法解 Dirichlet 条件的 Helmholtz 波传播问题是稳定而收敛的且计算高效精度高。当 $\lambda = 1$ 时, Helmholtz 波传播问题的解析解为 $u(x) = \sin x / \sin 1$,若采用三节点插值方案,用 3 个节点离散问题域时,

表 2 用 3 节点插值解 Helmholtz 问题的函数导数的误差结果

Tab. 2 The derivative errors of 3-node interpolation solving Helmholtz problem

λ 节点数	11	21	41	81
2	0.0021	4.6315e-004	1.0775e-004	2.5839e-005
25	0.0606	0.0131	0.0029	6.6394e-004
-2	0.0052	0.0012	2.7373e-004	6.5470e-005
-25	0.0606	0.0151	0.0034	7.5721e-004

表 4 用 5 节点插值解 Helmholtz 问题的函数导数的误差结果

Tab. 4 The derivative errors of 5-node interpolation solving Helmholtz problem

λ 节点数	11	21	41	81
2	3.1845e-005	1.4660e-006	6.7643e-008	4.1237e-009
25	0.0066	3.5500e-004	1.7331e-005	8.2243e-007
-2	2.8535e-004	1.4505e-005	7.0257e-007	3.3742e-008
-25	0.0094	7.1917e-004	4.2467e-005	2.1945e-006

表 5 两种插值方案解 Helmholtz 问题所得的 h 收敛率Tab. 5 The h rate of convergence for two interpolation methods solving Helmholtz problem

模型	λ	2		25		-2		-25	
		$R(e_0)$	$R(e_{i,x})$	$R(e_0)$	$R(e_{i,x})$	$R(e_0)$	$R(e_{i,x})$	$R(e_0)$	$R(e_{i,x})$
3 个节点 方案	11	—	—	—	—	—	—	—	—
	21	1.9660	2.1814	2.0329	2.2098	1.9330	2.1154	1.7955	2.0048
	41	1.9818	2.1043	2.0188	2.1755	1.9665	2.1324	1.9392	2.1509
	81	1.9904	2.0603	1.9847	2.1274	1.9829	2.0639	1.9553	2.1670
5 个节点 方案	11	—	—	—	—	—	—	—	—
	21	4.9219	4.4427	5.0935	4.2167	4.7258	4.2993	4.1409	3.7088
	41	5.0546	4.4395	4.6017	4.3574	4.9217	4.3691	4.6588	4.0811
	81	4.8165	4.0354	3.4441	4.3964	4.9087	4.3811	4.9088	4.2741

函数的误差 $e_0 = 0$, 这验证了点插值形函数的再生性。但当离散节点的数目增多时, e_0 会增大, 采用 7 个节点离散问题域时, $e_0 = 3.4970e-016$, 这是由于舍入误差积累所致。

4 结束语

本文基于点插值法思想, 用三角函数作为基函数构造局部近似函数, 用配点法离散微分方程, 建立了点插值配点型无网格法, 研究了 Helmholtz 方程的波传播问题和边界层问题。通过数值算例可以发现, 本文给出的数值结果非常接近于精确解, 且随着节点的增加, 其精确度越来越高, 具有良好的收敛性。

参考文献 (References):

- [1] 丁方允. 三维 helmholtz 方程 Dirichlet 问题的边界元法及其收敛性分析[J]. 兰州大学学报, 1995, **31**(3): 30-38. (DING Fang-yun, The BEM for dirichlet problems of three dimensional Helmholtz equation and its convergence [J]. *Journal of Lanzhou University*, 1995, **31**(3): 30-38. (in Chinese))
- [2] 龚东山, 丁方允. 关于大波数 k 的 Helmholtz 方程有限元解的误差估计与量差分析[J]. 兰州大学学报, 2003, **38**(5): 13-23. (LONG Dong-shan, DING Fang-yun, Error estimating and residual analysis for the finite element method to Helmholtz equation with large

- wave number k [J], 2003, **38**(5): 13-23. (in Chinese))
- [3] 龙毅, 徐军, 朱汉青. 规则区域上 Helmholtz 方程的一种快速算法[J]. 电子科技大学学报, 1999, **28**(4): 383-387. (LONG Yi, XU Jun, ZHU Han-qing, A fast algorithm for solving Hemholtz equation on regular domain [J]. *Journal of Xidian University (Natural Science)*, 1999, **28**(4): 383-387. (in Chinese))
- [4] Liu G R, Lu Y T. 无网格法理论及程序设计[M]. 王建明, 周学军, 译. 济南: 山东大学出版社, 2007. (Liu G R, LU Y T. *An Introduction to Meshless Methods and their Programming* [M]. Jinan: Shandong University Press, 2007. (in Chinese))
- [5] 龙建旭. 配点型无网格法的误差影响因素分析及其在动力特性分析中的应用[D]. 贵州大学, 2006. (LONG Jian-xu. Error factors affecting analysis of the meshless method and its application in the dynamic characteristics analysis [D]. Guizhou University, 2006. (in Chinese))
- [6] Wang J G, Liu G R. A point interpolation meshless method based on radial basis functions[J]. *Int J Numer Meth Eng*, 2002, **54**(11): 1623-1648. (in Chinese))
- [7] Yagawa G, Yamada T. Free mesh method, a kind of meshless finite element method[J]. *Comput Mech*, 1996, **18**: 383-386.

Solving Helmholtz problem by collocation meshless method based on point interpolation

LI Mei-xiang, ZHANG Hong-wei*, LI Wei-guo

(Department of Applied Mathematics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: Combining the point interpolation method with trigonometric functions which are used as base functions, a shape function is structured in the local support domain. The shape function has many properties, such as Kronecker functionality, unit decomposition and reproducibility as well as compact properties. Discretizing differential equations by the allocation method, a sparse band coefficient matrix is obtained. The GMERS method is used to solve algebraic equations. Two kinds of Helmholtz problem: a boundary layer problem and a wave propagation problem are solved. Numerical examples can be found, and the results are close to the exact solutions. Furthermore, high precision and good convergence could be obtained as the nodes increased.

Key words: Helmholtz equation; meshless method; point interpolation method; collocation formulation