

基于 Youngs 界面重构技术的自适应网格细分方法

刘 春^{*1,2}, 马天宝¹, 宁建国¹

(1. 北京理工大学 爆炸科学与技术国家重点实验室, 北京 100081; 2. 北京强度环境研究所, 北京 100076)

摘要: Euler 型多物质流体动力学数值方法中, 常采用 Youngs 界面重构技术处理混合网格。Youngs 方法在输运步中需要同时考虑两种物质, 程序编写复杂, 效率低。本文在 Youngs 方法的基础上, 对混合网格进行多层细分, 用细分后的纯物质子网格代替原混合网格。分析了网格细分的具体方案; 对细分后子网格, 同时考虑往周边八个网格的输运, 给出了所有可能分配量的表达式。最后编程实验结果表明, 在不增加计算量的基础上, 网格细分的方法有效地提高了计算精度。

关键词: Youngs 算法; 细分网格; 混合网格; 数值模拟
中图分类号: O389 **文献标识码:** A

1 引言

由于 Euler 方法^[1] 网格空间固定, 物质在网格内流动, 因此, 在确定了混合网格内物质界面的位置后, 如何处理混合网格内两种物质的输运便成为需要解决的一个难题。传统的方法是同时输运混合网格内的两种物质, 格边速度确定总输运量后, 根据混合网格的界面位置分析出所有可能出现的情况, 最终来确定每一种物质的输运量。但由于采用的是维数分裂输运方法, 只考虑了坐标轴相邻的四个网格的输运, 网格内有两种物质, 可能出现的情况很多, 编写程序繁琐, 效率低。

网格细分方法的目的是要消除混合网格, 同时在输运时考虑周边八个网格的输运分配。在两种物质的交界面处及其附近, 通过细分网格的方法, 用一系列更小的纯网格来替代混合网格。以原有的父网格的计算结果为初值, 将质量, 速度, 压力及密度等网格量, 通过差值或者直接赋值的方法赋给细分后的子网格, 然后根据子网格的速度来确定输运情况, 用子网格输运结果来最终确定原有父网格的最后输运情况。

2 数值方法

2.1 基本方程组

为了简化计算模型, 需要进行一些基本假设:

连续介质假设、局部热平衡假设、物质均匀、各向同性假设、理想塑性假设和弹性小变形假设。程序的守恒方程采用无黏、无热传导、忽略体力的二维轴对称非定常可压缩流体偏微分方程组。控制方程的计算采用两步法: Lagrange 步和输运步 (Euler 步)。在 Lagrange 步中, 网格随物质一起变形, 不考虑对流项, 仅考虑压力和偏应力的梯度效应, 得到网格速度和比内能的中间值。在 Euler 步中, 对质量、动量和能量在网格上进行重新分配, 得到新的网格速度以及网格内各介质的质量及内能。这一步可以认为是把第一步结束后变形了的 Lagrange 网格重新映射到固定的 Euler 坐标系中。

质量守恒方程:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + u_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial r u_r}{r \partial r} \right) = 0 \quad (1)$$

动量守恒方程:

$$\rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial S_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial (r S_{rz})}{r \partial r} \quad (2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial S_{rz}}{\partial z} + \frac{\partial (r S_{rr})}{r \partial r} + \frac{(S_{rr} + S_{zz})}{r} \quad (3)$$

能量守恒方程:

$$\rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + u_z \frac{\partial e}{\partial z} + u_r \frac{\partial e}{\partial r} \right) = - P \left(\frac{\partial (r u_r)}{r \partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + S_{zz} \frac{\partial u_z}{\partial z} + S_{rr} \frac{\partial u_r}{\partial r} + S_{rz} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) - \frac{u_r (S_{rr} + S_{zz})}{r} \quad (4)$$

收稿日期: 2008-12-24; 修改稿收到日期: 2009-09-13.
基金项目: 国家自然科学基金(10625208)资助项目.
作者简介: 刘 春* (1980-), 男, 工学博士
(E-mail: Lcpiao@126.com).

式中 t 为时间, r 和 z 为欧拉坐标, u_r 和 u_z 为 r 方向和 z 方向的速度分量; P , ρ 和 e 分别为压力、密度和比内能; S_{rr} , S_{zz} 和 S_{rz} 为偏应力。

2.2 Lagrange 步和输运步

在 Lagrange 步中, 忽略对流项的影响, 仅考虑压力和偏应力的梯度效应, 得到网格速度和比内能的中间值。以 z 方向的动量守恒方程(2) 为例, 去掉对流项后, 得到如下形式的方程:

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial S_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial(rS_{rz})}{r\partial r} \quad (5)$$

对时间采用向前差分, 空间采用一阶中心差分, 一阶精度显示格式的差分离散公式如下:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{zi,j}^{n+1} = & u_{zi,j}^n + \frac{\Delta t^n}{\rho_{i,j}^n} \left[-\frac{1}{\Delta z_i} (P_{i+\frac{1}{2},j} + q_{zi,j} - \right. \\ & P_{i-\frac{1}{2},j} - q_{zi-1,j})^n + \\ & \left. \frac{1}{\Delta z_i} (S_{zz\ i+\frac{1}{2},j} - S_{zz\ i-\frac{1}{2},j})^n + \right. \\ & \left. \frac{1}{r_j \Delta r_j} (r_{j+\frac{1}{2}} S_{rz\ i,j+\frac{1}{2}} - r_{j-\frac{1}{2}} S_{rz\ i,j-\frac{1}{2}})^n \right] \quad (6) \end{aligned}$$

式中 q 表示人工粘性, 下标含有 $\pm \frac{1}{2}$ 的物理量代表格边量, 其余代表格心量。格边量由格心量插值计算得到。

对于动量守恒方程(3) 以及能量守恒方程式(4), 可按相同的方法进行离散。

3 网格细分方法

细分网格方法是建立在 Youngs^[2,3] 界面处理技术的基础上, Youngs 界面重构技术是处理 Euler 混合网格最具代表性的方法, Youngs 技术的思想

是用混合网格及周围八个网格的介质体积份额来确定混合网格中物质的界面, 在一个混合网格中界面被近似地看作直线, 四周八个网格的介质体积份额用来确定界面直线的法线方向, 混合网格本身的体积份额用来确定界面直线的位置。原有的两种物质的界面, 是用混合网格中的一条斜线来近似物质的界面, 如图 1 所示, 虚线为实际物质界面, 斜直线为网格内两种物质的近似分界面, 由于混合网格内同时有两种物质, 要同时考虑两种物质的处理, 需要讨论的情况比较多。现在将混合网格进行细分, 使混合网格变成小的纯网格, 图 2 为细分后的情况, 混合网格和周边的纯物质网格都进行了细分, 用细分后的子网格边界来代替原有斜直线来作为物质近似界面。

3.1 网格细分参数

首先确定需要细分的带界面混合网格的细分层次。根据对计算中精度的要求预先设置需要细分的混合网格细分的层次参数 DL, 如图 2DL 设置为 3, 也就是说混合网格细分 3 层, 最后就变成了 $(2^3)^2 = 64$ 个子网格。同样如果想提高精度将 DL 设置为 4, 那么混合网格将细分为 $(2^4)^2 = 256$ 个子网格。

接下来确定混合网格周边的几层网格需要细分。同样是根据精度要求来确定周边几层网格需要细分的参数 NL, 如图 2NL 设置为 2, 所以混合网格的周边的两排网格也进行了细分。

确定了混合网格的细分层次参数 DL 和周边需要细分的纯网格的层数 NL 之后, 再进一步确定混合网格周边几层需要细分的纯网格的细分层数

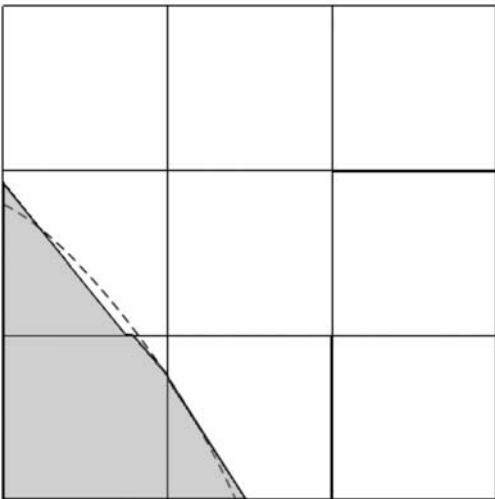


图 1 细分前 Youngs 方法确定的混合网格界面

Fig. 1 Material interface by Youngs' interface reconstruction algorithm in a mixed grid

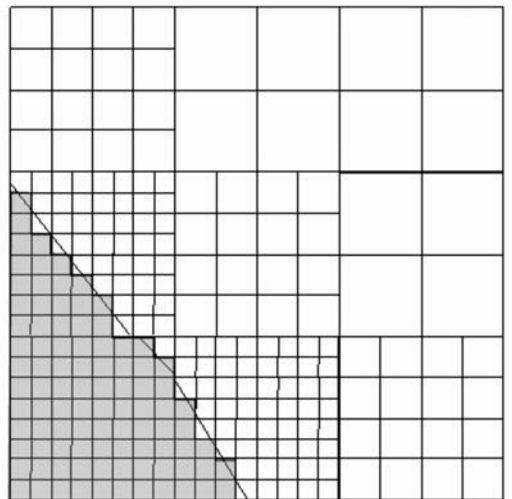


图 2 细分后的子网格确定的物质界面

Fig. 2 Subgrids and material interfaces after subdivision

参数 DL,遵循的原则就是离混合网格越近的那层纯网格细分层次参数 DL 越接近混合网格的细分层次参数 DL.假设需要细分的纯网格距离混合网格的排数为 C,当纯网格与混合网格相邻时取 C=1,隔一排时 C = 2,依此类推.确定纯网格细分层次参数 DL 纯的公式如下:

$$DL_{\text{纯}} = \begin{cases} DL_{\text{混}} - C & (DL_{\text{混}} - C \geq 1) \\ 1 & (DL_{\text{混}} - C < 1) \end{cases} \quad (7)$$

3.2 子网格的物质种类

细分网格的目的就是去掉混合网格,所以细分后的子网格最后都必须都是纯网格.对于细分前原父网格是纯网格的子网格,物质种类容易确定,但是对于细分前原父网格是混合网格的子网格,物质种类的确定需要有一套计算方法.

如图 3 所示,可以分成两大类情形来讨论.在第一类情形下,Youngs 技术确定的界面为一条实直线,且斜率大于零,ra 为该直线与网格格边交点的 R 向坐标,过任意一个子网格的格心做一条与 Youngs 界面线平行的虚线,它与网格上边界的交点 R 向坐标为 rx,如果 $rx > ra$,说明该子网格在 Youngs 界面线的下方,该子网格的物质种类为 Youngs 界面下方的物质种类,如果 $rx < ra$,说明该子网格在 Youngs 界面线的上方,该子网格的物质种类为 Youngs 界面上方的物质种类.对于第二类情形,Youngs 技术确定的界面直线斜率小于零,同理推断可得.

3.3 子网格的格心速度

假设任意一个子网格的 R 向和 Z 向格心速度分别为 $VR_{i,j}$ 和 $VZ_{i,j}$,其计算公式如下:

$$VR_{i,j} = \begin{cases} \frac{r_j \cdot u_{j-1} + r_{j-1} \cdot u_j}{r_{j-1} + r_j} & 0 \leq j < \frac{2^{DL}}{2} \\ \frac{r_{j+1} \cdot u_j + r_j \cdot u_{j+1}}{r_j + r_{j+1}} & \frac{2^{DL}}{2} \leq j < 2^{DL} \end{cases} \quad (8)$$

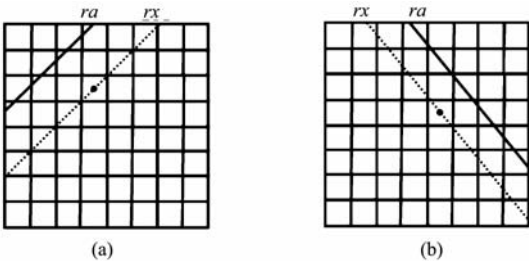


图 3 确定子网格物质类型的两种情形

Fig. 3 Two configurations for determining the material type of the subgrids

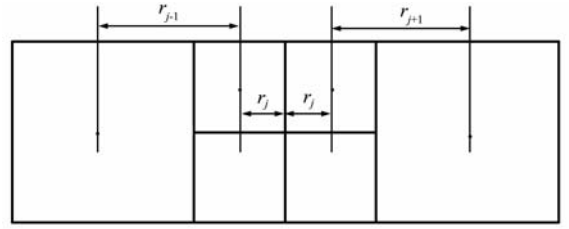


图 4 求子网格速度时的坐标示意图

Fig. 4 Sketch of coordinates to obtain the velocities

$$VZ_{i,j} = \begin{cases} \frac{z_i \cdot u_{zi-1} + z_{i-1} \cdot u_{zi}}{z_{i-1} + z_i}, & 0 \leq i < \frac{2^{DL}}{2} \\ \frac{z_{i+1} \cdot u_{zi} + z_i \cdot u_{zi+1}}{z_i + z_{i+1}}, & \frac{2^{DL}}{2} \leq i < 2^{DL} \end{cases} \quad (9)$$

如图 4 所示,式(8)中 r_j 是子网格格心到原父网格格心的 R 向距离, r_{j-1} 是左边子网格格心到原父网格相邻的前一个父网格格心的 R 向距离, r_{j+1} 是右边子网格格心到原父网格相邻的后一个父网格格心的 R 向距离; u_j 是子网格所在的原父网格格心的 R 向速度, u_{j-1} 是子网格所在原父网格相邻的前一个父网格格心的 R 向速度, u_{j+1} 是子网格所在原父网格相邻的后一个父网格格心的 R 向速度.式(9)中是 Z 方向的定义类同式(8).

3.4 时间步长的确定

在计算过程中,时间步长 Δt^n 是根据第 n 步计算结果,考虑 CFL 稳定性条件^[4](Courant-Friedrichs-Lewy)确定的:

$$\Delta t^n \leq \alpha_0 \cdot \min \left\{ \min \left(\frac{\Delta z}{u_{zi}^n + C} \right), \min \left(\frac{\Delta r}{u_{rj}^n + C} \right) \right\} \quad (10)$$

式中 α_0 为调节系数($0 < \alpha_0 < 1$).对于原来的父网格和细分后的子网格,都要考虑式(10)中的 CFL 条件,最后确定时间步长 Δt^n .

3.5 子网格的输运

由于每一个子网格都是纯网格,输运计算的方法就可以类似原来父网格中纯网格的输运.每一个子网格的格心坐标和速度已经求出,就容易得到一个输运计算步后子网格的坐标,分别用 $CR2_{i,j}$ 和 $CZ2_{i,j}$ 表示为

$$\begin{aligned} CR2_{i,j} &= CR1_{i,j} + VR_{i,j} \cdot \Delta t \\ CZ2_{i,j} &= CZ1_{i,j} + VZ_{i,j} \cdot \Delta t \end{aligned} \quad (11)$$

式中 $CR1_{i,j}$ 和 $CZ1_{i,j}$ 是子网格原来的坐标, Δt 是时间步长.

首先判断输运后,子网格有没有输运出原来父网格,判断准则是看子网格输运后的格心坐标有没有越过原来父网格四个边角处的子网格格心,如果子网格输运后的格心坐标在 R 和 Z 向两个方向都没有越过四个边角处的子网格格心,说明子网格内物质没有流出原有父网格,如果输运后的子网格格心坐标越过了四个边角处的任意一个子网格的格心坐标,说明就有物质输运到了周边八个网格中的一个或几个网格中,这时需要分五种情况,如图 5 所示,可以清楚看出,物质的输运同时考虑到了周边的 8 个网格。

一个子网格输运结束后,将子网格的输运量累加求和,即为父网格的输运量,根据图 5 中的五种情况,分别计算输运到周边八个网格的输运量。

4 流场中界面考核

(1) 二维平面上圆缺盘(Zalesak 圆缺盘)在旋

转流场中的运动

计算域大小为 $(\pi \times \pi)$, 网格划分为 (200×200) 个, 时间步长为 0.001, 旋转速度场由下式给出: $u_z(z, r) = -\pi \cdot (r - \pi/2)$, $u_r(z, r) = \pi \cdot (z - \pi/2)$ 。

图 6 给出了计算时间步 n 分别为 0, 500, 1000, 1500 时的形状, 可以看出, 圆缺在该旋转速度场中, 形状保持的基本完好, 在 $n = 1500$ 时, 尖角稍微有些变形。

(2) 二维平面上圆盘在剪切流场中的运动^[5]

计算域大小为 $(\pi \times \pi)$, 网格划分为 (200×200) 个, 时间步长为 0.001, 剪切速度场由下式给出: $u_z(z, r) = -\pi \cdot \sin z \cdot \cos r$, $u_r(z, r) = \pi \cdot \cos z \cdot \sin r$ 。

图 7 给出了计算时间步 n 分别为 0, 1000, 1500, 2000 时的形状, 可以看出, 圆在剪切流场的变形中, 边界形状保持良好。

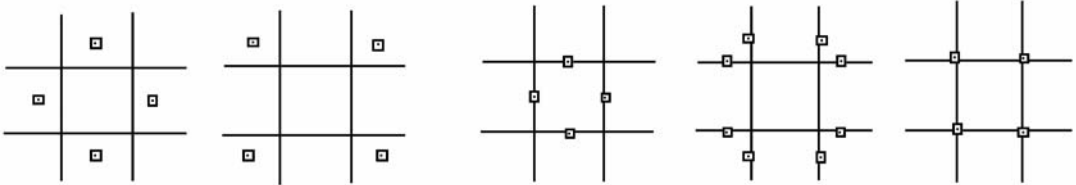


图 5 子网格输运到周边 8 个网格可能出现的五种情形
Fig. 5 Five possible cases for the transportation of the discussed subgrid to the surrounding grids

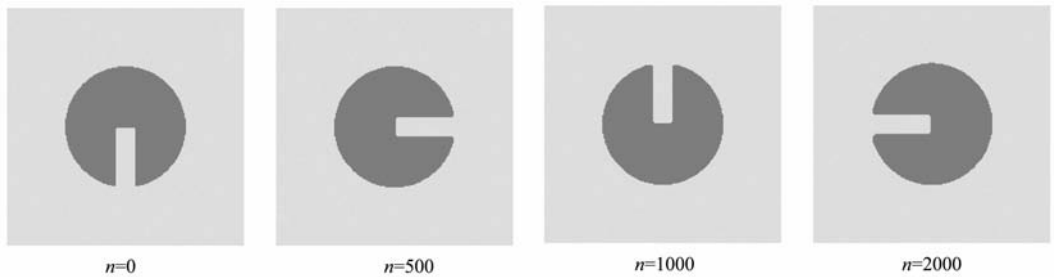


图 6 二维平面上圆缺盘在旋转流场中的运动图像
Fig. 6 Image of clevis object at different time steps in the rotating flow field

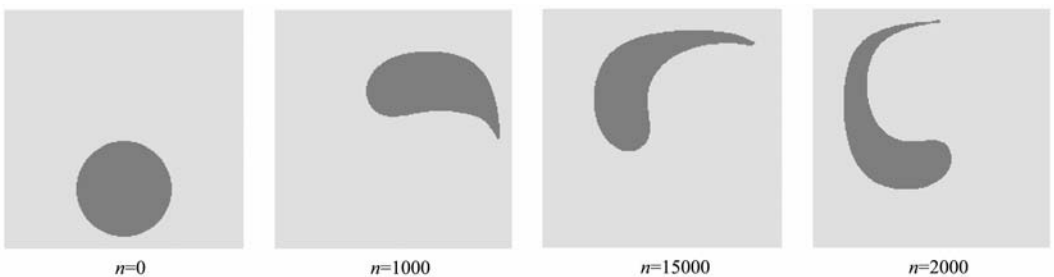


图 7 二维平面上圆盘在剪切流场中的运动图像
Fig. 7 Image of disk at different time steps in the shear flow field

5 精度考核

(1) 简单的平移运输测试

对于网格输运和界面重构精度的问题, Harive 和 Fletcher^[7,9] 做了一系列详细的讨论, 其中的一个算例就是在一个 1×1 的计算域内, 考虑一个半径为 0.2 的圆形区域, 初始位置为 $(0.25, 0.25)$, 在一个恒定的水平速度流场 $u_z(z, r) = 1, u_r(z, r) = 1$ 下平移运动, 时间步长为 0.01, 计算时长 $T = 0.5$ 。定义 L_1 误差的公式如下:

$$E = \sum_{i,j} A_{\Omega}^{(i,j)} | F_{i=\frac{z}{2}}^{(i,j)} - F_e^{(i,j)} | \quad (12)$$

式中 $A_{\Omega}^{(i,j)}$ 为网格 (i, j) 的面积, $F_{i=\frac{z}{2}}^{(i,j)}$ 为计算得到的网格介质体积分数, $F_e^{(i,j)}$ 为网格的真是介质体积分数。

同时收敛阶定义为

$$\vartheta = \frac{\ln(E_{2n_x}/E_{n_x})}{\ln(1/2)} \quad (13)$$

式中 E_{2n_x} 和 E_{n_x} 是一个坐标方向上网格数分别为 $2n_x$ 和 n_x 时的误差。

表 1 给出了不同方法计算所得的误差和收敛阶。从表 1 结果不难看出, 不分裂算法明显的减少了计算误差, 收敛性也较好。

表 1 在平移流场下各种方法计算所得误差及收敛阶
Tab.1 L_1 error norm and order of convergence obtained in the simple translation test

	Rider and Kothe ^[6]	Harive and Fletcher ^[7]	López ^[8]	grid subdivision algorithm	
10×10	E	1.20×10^{-2}	1.22×10^{-2}	1.12×10^{-2}	1.09×10^{-2}
	ϑ	1.66	1.57	1.63	1.76
20×20	E	3.85×10^{-3}	4.10×10^{-3}	3.62×10^{-3}	3.20×10^{-3}
	ϑ	1.43	1.45	1.67	1.45
40×40	E	1.43×10^{-3}	1.50×10^{-3}	1.14×10^{-3}	1.15×10^{-3}

(2) 旋转输运测试

在 1×1 的计算域内, 考虑一个半径为 0.15 的圆形区域, 初始位置为 $(0.5, 0.75)$, 在一个旋转流场 $u_z(z, r) = -(r - 1/2), u_r(z, r) = (z - 1/2)$ 中运动, 时间步长为最大速度满足的 CFL 条件的 0.5, 在计算 200 时间步长后计算误差和收敛阶, 同样采用式(12,13) 计算, 计算结果见表 2。不难看出不分裂算法具有较小的误差和较好的收敛性。

表 2 在旋转流场下各种方法计算所得误差及收敛阶
Tab.2 L_1 error norm and order of convergence obtained in the rotation translation test

	Rider and Kothe ^[6]	Harive and Fletcher ^[7]	López ^[8]	grid subdivision algorithm	
32×32	E	1.61×10^{-3}	1.42×10^{-3}	8.86×10^{-4}	8.62×10^{-4}
	ϑ	2.19	2.08	1.76	2.04
64×64	E	3.54×10^{-4}	3.37×10^{-4}	2.57×10^{-4}	2.11×10^{-4}
	ϑ	1.98	2.08	2.22	1.92
128×128	E	8.95×10^{-5}	7.96×10^{-5}	5.52×10^{-5}	5.42×10^{-5}

6 结 论

(1) 针对 Youngs 界面重构方法中输运程序复杂, 分析繁琐的特点, 采用网格细分的方法, 消除了混合网格, 简化了输运情况的分析, 同时缩短了程序的编写。

(2) 网格细分方法由于消除了混合网格的输运处理, 有效降低了计算工作量, 节省了计算时间, 同时在界面处的处理精度也得到了提高。

(3) 细分网格的方法在输运时考虑了斜对角网格的输运, 对周边 8 个网格送输运都给出了分配方案, 计算结果表明有效提高了精度。

参考文献 (References):

[1] HIRT C W, Nichols B D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries [J]. *Journal of Computational Physics*, 1981, **39**(1):201-225.

[2] Youngs D L. *Time-dependent Multi-material Fluid Dynamic*[M]. New York:Academic Press, 1982.

[3] Ning J G, Ma T B, Wang C. 2D numerical simulation of typical explosion and impact problem [A]. Proceedings of the Six World Congress on Computational Mechanics in Conjunction with Second Asian-Pacific Congress on Computational Mechanics[C]. Beijing, China, 2004.

[4] 宁建国, 马天宝, 王 成. 多物质二维流体动力学程序 MMIC 的理论基础及其应用研究 [J]. 太原理工大学学报, 2005, **36**(6): 732-734. (NING Jian-guo, MA Tian-bao, WANG Cheng. Theoretical foundation and its application of MMIC2D multi-material elastic-plastic hydrodynamic program [J]. *Journal of Taiyuan University of Technology*, 2005, **36**(6):

732-734. (in Chinese))

- [5] 刘儒勋,舒其望. 计算流体力学的若干新方法[M]. 北京:科学出版社,2003:201-208. (LIU Ru-xun, SHU Qi-SANG. *Some New Methods Computational Fluid Dynamics*[M]. Beijing: Science Press,2003:201-208. (in Chinese))
- [6] Rider W J, Kothe D B. Reconstructing volume tracking[J]. *Journal of Computational Physics*, 1998, **141**(2):112-152.
- [7] Harvie D J E, Fletcher D F. A new volume of fluid

advection algorithm: the stream scheme[J]. *Journal of Computational Physics*, 2000, **162**(1):1-32.

- [8] López J. A volume of fluid method based on multidimensional advection and spline interface reconstruction[J]. *Journal of Computational Physics*, 2004, **195**(2):718-742.
- [9] Harvie D J E, Fletcher D F. A new volume of fluid advection algorithm: the defined donating region scheme[J]. *Int J Numer Methods Fluids*, 2001, **35**: 151-172.

Adaptive grid subdivision algorithm based on the youngs' interface reconstruction algorithm

LIU Chun*^{1,2}, MA Tian-bao¹, NING Jian-guo¹

(1. State Key Laboratory of Explosion Science and Technology, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;

2. Beijing Institute of Structure and Environment Engineering, Beijing 100076, China)

Abstract: In multi-material Eulerian hydrodynamic, Youngs' interface reconstruction algorithm is often used to deal with mixed grids. Two materials have been considered in Youngs' algorithm with complicated programming and low efficiency. The mixed grids are subdivided based on Youngs' algorithm. Pure grids after subdivision will replace mixed grids. After subdivision scheme is analyzed, all of the possible distribution modes to eight neighboring cells are given. The simulation results verify that the grid subdivision algorithm improves precision efficiently without increasing the calculation account.

Key words: Youngs' algorithm; grid subdivision; mixed cell; numerical simulation