

图 1 柔性单元的运动描述

Fig. 1 Motional description of flexible element

对上式求导可得  $P$  点的速度和加速度向量:

$$\dot{\mathbf{R}}_P^t = \dot{\mathbf{R}}_o^t + \dot{\mathbf{T}}(\mathbf{r}_P^0 + \mathbf{N}\mathbf{u}^t) + \mathbf{T}\mathbf{N}\dot{\mathbf{u}}^t \quad (4)$$

$$\ddot{\mathbf{R}}_P^t = \ddot{\mathbf{R}}_o^t + \ddot{\mathbf{T}}(\mathbf{r}_P^0 + \mathbf{N}\mathbf{u}^t) + 2\dot{\mathbf{T}}\mathbf{N}\dot{\mathbf{u}}^t + \mathbf{T}\mathbf{N}\ddot{\mathbf{u}}^t \quad (5)$$

依据虚位移原理和 d'Alembert 原理有

$$\delta W_a + \delta W_i + \delta W_l = 0 \quad (6)$$

式中  $\delta W_a$  为主动虚功,  $\delta W_i$  为内力虚功,  $\delta W_l$  为惯性力虚功, 在内力虚功推导过程中使用描述非线性应变 - 位移关系的 Green 应变张量, 可得一般柔性单元的运动方程为

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{T}^{-1} \ddot{\mathbf{R}}_P^t d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{q} d\Omega + \int_S \mathbf{N}^T \mathbf{p} dS + \mathbf{f} \quad (7)$$

式中  $\mathbf{B} = \mathbf{B}^L + \mathbf{B}^{NL}$  为应变矩阵, 其中  $\mathbf{B}^L$  为线性应变矩阵,  $\mathbf{B}^{NL}$  为非线性应变矩阵,  $\boldsymbol{\sigma}$  为应力矩阵,  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{p}$  和  $\mathbf{f}$  分别为单元体力向量、面力向量和结点外激励向量,  $\Omega$  为单元积分域,  $\rho$  为质量密度。

对于平面单元, 坐标变换矩阵  $\mathbf{T}$  可表为

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中  $\varphi$  为单元随动坐标系相对整体坐标系的转角。对上式求导可得

$$\dot{\mathbf{T}} = \dot{\varphi} \begin{bmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi \\ \cos\varphi & -\sin\varphi \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\ddot{\mathbf{T}} = \ddot{\varphi} \begin{bmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi \\ \cos\varphi & -\sin\varphi \end{bmatrix} + \dot{\varphi}^2 \begin{bmatrix} -\cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix} \quad (10)$$

将式(3~5)代入式(7), 并结合式(8~10)即可得平面柔性单元的运动方程:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + 2\dot{\varphi}\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \dot{\varphi}\mathbf{C}\mathbf{u} - \dot{\varphi}^2\mathbf{M}\mathbf{u} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{Q} = \mathbf{F} \quad (11)$$

式中  $\mathbf{M}$  为质量矩阵,  $\mathbf{C}$  为惯性耦合矩阵,  $\mathbf{K}$  为非线性刚度阵, 包括线性刚度阵  $\mathbf{K}_0$  和几何刚度阵  $\mathbf{K}_g$  两部分, 即  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_g$ ,  $\mathbf{F}$  为外激励矩阵,  $\mathbf{Q}$  为附加载

荷矩阵, 各矩阵表达式如下:

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} d\Omega \quad (12)$$

$$\mathbf{C} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^T \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{N} d\Omega \quad (13)$$

$$\mathbf{K}_0 = \int_{\Omega} (\mathbf{B}^L)^T \mathbf{D} \mathbf{B}^L d\Omega \quad (14)$$

$$\mathbf{K}_g = \int_{\Omega} \mathbf{G}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{G} d\Omega \quad (15)$$

$$\mathbf{Q} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{T}^{-1} \ddot{\mathbf{R}}_o^t d\Omega + \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^T \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{r} d\Omega - \dot{\varphi}^2 \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{r} d\Omega \quad (16)$$

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{q} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{p} d\Omega + \mathbf{f} \quad (17)$$

由非线性有限元理论可知, 应变矩阵  $\mathbf{B}$  和系数矩阵  $\mathbf{G}$  均为单元形函数对相应坐标的偏导数。在确定了单元类型和具体形函数后即可得到特定柔性单元运动方程中各种特征矩阵的具体表达式。

### 3 计及二阶效应的柔性梁单元运动方程

如图 2 所示随动坐标系下的三结点 Euler-Bernoulli 梁单元, 共有 9 个结点自由度  $\mathbf{u}^e = \{u_1, \dots, u_9\}$ , 其结点 3 位于单元长度方向的中间位置, 自由度为  $\{u_7, u_8, u_9\}$ 。分别使用五次 Hermite 插值函数和二次 Lagrange 插值函数构造单元的横向和轴向位移场, 利用边界条件即可得形函数的具体表达式, 见文献[6, 7]。

由式(12~17)可以看到, 刚度矩阵与形函数的导数相关, 而质量等其他特征矩阵直接与形函数相关。因此, 质量等其他特征矩阵使用比刚度矩阵低阶的形函数同样可以获得较高的计算精度<sup>[9]</sup>。由于三结点梁单元的自由度较多, 描述中间结点在整体坐标系下的运动状态较为困难, 因此本文在得到形如式(11)的梁单元运动方程时采用了两种形函数: 对刚度矩阵使用三结点梁单元的形函数, 而质量等其他特征矩阵使用只计两端结点的梁单元的

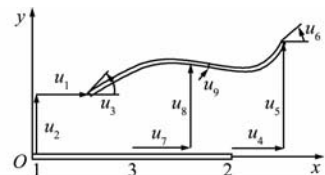


图 2 三结点 Euler-Bernoulli 梁单元

Fig. 2 Three-node Euler-Bernoulli beam element

形函数<sup>[9]</sup>,从而可得三结点梁单元的运动方程为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}^e + 2\dot{\varphi} \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}^e + \ddot{\varphi} \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}^e - \dot{\varphi}^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}^e + \mathbf{K} \mathbf{u}^e + \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (18)$$

对上式进行静力凝聚,消除中间结点的自由度,可得新的单元运动方程为

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + 2\dot{\varphi} \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \ddot{\varphi} \mathbf{C} \mathbf{u} - \dot{\varphi}^2 \mathbf{M} \mathbf{u} + \mathbf{K}^* \mathbf{u} + \mathbf{Q} = \mathbf{F} \quad (19)$$

式中  $\mathbf{u} = \{u_1 \cdots u_6\}$ ,  $\mathbf{K}^*$  为凝聚后的单元刚度矩阵,其表达式见文献[6,7]。

式(19)之单元运动方程是在随动坐标系下建立的,为了实现系统整体运动方程的组集,必须将其转换到整体坐标系下。如图 3 所示随动坐标系,图中  $XOY$  为整体坐标系,  $xoy$  为随动坐标系,其初始时与单元局部坐标系  $x'o'y'$  重合。

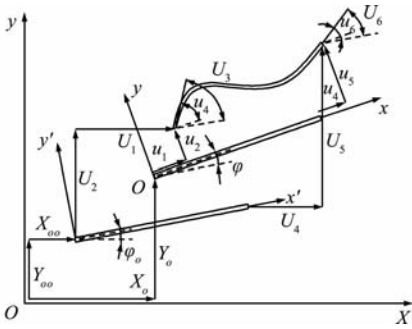


图 3 随动坐标系

Fig. 3 The co-mobile coordinate system

由图 3 可得随动坐标系和整体坐标系下结点位移的相互关系:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}(\mathbf{U} + \mathbf{U}_s) \quad (20)$$

式中  $\mathbf{U} = \{U_1 \cdots U_6\}$  为单元结点在整体坐标系下的位移向量,  $\mathbf{A}$  为方向变换矩阵,  $\mathbf{U}_s$  为附加位移向量。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_s = \begin{bmatrix} -X_0 + X_{00} \\ -Y_0 + Y_{00} \\ -\varphi + \varphi_0 \\ -X_0 + X_{00} - l(c - c_0) \\ -Y_0 + Y_{00} - l(s - s_0) \\ -\varphi + \varphi_0 \end{bmatrix}$$

其中  $c_0 = \cos\varphi_0, s_0 = \sin\varphi_0, \varphi_0$  为梁单元初始时的转角。

为不失一般性,图 3 中的随动坐标系相对单元的位置并未加以限定,为了消除单元运动的刚体位移,特取如下随动坐标系:取随动坐标系的原点在单元的始端,坐标轴  $x$  穿过单元的另一端。因此有以下边界条件:

$$u_1 = u_2 = u_5 = 0 \quad (21)$$

从而可将式(20)改写为

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}_1 \mathbf{U} + \mathbf{U}_0 \quad (22)$$

式中

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -c & -s & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\varphi + \varphi_0 \\ -l[1 - \cos(\varphi - \varphi_0)] \\ 0 \\ -\varphi + \varphi_0 \end{bmatrix}$$

对式(22)求一阶和二阶导,即可得随动坐标系和整体坐标系下结点速度和加速度的相互关系:

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{A}}_1 \mathbf{U} + \mathbf{A}_1 \dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}}_0 \quad (23)$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = \ddot{\mathbf{A}}_1 \mathbf{U} + 2\dot{\mathbf{A}}_1 \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{A}_1 \ddot{\mathbf{U}} + \ddot{\mathbf{U}}_0 \quad (24)$$

将式(22~24)代入式(19)即可得梁单元在整体坐标系下的运动方程:

$$\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{D}^e \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}^e \mathbf{U} + \mathbf{Q}^e = \mathbf{F}^e \quad (25)$$

该方程为显式方程,可得到各特征矩阵的显式表达式<sup>[8]</sup>。使用自由度的对号入座法即可集成由多个单元组成的梁杆系统的运动方程。

## 4 门座起重机变幅工况分析

某型门座起重机臂架系统动力学模型如图 4 所示,该机采用齿轮丝杠(2~7 部件)的变幅方式,变幅电机的驱动特性曲线如图 5 所示。由于丝杠自身刚度相比结构刚度要大的多,故忽略丝杠的弹性变形。系统共有 5 个单元,14 个自由度,其中单元 ⑤ 为杆单元,系统参数为:弹性模量 210 GPa,

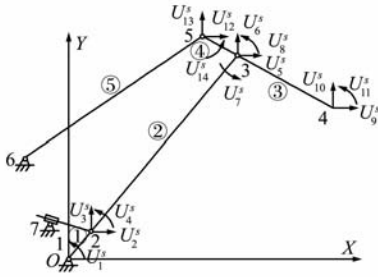


图 4 门座起重机动力学模型  
Fig. 4 Dynamic model of port crane

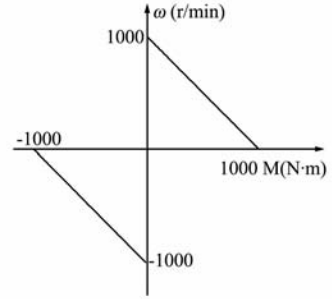


图 5 变幅电机驱动特性  
Fig. 5 Characteristic of range-changed driven mechanism

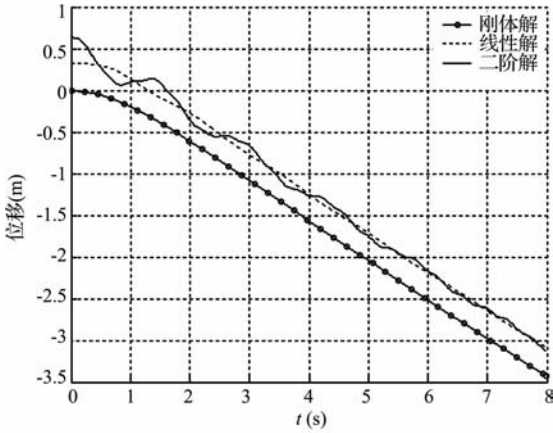


图 6  $U_9$  位置位移  
Fig. 6 Displacement at  $U_9$

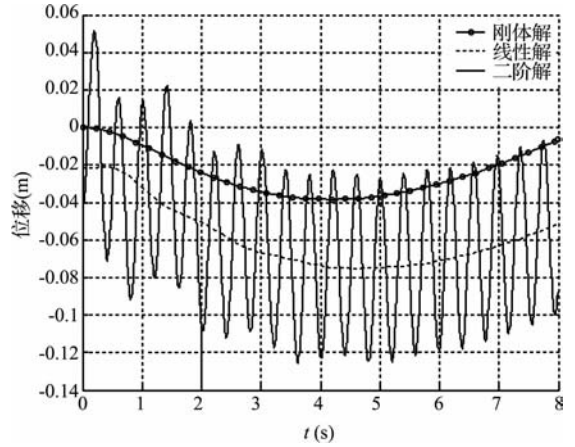


图 7  $U_{10}$  位置位移  
Fig. 7 Displacement at  $U_{10}$

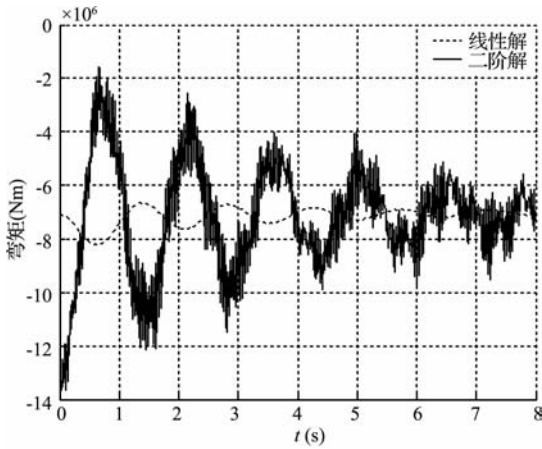


图 8 单元 ① 在结点 2 处的弯矩  
Fig. 8 Moment of element ① at node 2

密度  $7800 \text{ kg/m}^3$ , 起重量为  $12500 \text{ kg}$ , 各单元长度及截面特性见表 1。

对门座起重机臂架的变幅工况进行计及二阶效应的弹性动力分析, 并与刚性解和不计二阶效应的线性解进行了比较, 结果见图 6 ~ 图 8。需要说明的是: 在两种弹性动力分析中均考虑了结构初始静位移, 故其与刚性解间存在一定差值。

从图 6 和图 7 可以看到, 臂架端部  $U_9$  和  $U_{10}$  自由度位置的位移线性解的走势与刚性解基本一致, 如果忽略结构的初始变形, 线性解是在刚性解上的

表 1 门座起重机单元参数

Tab. 1 Element parameters of port crane

单元号	长度(m)	面积( $\text{m}^2$ )	惯性矩( $\text{m}^4$ )
①	5.50	0.11540	0.05
②	35.50	0.11540	0.05
③	16.75	0.10010	0.05
④	6.40	0.10010	0.05
⑤	33.28	0.02543	—

小幅波动。而考虑了二阶效应的弹性解(图中二阶解)在线性解基础上的波动表现的较为明显, 尤其是在变幅的初始阶段。随着变幅的继续,  $U_9$  位置的位移波动幅值逐渐减小, 即运动趋于稳定, 非线性效应逐渐减弱。由于臂架端部的垂直位移  $U_{10}$  较小见图 6, 因此二阶解表现为线性解上幅值变化不大、衰减缓慢的振动。

图 8 为单元 ① 在结点 2 处的弯矩, 二阶解相对线性解有了较大幅度的增加, 最大弯矩增量达到了近 70%。

## 5 结论

本文使用柔性多体系统动力学方法和非线性有限元理论, 结合三结点 Euler-Bernoulli 梁单元的形函数和随动坐标推导了计及二阶效应的柔性梁单元的动力学方程, 获得各种特征矩阵的显式表达, 实现了系统整体动力学方程与传统有限元方法

相同的组集过程。对某型门座起重机柔性臂架系统的变幅工况进行了计及二阶效应的弹性动力分析,计算结果表明二阶位移和内力解均为在线性解基础上的波动,且波动幅值较大,使用线性解作为设计依据是危险的。因此,对大柔度重载机械应考虑了二阶效应的弹性动力分析。

## 参考文献(References):

- [1] Adnan Ibrahimbegovic, Robert L Taylor, H Lim. Non-linear dynamics of flexible multibody systems[J]. *Computers and Structures*, 2003, **81**:1113-1113.
- [2] Chen J S, Huang C L. Dynamic analysis of flexible slider-crank mechanisms with non-linear finite element method[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, **246**(3):389-402.
- [3] Pai P F, Anderson T J, Wheeler E A. Large-deformation test and total-Lagrangian finite-element analyses of flexible beams[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2000, (37):2951-2980.
- [4] 刘锦阳,洪嘉振.刚-柔耦合动力学系统的建模理论研究[J]. *力学学报*, 2002, **34**(3):408-414. (LIU Jin-yang, HONG Jia-zhen. Study on dynamic modeling theory of rigid-flexible coupling systems[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2002, **34**(3):408-414. (in Chinese))
- [5] Zhang D J, Huston R L. On dynamic stiffening of flexible bodies having high angular velocity[J]. *Mech Struct and Mach*. 1996, **24**(3):313-329.
- [6] 夏拥军,陆念力.梁杆结构稳定性分析的高精度 Euler-

- Bernoulli 梁单元[J]. *沈阳建筑大学学报(自然科学版)*, 2006, **22**(3):362-366. (XIA Yong-jun, LU Nian-li. A new Euler-Bernoulli beam element with high accuracy for the stability analysis of beam structures[J]. *Journal of Shenyang Jianzhu University (Natural Science)*, 2006, **22**(3):362-366. (in Chinese))
- [7] 夏拥军,陆念力.梁杆结构二阶效应分析的一种新型梁单元[J]. *工程力学*, 2007, **24**(7):39-43. (XIA Yong-jun, LU Nina-li. A new beam element for second-order effect analysis of beam structures[J]. *Engineering Mechanics*, 2007, **24**(7):39-43. (in Chinese))
- [8] 夏拥军.计及二阶效应的柔性杆系动态分析及在起重机械中的应用[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学, 2007. (XIA Yong-jun. Dynamic analysis with second-order effect for flexible beam systems and its application in crane[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2007. (in Chinese))
- [9] 王勖成,邵敏.有限单元法基本原理和数值方法[M]. 北京:清华大学出版社, 1997. (WANG Xu-cheng, SHAO Min. *The Basic Theory and Numerical Method of The FEM* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1997. (in Chinese))
- [10] 王恒华,沈祖炎,陆瑞明.平面梁杆结构几何非线性分析的一种简便方法[J]. *计算力学学报*, 1997, **14**(1):119-123. (WANG Heng-hua, SHEN Zu-yan, LU Rui-ming. A simple method for geometric nonlinear analysis of plane beam-bar structures[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 1997, **14**(1):119-123. (in Chinese))

## Dynamic analysis of port crane in case of modifying amplitude with second-order effect

XIA Yong-jun\*, MIAO Qian

(China Electric Power Research Institute, Beijing 100055, China)

**Abstract:** The large scale moving elastic dynamics of port crane in case of modifying amplitude with second-order effect is analyzed. The deformation and motion of flexible body are described using the flexible multi-body system dynamics. The general flexible element' dynamic equations with second-order effect in local coordination system are derived based on the nonlinear finite element theory. The dynamic equations of the flexible beam element are derived using the shape function of three-node Euler-Bernoulli beam element. The static condensation and co-mobile coordinate system are used and the dynamic equations of two-node beam element in global coordinate system are developed. The modifying-amplitude case of port crane' boom system is analyzed with second-order effect considered. The results show that the displacement and internal force fluctuate on the linear solutions and the amplitude is bigger when the second-order effect is considered. So the heavy-duty flexible machine must be analyzed using the elastic dynamics with second-order effect.

**Key words:** flexible beam systems; second-order effect; elastic dynamics; three-node Euler-Bernoulli beam element; co-mobile coordination method

# 弹性力学状态变量体系下带有初应力的振动问题

李俊永, 吕和祥\*

(大连理工大学 工程力学系 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116023)

**摘要:**通过在 Hellinger-Reissner 广义势能中引入应变的非线性项, 推导出了弹性力学 Hamilton 体系下的具有初应力的振动方程, 并运用精细积分给出了两端简支的梁、组合梁和四边简支板及组合板在初应力下振动频率。本文结果是严格弹性力学意义(没有引入任何几何变形假设)下的精确解, 为衡量各种计入剪切变形的薄板、中厚板理论的准确性提供了一个标准。

**关键词:**振动; 临界载荷; 固有频率; 精细积分; Hamilton  
**中图分类号:** O343.8      **文献标识码:** A

## 1 引言

通常梁或板的振动理论都是基于简化的(基于平面直法线假定)弹性力学方程基础上的, 即忽略了剪切变形的影响。但剪切变形对固有频率的影响至关重要, 尤其是在高梁和厚板中尤为突出。复合材料层合结构由于横向剪切模量较小, 所以剪切效应的影响比各向同性材料也更为显著。很多研究人员已经对层合结构的振动问题作了大量的研究, 但对于初应力下的振动问题研究的并不多。E. J. Brunelle 和 S. R. Robertson<sup>[1]</sup>研究了简支矩形板在初应力下的振动。Ji-Liang Doong<sup>[2,3]</sup>运用高阶剪切变形理论研究了板和层合板在初应力下的稳定和振动。A. K. Nayak 等<sup>[4]</sup>在三阶位移模型下用有限元法研究了层合板在初应力下的稳定和振动。

S. Srinivas 和 A. K. Rao<sup>[5]</sup>给出了层合板振动和稳定问题的精确解, 但需要求解  $6N(N$  表示层合板的层数)个方程组成的控制方程组。当层合板层数很大的时候, 会给计算带来很大的不便。Timothy W. Taylor 和 Adnan H. Nayfeh<sup>[6]</sup>给出了层合板振动问题的精确解。Jiu Hui Wu 和 A. Q. Liu<sup>[7]</sup>给出了单层薄板振动问题的精确解。本文对于四边简支的矩形板在初应力下的振动问题给出了一个精确解(对于薄板、中厚板及厚板都适用), 为各种考虑剪切变形的板理论的计算结

果的准确程度提供了一个标准。

本文基于文献[8,12]在三维弹性力学的 Hellinger-Reissner 泛函中的应变, 引入了非线性项<sup>[9]</sup>, 在与泛函相应的 Euler 方程中, 得到了由于横向变形膜向应力对法向平衡的贡献<sup>[9]</sup>, 文献[10]从大变形理论也得到类似的方程, 通过引入动力项, 得到了具有初应力的振动方程, 该方程是在严格弹性力学意义下(即没有引入任何几何变形假设)求解初应力下振动的基本方程, 对于求解层合梁和层合板的问题, 本方程能够实现层间在弹性力学严格意义下的连续和平衡。本文为验证考虑剪切变形的各种梁和板在初应力下的振动理论的结果精度提供了一个准确的依据。

## 2 具有初应力二维平面梁的基本方程

弹性力学以状态变量求解, 就是以位移和应力为变量的混合法求解, 与此相对应的是 Hellinger-Reissner 变分原理。以二维为例 Hellinger-Reissner 泛函为

$$U(u, v, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = \int_{\Omega} [\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{xy} (\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}) - \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + \frac{\nu}{E} \sigma_x \sigma_y - \frac{1}{2G} \tau_{xy}^2 - f_x u - f_y v] d\Omega - \int_{S_u} [p_x (u - \bar{u}) + p_y (v - \bar{v})] dS - \int_{S_p} (\bar{p}_x u + \bar{p}_y v) dS \quad (1)$$

以状态变量求解的优点是适于分析层合梁, 可以严格地满足层间位移和应力的连续条件。在  $y =$

收稿日期:2008-08-27; 修改稿收到日期:2010-01-23.

作者简介:吕和祥\*(1938-),男,教授  
(E-mail:lhxdlut@yahoo.com.cn);  
李俊永(1973-),男,博士.

const 面上的状态向量有  $\{u, v, \sigma_y, \tau_{xy}\}$ , 由 Hooke 定律  $\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_x + \nu\epsilon_y)$ , 其中  $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x})^2$ ,  $\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$  代入式(1), 可得关于状态变量  $\{u, v, \sigma_y, \tau_{xy}\}$  的泛函。应变  $\epsilon_x$  取其非线性项是为了计及膜应力  $\sigma_x$  对法向 ( $y$  方向) 平衡的贡献。修正的 Hellinger-Reissner 泛函为

$$U(u, v, \sigma_y, \tau_{xy}) = \int_{\Omega} \{ \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{E}{2} [ (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + \frac{\partial u}{\partial x} (\frac{\partial v}{\partial x})^2 + \frac{1}{4} (\frac{\partial v}{\partial x})^4 ] + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \nu \sigma_y [ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} (\frac{\partial v}{\partial x})^2 ] - \frac{1-\nu^2}{2E} \sigma_y^2 - \frac{1}{2G} \tau_{xy}^2 - f_x u - f_y v \} d\Omega - \int_{s_u} [ p_x (u - \bar{u}) + p_y (v - \bar{v}) ] ds - \int_{s_p} (\bar{p}_x u + \bar{p}_y v) ds$$

对  $u, v, \sigma_y, \tau_{xy}$  变分, 有

$$\delta U(u, v, \sigma_y, \tau_{xy}) = \int_{\Omega} [ (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\tau_{xy}}{G}) \delta \tau_{xy} + (\frac{\partial v}{\partial y} + \nu\epsilon_x - \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_y) \delta \sigma_y - (\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x) \delta u - (\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y + \sigma_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}) \delta v ] d\Omega + \text{边界项} = 0 \quad (2)$$

式中

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} (\frac{\partial v}{\partial x})^2$$

$$\sigma_x = E [ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} (\frac{\partial v}{\partial x})^2 ] + \nu \sigma_y$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \begin{Bmatrix} u \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{G} & -\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} & -\sigma_x^0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ -E \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} & -\nu \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ -\nu \frac{\partial}{\partial x} & \frac{1-\nu^2}{E} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ v \end{Bmatrix} \quad (4)$$

该方程可用于求层合梁的屈曲载荷, 固有频率和在初应力  $\sigma_x^0$  下的振动频率。这里采用状态变量作未知数, 不仅能保证层间位移 ( $u, v$ ) 连续, 也能保证层间应力 ( $\sigma_y, \tau_{xy}$ ) 连续。

同理可得三维混合状态微分方程组:

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{R} \\ -\mathbf{Q} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{F} \quad (5)$$

由式(2)得

$$\frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \{ \frac{\partial v}{\partial y} + \nu [ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} (\frac{\partial v}{\partial x})^2 ] \}$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y + \sigma_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0$$

假定是小变形,  $|\frac{\partial v}{\partial x}| \ll 1$ , 上式中的二次项可以忽略,  $|\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}|$  与  $|\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}|$  和  $|\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}|$  相比可以忽略, 因此得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (3a)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - f_y - \sigma_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (3b)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} - f_x \quad (3c)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_y \quad (3d)$$

方程(3b)中,  $\sigma_x$  是  $u, v$  的函数。该方程中最后一项  $-\sigma_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$  计入了由于横向变形  $v, x$  方向正应力  $\sigma_x$  对  $y$  方向平衡的贡献。如果将  $\sigma_x = \sigma_x^0$  作为初应力作用在弹性体上, 并令  $f_x = -\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, f_y = -\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$  (其中  $\rho$  是密度,  $t$  是时间), 则方程(3a) ~ (3d) 可作为求弹性体在初应力  $\sigma_x^0$  下的振动问题, 即

式中  $\mathbf{F}^T = (u \quad v \quad \sigma_x \quad \tau_{xz} \quad \tau_{xy} \quad w)$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{1}{G} & 0 & & & -\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{1}{G} & & & -\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & -\sigma_x^0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \sigma_y^0 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2\tau_{xy}^0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} & & \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{-E}{1-\nu^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - G \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} & \frac{-E}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{-\nu}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{-E}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{-E}{1-\nu^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - G \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} & \frac{-\nu}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{-\nu}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{-\nu}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

该方程组可用于求解层合板的屈曲载荷,固有频率和在初应力  $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$  下的振动频率,能保证层合板间位移  $(u, v, w)$  连续及层间应力  $(\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy})$  连续。

### 3 算 例

本节运用精细积分计算了两端简支梁,层合梁以及四边简支板和层合板在给定初应力下的振动频率。

#### 3.1 简支梁和组合梁的计算

对于简支梁,可设

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} u_y(y) \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right) e^{i\omega t}, v = \sum_{m=1}^{\infty} v_y(y) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) e^{i\omega t}$$

$$\tau_{xy} = \sum_{m=1}^{\infty} \tau(y) \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right) e^{i\omega t}, \sigma_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sigma(y) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) e^{i\omega t}$$

式中  $\omega$  为自振频率。

代入方程(4)并整理得

$$\frac{\partial}{\partial y} \mathbf{F} = \mathbf{H} \mathbf{F} \quad (6)$$

式中

$$\mathbf{F} = [u_y \quad v_y \quad \tau \quad \sigma]^T \quad (7)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{m\pi}{l} & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ \frac{m\pi}{l} \nu & 0 & 0 & \frac{1-\nu^2}{E} \\ E\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 - \rho\omega^2 & 0 & 0 & -\frac{m\pi}{l} \nu \\ 0 & \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \sigma_x^0 - \rho\omega^2 & \frac{m\pi}{l} & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

借助精细积分<sup>[11]</sup>,常微分方程组(6)的解可以表示为

$$\mathbf{F}|_{y=a} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}|_{y=0} \quad (9)$$

将上式写成展开的形式,令  $\mathbf{F} = (u, \sigma)^T, \mathbf{T} =$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} \\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22} \end{bmatrix}, \text{有方程:}$$

$$\mathbf{u}_a = \mathbf{T}_{11} \mathbf{u}_0 + \mathbf{T}_{12} \boldsymbol{\sigma}_0, \boldsymbol{\sigma}_a = \mathbf{T}_{21} \mathbf{u}_0 + \mathbf{T}_{22} \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (10)$$

代入上下表面边界条件,  $\boldsymbol{\sigma}_a = \boldsymbol{\sigma}_0 = 0$ ,得齐次方程:

$$\mathbf{T}_{21} \mathbf{u}_0 = 0 \quad (11)$$

#### 3.2 简支板和层合板的计算

对于简支板,这里可以只讨论具有初应力  $\sigma_x^0$  的振动,可设

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_z(z) \cos \frac{m\pi x}{l_1} \sin \frac{n\pi y}{l_2} e^{i\omega t}$$

$$v = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_z(z) \sin \frac{m\pi x}{l_1} \cos \frac{n\pi y}{l_2} e^{i\omega t}$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_z(z) \sin \frac{m\pi x}{l_1} \sin \frac{n\pi y}{l_2} e^{i\omega t}$$

$$\tau_{zx} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tau_1(z) \cos \frac{m\pi x}{l_1} \sin \frac{n\pi y}{l_2} e^{i\omega t}$$

$$\tau_{zy} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tau_2(z) \sin \frac{m\pi x}{l_1} \cos \frac{n\pi y}{l_2} e^{i\omega t}$$

$$\sigma_z = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(z) \sin \frac{m\pi x}{l_1} \sin \frac{n\pi y}{l_2} e^{i\omega t}$$

代入方程(5)并整理得

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{F} = \mathbf{H} \mathbf{F} \quad (12)$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ \frac{\nu a}{1-\nu} & \frac{\nu b}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 & \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \\ \frac{Ea^2}{1-\nu^2} + \frac{Eb^2}{2(1+\nu)} - \rho\omega^2 & \frac{Eab}{2(1-\nu)} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\nu a}{1-\nu} \\ \frac{Eab}{2(1-\nu)} & \frac{Eb^2}{1-\nu^2} + \frac{Ea^2}{2(1+\nu)} - \rho\omega^2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\nu b}{1-\nu} \\ 0 & 0 & a^2 \sigma_x^0 - \rho\omega^2 & a & b & 0 \end{bmatrix}$$

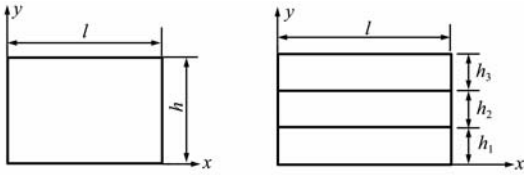
式中  $\mathbf{F}=[u_z \quad v_z \quad w_z \quad \tau_1 \quad \tau_2 \quad \sigma]^T, a = m\pi/l_1, b = n\pi/l_2$ , 求解与梁一样。

### 3.3 例 题

如图 1(a) 简支梁,  $\nu=0.3, h=1.0$ , 弹性模量为  $E$ , 密度为  $\rho_0$ 。如图 1(b) 组合梁,  $h_1=h_3=0.3h, h_2=0.4h, h=1.0, E_1=E_3=2E_2$ 。如图 2(a) 简支板,  $\nu=0.3, h=1.0$ , 弹性模量为  $E$ , 密度为  $\rho_0$ 。如图 2(b) 组合板,  $h_1=h_3=0.3h, h_2=0.4h, E_1=E_3=2E_2$ 。在给定初应力下的振动频率 ( $m=1, n=1$ ) 与 Kirchhoff 直法线解<sup>[13,14]</sup> 的比较如图 3(a~d) 所

示。

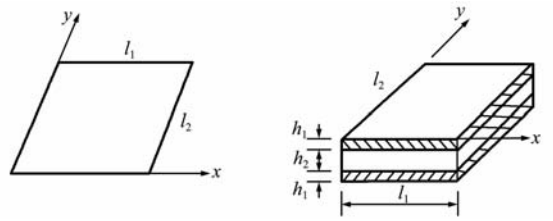
由图 3 可以看出: (1) 当初应力为负, 即为压应力时, 振动频率随初应力的增大而减小, 当到达临界应力时, 振动频率为零。相反, 当初应力为正时, 即为拉应力, 振动频率随初应力的增大而增大。(2) 图中所有线条均为直线, 这正符合  $\rho\omega^2/E_0$  与  $\sigma_x/E_0 (N_x/E_0)$  成正比的理论。(3) 图中直线在  $\rho\omega^2/E_0 = 0$  轴上的截距即为临界应力, 在  $\sigma_x/E_0 = 0 (N_x/E_0 = 0)$  上的截距即为固有频率。由图中可看出, 临界应力和固有频率都小于 Kirchhoff 直法



(a) 简支梁 (b) 简直组合梁

图 1 两端简支的梁和组合梁

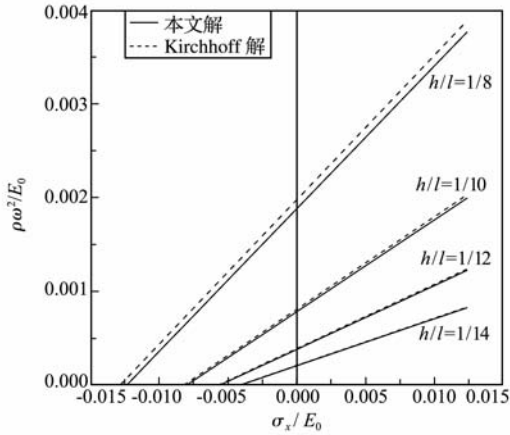
Fig. 1 The beam and composite beam with two ends simply supported



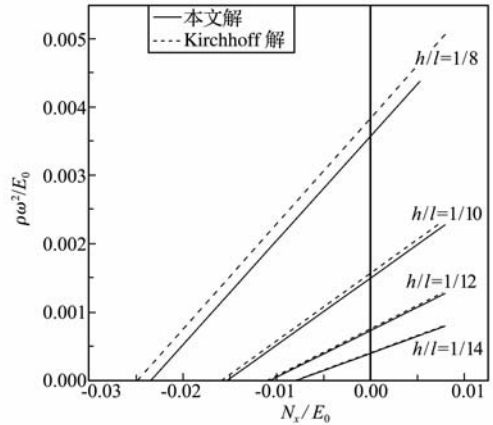
(a) 简支板 (b) 简支组合板

图 2 四边简支的板和组合板

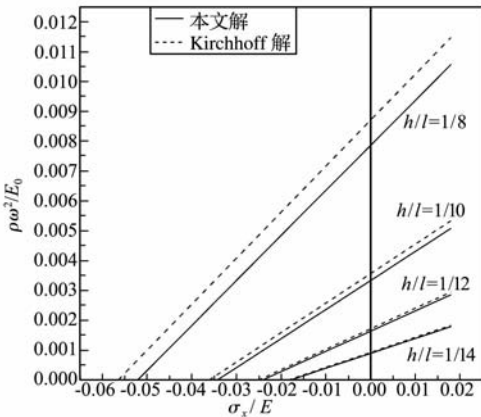
Fig. 2 The plate and composite plate with four edges simply supported



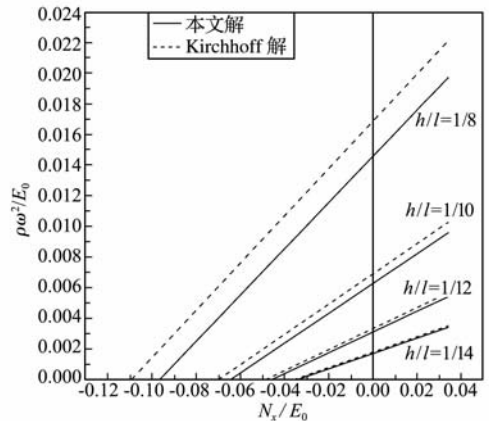
(a) 简支梁  $E_0 = E$



(b) 简直组合梁  $E_0 = E_2$



(c) 简支板  $E_0 = E, l_1 = l_2 = l$



(d) 简支组合板  $E_0 = E_2, l_1 = l_2 = l$

图 3 梁和板在初应力下的振动与经典解的比较

Fig. 3 The comparison of frequency with initial stress with classical results



线解<sup>[13,14]</sup>。这里  $E_0$  在单层梁,板中取  $E$ ,在复合梁,板中取  $E_2$ 。

## 4 结 论

本文为求解梁、板在初应力下的振动问题提供了弹性力学 Hamilton 体系下的基本方程及其精确解。从本文结果可以看出,其比运用直法线假定的经典解要小。这是因为本方法未引入任何几何变形假设,记入了剪切变形的影响,梁越高,板越厚,则剪切变形的影响越大,与经典解的差距也越大。本文为衡量各种计入剪切变形的薄板、中厚板初应力下的振动理论的准确性提供了一个标准。

## 参考文献 (References):

[1] Brunelle E J, Robertson S R. Vibrations of a initially stressed thick plate[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1976, **45**:405-416.

[2] Ji-Liang Doong. Vibration and stability of an initially stressed thick plate according to a high-order deformation theory [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1987, **113**:425-440.

[3] Ji-Liang Doong. Vibration and stability of an initially stressed laminated plate based on a higher-order deformation theory [J]. *Composite Structures*, 1987, **7**: 285-309.

[4] Nayak A K, Moy S S J, Sheno R A. A higher order finite element theory for buckling and vibration analysis of initially stressed composite sandwich plates[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, **286**:763-780.

[5] Srinivas S, Rao A K. Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1970, **6**:1463-1481.

[6] Timothy W. Taylor and Adnan H. Nayfeh. The vibration characteristics of thick rectangular multilayered plates[J]. *Composites Part B*, 1996, **27**:623-631.

[7] Jiu Hui Wu, Liu A Q, Chen H L. Exact solutions for free-vibration analysis of rectangular plates using Bessel Functions[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2007, **74**:1247-1251.

[8] 唐立民. 混合状态 Hamiltonian 元的半解析解和叠层板的计算[J]. 计算结构力学及其应用, 1992, **9**(4): 347-360. (TANG Li-min. The semi-analytical solution of mixed state Hamiltonian element and the computation of laminated plates[J]. *Computational Structural Mechanics and Applications*, 1992, **9**(4): 347-360. (in Chinese))

[9] Richard H. Gallagher. *Finite Element Analysis*[M]. New Jersey: PRENTICE-HALL, INC., Englewood Cliffs, 1975.

[10] ЖНВОЖИЛОВ В В, ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ[M]. Москва: СУДПРОМГИЗ. 1958. (in Russian)

[11] 钟万勰,等. 计算结构力学与最优控制[M]. 大连:大连理工大学出版社,1993. (ZHONG Wan-xie. *Calculating Structural Mechanics and Optimized Control* [M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1993. (in Chinese))

[12] 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用[M]. 北京:科学出版社,1981. (HU Hai-chang. *Variation Principle and Application of Elasticity*[M]. Beijing: Science Press, 1981. (in Chinese))

[13] Timoshenko S P, Gere. J. M. *Theory of Elastic Stability*[M]. New York: McGraw-Hill, 1961.

[14] 沈观林. 复合材料力学[M]. 北京:清华大学出版社, 1996. (SHEN Guan-lin. *Composite Material Mechanics* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1996. (in Chinese))

## Vibration problem of theory of elasticity in Hamilton system under initial stress

LI Jun-yong, LÜ He-xiang\*

(State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

**Abstract:** In this paper, by considering the nonlinear term in Hellinger-Reissner variational principle, the vibration formulation with initial stress in Hamilton system was derived. As examples, frequencies with initial stress of a beam, composite beam, plate and composite plate were studied in precise integration method. The results were the exact solutions based on the exact elasticity theory (not considering any geometrical hypothesis). This paper provides a standard for both thin plates and moderately thick plates theory considering the effect of shear deformation.

**Key words:** vibration; critical load; natural frequency; precise integration method; Hamilton