

# 瞬态对流-扩散方程的变分多尺度解法

朱海涛, 欧阳洁\*

(西北工业大学 应用数学系, 西安 710072)

**摘要:**根据变分多尺度思想,求解了瞬态线性和非线性对流-扩散方程。文中为了简化“细”尺度方程的求解,忽略了该方程的瞬态性,分别用高阶多项式泡函数(High-order Polynomial Bubble)和自由残量泡(Residual Free Bubble)函数近似“细”尺度解,进而引入了消除数值伪振荡的稳定化结构。数值算例验证了本文方法的精确性、稳定性和对高 Peclet 数问题的适应性,证明了上述对“细”尺度模型的简化是可行的。

**关键词:**瞬态对流-扩散方程;变分多尺度;稳定化方法

**中图分类号:** O241      **文献标识码:** A

## 1 引言

数值求解对流-扩散方程的主要困难在于当对流项占优时,从某一时间步开始,每步的计算结果都伴随着剧烈的数值伪振荡,从而使整个数值求解过程失效或不收敛。为此,学者们提出了若干消除数值伪振荡的方法,如 SUPG (Streamline Upwind/Petrov-Galerkin), GLS (Galerkin Least Squares), USFEM (Unusual Stabilized Finite Element Methods) 等稳定化有限元方法及特征有限元和混合有限元方法等;还有许多学者提出高精度多步时间离散的有限元方法,如多步 Runge-Kutta 时间离散格式、多步 Pade 时间离散格式等。

上世纪 90 年代, Hughes 提出了变分多尺度方法的理论框架<sup>[1,2]</sup>。在该计算框架内,首先把待求解的物理量分解为“粗”、“细”两种尺度;然后建立恰当的“细”尺度模型,获得“细”尺度上的近似解;最后通过“粗”、“细”两种尺度的耦合引入消除数值伪振荡的稳定化结构。相对于传统的稳定化方法,变分多尺度方法可以自动获得基于原偏微分方程残差的稳定化结构及与该稳定化结构相适应的稳定化因子。变分多尺度方法在数值传热学、固体和流体力学等领域得到了广泛的应用<sup>[3,4,5]</sup>。本文研究变分多尺度方法在数值求解对流-扩散问

题中的应用。

## 2 对流-扩散方程

考虑以下的对流-扩散方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \nabla u - k \Delta u = \text{fin} \Omega \times [0, T] \quad (1a)$$

$$u(x, 0) = \phi(x) \quad \text{in } \Omega$$

$$u(x, t) = \phi(x, t) \quad \text{on } \partial\Omega \times [0, T] \quad (1b)$$

式中  $\mathbf{a}$  为已知的对流速度,  $k$  是扩散系数, 非负;  $f$  是已知的源项。记  $\zeta_h$  为求解区域  $\Omega$  的正规剖分,  $K \in \zeta_h$  是  $\zeta_h$  中的任一有限单元,  $h_K$  是单元  $K$  的直径,  $h = \max\{h_K\}$ 。检验函数空间定义为

$$W_1 = \{w_h \mid w_h \in H_0^1(\Omega), w_h|_K \in P^1(K), \forall K \in \zeta_h\}$$

式中  $P^1(K)$  是单元  $K$  上连续的线性或双线性多项式函数空间。与时间相关的试验函数空间定义为

$$S_t = \{u_h(\cdot, t) \mid u_h(\cdot, t) \in H^1(\Omega), u_h(\cdot, t)|_K \in P^1(K)\}$$

$$u_h(\cdot, t) = \phi(x, t), \text{ on } \partial\Omega \times [0, T], \forall K \in \zeta_h$$

式(1)的标准有限元解为求  $u_h \in S_t \subset H^1(\Omega)$ , 满足,

$$\left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, w_h\right) + (\mathbf{a} \cdot \nabla u_h, w_h) + k(\nabla u_h, \nabla w_h) = (f, w_h) \quad \forall w_h \in W_1 \subset H_0^1 \quad (2)$$

式中  $H^1$  为一阶 Sobolev 空间,  $H_0^1$  为满足齐次边界条件的  $H^1$  空间,  $(u, w) = \int_{\Omega} u w dx$ 。

当  $k \ll |\mathbf{a}|$  时,求解格式(2)会伴随着剧烈的无任何物理意义的数值伪振荡。消除这些数值伪振荡有两种途径:采用高精度的时间离散格式或有效的空间离散格式。本文采用具有二阶时间精度的 Crank-Nicolson 离散格式进行时间离散,空间离散

收稿日期:2008-06-11;修改稿收到日期:2009-04-15。  
基金项目:国家自然科学基金(10590353,10871159);国家重点基础研究发展计划(2005CB321704)资助项目。  
作者简介:朱海涛(1982-)男,硕士;  
欧阳洁\*(1957-)女,博士,教授  
(Email: jieouyang@nwpu.edu.cn)。

在变分多尺度的理论框架内进行,以提高空间离散格式的数值稳定性。

### 3 对流 - 扩散方程的多尺度分析

记  $\Gamma = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \partial K, \Omega' = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} (\text{int}K)$

$B = \{b \mid b \in H^1(\Omega)/S_i, b = 0 \text{ on } \Gamma\}$ 。在变分多尺度的理论框架内,首先把试验函数和检验函数分解为“粗”、“细”两种尺度,即

$$u(x) = \bar{u}(x) + u'(x) \quad (3)$$

$$w(x) = \bar{w}(x) + w'(x) \quad (4)$$

式中  $\bar{u}(x)$  和  $\bar{w}(x)$  分别为“粗”尺度上的试验函数和检验函数,  $u'(x)$  和  $w'(x)$  分别为“细”尺度上的试验函数和检验函数。 $\bar{u}(x) \in S_i, \bar{w}(x) \in W_1, u'(x) \in B, w'(x) \in B$ , 因此,  $u(x) \in S_i \oplus B$ , 即本文用  $B$  中的函数近似“细”尺度上的解。由  $B$  的性质知此时的总体有限元解仍然可以保证在求解区域上的总体  $C^0$  连续性。把式(3,4)代入式(2)中可得

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial t}, \bar{w} + w' \right) + (\mathbf{a} \cdot \nabla(\bar{u} + u'), \bar{w} + w') + \\ & k(\nabla(\bar{u} + u'), \nabla(\bar{w} + w')) = (f, \bar{w} + w') \end{aligned} \quad (5)$$

由  $W_1$  和  $B$  的线性无关性,可以把式(5)分解为“粗”“细”两种尺度,即

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial t}, \bar{w} \right) + (\mathbf{a} \cdot \nabla(\bar{u} + u'), \bar{w}) + \\ & k(\nabla(\bar{u} + u'), \nabla \bar{w}) = (f, \bar{w}) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial t}, w' \right) + (\mathbf{a} \cdot \nabla(\bar{u} + u'), w') + \\ & k(\nabla(\bar{u} + u'), \nabla w') = (f, w') \end{aligned} \quad (7)$$

#### 3.1 “细”尺度方程的求解

由  $w'$  在  $\partial K$  上为零,式(7)可以写成

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial t}, w' \right)_{\Omega'} + (\mathbf{a} \cdot \nabla(\bar{u} + u'), w')_{\Omega'} + \\ & k(\nabla(\bar{u} + u'), \nabla w')_{\Omega'} = (f, w')_{\Omega'} \end{aligned} \quad (8)$$

式中  $(u, w)_{\Omega'} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K u w dx$ 。式(8)等价于:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial u'}{\partial t}, w' \right)_{\Omega'} + (\mathbf{a} \cdot \nabla u', w')_{\Omega'} + k(\nabla u', \nabla w')_{\Omega'} = \\ & (f, w')_{\Omega'} - \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}, w' \right)_{\Omega'} - \\ & (\mathbf{a} \cdot \nabla \bar{u}, w')_{\Omega'} - k(\nabla \bar{u}, \nabla w')_{\Omega'} \end{aligned} \quad (9)$$

对上式右边第四项应用散度定理,考虑到  $w'$  在  $\partial K$  上为零,可得

$$\left( \frac{\partial u'}{\partial t}, w' \right)_{\Omega'} + (\mathbf{a} \cdot \nabla u', w')_{\Omega'} + k(\nabla u', \nabla w')_{\Omega'} =$$

$$\left( f - \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \mathbf{a} \cdot \nabla \bar{u} + k \Delta \bar{u}, w' \right)_{\Omega'} \quad (10)$$

上式体现了变分多尺度的基本思想,它等价于

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial u'}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \nabla u' - k \Delta u' \right)_{\Omega'} = \\ & - \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \nabla \bar{u} - k \Delta \bar{u} - f \right)_{\Omega'} \end{aligned} \quad (11)$$

即“细”尺度上的解是“粗”尺度上解的误差,“粗”“细”尺度上解的和为原偏微分方程的精确解。需要指出的是,式(11)只在单元内部成立。引入记号  $\varepsilon = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \nabla \bar{u} - k \Delta \bar{u} - f$ , 则式(10)即为

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial u'}{\partial t}, w' \right)_{\Omega'} + (\mathbf{a} \cdot \nabla u', w')_{\Omega'} + \\ & k(\nabla u', \nabla w')_{\Omega'} = -(\varepsilon, w')_{\Omega'} \\ & u' = 0 \text{ on } \partial K \end{aligned} \quad (12)$$

上式即为本文要求解的“细”尺度上的方程,与式(11)等价。

可以看出,式(12)的求解难度不亚于求解原偏微分方程。因此必需对上式进行恰当的简化,并由此建立恰当的“细”尺度模型。本文忽略了“细”尺度方程的瞬态性,假定“细”尺度解与时间无关,从而略去了“细”尺度方程中与时间相关的项。这样,需求解的“细”尺度的方程:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{a} \cdot \nabla u', w')_{\Omega'} + k(\nabla u', \nabla w')_{\Omega'} = -(\varepsilon, w')_{\Omega'} \\ & u = 0 \text{ on } \partial K \end{aligned} \quad (13)$$

Hughes 在文献[1,2]中用 Green 函数近似“细”尺度上方程的解,本文采用两种泡函数来近似上述“细”尺度方程的解:PB<sup>[3]</sup> 和 RFB<sup>[6]</sup>。前者给出解析形式的“细”尺度近似解,后者给出数值形式的近似解。

##### 3.1.1 “细”尺度方程 PB 函数解法

假设在“细”尺度上的试验函数和检验函数均只有一个基泡函数,分别为  $b_1^e$  和  $b_2^e$ 。为了在“细”尺度上仍然考虑对流项的影响,两种基泡函数不能选为相同的函数,则试验函数和检验函数分别为  $u' = u_b b_1^e, w' = w_b b_2^e$ 。把上式代入式(13)可得

$$\begin{aligned} & u_b [(\mathbf{a} \cdot \nabla b_1^e, b_2^e)_{\Omega'} + k(\nabla b_1^e, \nabla b_2^e)_{\Omega'}] w_b = \\ & -(\varepsilon, b_2^e)_{\Omega'} w_b \end{aligned} \quad (14)$$

由  $w_b$  的任意性可得

$$\begin{aligned} & u_b = -(\varepsilon, b_2^e)_{\Omega'} [(\mathbf{a} \cdot \nabla b_1^e, b_2^e)_{\Omega'} + \\ & k(\nabla b_1^e, \nabla b_2^e)_{\Omega'}]^{-1} \end{aligned} \quad (15)$$

即

$$\begin{aligned} & u' = b_1^e \{ -(\varepsilon, b_2^e)_{\Omega'} \} [(\mathbf{a} \cdot \nabla b_1^e, b_2^e)_{\Omega'} + \\ & k(\nabla b_1^e, \nabla b_2^e)_{\Omega'}]^{-1} \end{aligned} \quad (16)$$

假设由“粗”尺度上的解引起的原偏微分方程的残差在每个单元内为常数,引入记号  $\tau$ ,有

$$u' = -\tau(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \nabla \bar{u} - k\Delta \bar{u} - f) \quad (17)$$

$$\tau = b_1^e \{ (1, b_2^e)_{\Omega'} [(\mathbf{a} \cdot \nabla b_1^e, b_2^e)_{\Omega'} + k(\nabla b_1^e, \nabla b_2^e)_{\Omega'}]^{-1} \} \quad (18)$$

这种方法给出了“细”尺度上解的解析形式的近似解。

### 3.1.2 “细”尺度方程 RFB 函数解法

另一种较直观求解式(13)的方法,是直接在一个单元内部用有限元方法解出该方程的数值解。L. P. Franca 基于这种分析提出了双层有限元法。本文采用文献[6]中提出的方法求解式(13),并把它推广到瞬态非线性方程。

考虑如下的瞬态非线性对流 - 扩散方程:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - k\Delta \mathbf{v} = \mathbf{f} \quad (19)$$

上式对应的“细”尺度方程为

$$\mathbf{v}' \cdot \nabla \mathbf{v}' - k\Delta \mathbf{v}' = -(\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}} - k\Delta \bar{\mathbf{v}} - \mathbf{f}) \quad (20)$$

对上式进行线性化,有

$$\mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{v}' - k\Delta \mathbf{v}' = -\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} - \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}} + k\Delta \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{f} \quad (21)$$

式中  $\mathbf{V}_0$  为上一时间步的解,则本文需要求解的在一个单元内部的“细”尺度方程为

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{v}' - k\Delta \mathbf{v}' &= -\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} - \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}} + k\Delta \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{f} \\ \mathbf{v}' &= 0 \quad \text{on} \quad \partial K \end{aligned} \quad (22)$$

设单元的节点数为  $n_{nel}$ , 节点处的形函数为  $N_i, i = 1, \dots, n_{nel}$ , 则“粗”尺度上的解可表示为  $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{c}_i(t)N_i$ , 其中  $i$  是求和指标,  $i = 1, \dots, n_{nel}$ 。由“粗”尺度解的线性化,可将方程(22)化成如下的等价方程:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi_i^i - k\Delta \psi_i^i &= -N_i, i = 1, \dots, n_{nel} \\ \psi_i^i &= 0 \quad \text{on} \quad \partial K \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi_c^i - k\Delta \psi_c^i &= -\mathbf{v}_0 \cdot \nabla N_i, i = 1, \dots, n_{nel} \\ \psi_c^i &= 0 \quad \text{on} \quad \partial K \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi_d^i - k\Delta \psi_d^i &= k\Delta N_i, i = 1, \dots, n_{nel} \\ \psi_d^i &= 0 \quad \text{on} \quad \partial K \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi_f - k\Delta \psi_f &= \mathbf{f} \\ \psi_f &= 0 \quad \text{on} \quad \partial K \end{aligned} \quad (26)$$

方程(23 ~ 26) 分别与方程(22) 右端的时间导数项、对流项、扩散项和源项对应,可知,“细”尺度上的解可表示为

$$\mathbf{v}' = \frac{\partial \mathbf{c}_i(t)}{\partial t} \psi_i^i + \mathbf{c}_i(t)(\psi_c^i + \psi_d^i) + \psi_f \quad (27)$$

对每个单元再进行网格剖分,方程(23 ~ 26) 可用有限元方法求解,从而给出“细”尺度解的数值近似解。

### 3.2 “粗”尺度方程的求解

“粗”尺度上方程的求解过程实际上是“细”尺度上解的回代过程。考虑“粗”方程式(6),引入假设:“细”尺度上的解与时间无关,并考虑“细”尺度上的解和“粗”尺度上解的线性无关性,则式(6)等价于,

$$\begin{aligned} (\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}, \bar{w}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla \bar{u}, \bar{w}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla u', \bar{w}) + \\ k(\nabla \bar{u}, \nabla \bar{w}) + k(\nabla u', \nabla \bar{w}) = (f, \bar{w}) \end{aligned} \quad (28)$$

对上述方程左端的第三、五项应用散度定理,并考虑到细尺度解在边界上为零,可得

$$\begin{aligned} (\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}, \bar{w}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla \bar{u}, \bar{w}) - (u', \mathbf{a} \cdot \nabla \bar{w} + \\ k(\nabla \bar{u}, \nabla \bar{w}) - k(\nabla u', \nabla \bar{w})) = (f, \bar{w}) \end{aligned} \quad (29)$$

把“细”尺度上方程的解代入上式即可得具有“细”尺度特征的“粗”尺度方程。

把式(17)代入式(29) 整理可得

$$\begin{aligned} (\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}, \bar{w}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla \bar{u}, \bar{w}) + k(\nabla \bar{u}, \nabla \bar{w}) + \\ (\tau(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \nabla \bar{u} - k\Delta \bar{u}), \mathbf{a} \cdot \nabla \bar{w} + k\Delta \bar{w}) = \\ (f, \bar{w}) + (\tau f, \mathbf{a} \cdot \nabla \bar{w} + k\Delta \bar{w}) \end{aligned} \quad (30)$$

式(30) 就是采用高阶多项式泡函数求解“细”尺度方程时所求解的总体变分多尺度方程。

在此,对方程(30) 做一些简短的讨论。经典的稳定化方法必需在标准的 Galerkin 变分弱形式中加上一个稳定项才能获得稳定的数值解,这个稳定项有如下的结构:

$$(\epsilon(u), \tau P(w))_{\Omega'} \quad (31)$$

式(31) 中,  $\epsilon(u)$  是原偏微分方程 Euler-Lagrangian 形式的残差,  $\tau$  是稳定化因子,  $P(W)$  是稳定化函数, 它们的确定缺乏严格的数学推理。从式(30) 可看出,多尺度方法引入了与稳定化方法相同的稳定化结构,其突出的优点是稳定化因子和稳定化函数都可以通过对“细”尺度方程的近似而自动获得。在

式(30)中如果取稳定化函数为  $\mathbf{a} \cdot \nabla \bar{w}$ , 即为经典的 SUPG 稳定化方法; 稳定化函数取为  $\mathbf{a} \cdot \nabla \bar{w} - k\Delta \bar{w}$ , 即为经典的 GLS 稳定化方法。

下面给出采用 RFB 求解“细”尺度方程时需要求解的总体变分多尺度方程。把式(27)代入式(29)整理可得

$$\sum_{K \in \xi_h} \frac{\partial \mathbf{c}_i(t)}{\partial t} [(N_i, \bar{w})_K - (\psi_i^j, \mathbf{a} \cdot \nabla \bar{w} + k\Delta \bar{w})_K] + \sum_{K \in \xi_h} \mathbf{c}_i(t) [(\mathbf{a} \cdot \nabla N_i, \bar{w})_K + (k \nabla N_i, \nabla \bar{w})_K - (\psi_a^i + \psi_d^i, \mathbf{a} \cdot \nabla \bar{w} + k\Delta \bar{w})_K] = (\mathbf{f}, \bar{w})_{\Omega'} + \sum_{K \in \xi_h} (\boldsymbol{\psi}_f, \mathbf{a} \cdot \nabla \bar{w} + k\Delta \bar{w})_K \quad (32)$$

式中  $(u, w)_K = \int_K u w dx$ 。

式(32)第一个和号里是与时间相关的项, 第二个和号里是与空间离散相关的项, 右端是右端项。这样的结构便于以后的时间离散。为叙述统一, 式(30)也组织成这样的形式, 即

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}, \bar{w} + \tau \mathbf{a} \cdot \nabla \bar{w} + \tau k \Delta \bar{w}\right) + (\mathbf{a} \cdot \nabla \bar{u}, \bar{w}) + k(\nabla \bar{u}, \nabla \bar{w}) + (\tau(\mathbf{a} \cdot \nabla \bar{u} - k\Delta \bar{u}), \mathbf{a} \cdot \nabla \bar{w} + k\Delta \bar{w}) = (\mathbf{f}, \bar{w}) + (\tau \mathbf{f}, \mathbf{a} \cdot \nabla \bar{w} + k\Delta \bar{w}) \quad (33)$$

其中, 第一项是与时间相关的项, 第二~四项是与空间离散相关的项。

两中“细”尺度方程的求解方法只是求解的具体途径不一样, 但是它们求解的“细”尺度模型都是基于原偏微分方程 Euler-Lagrangian 形式的残差。因此该“细”尺度模型不仅保证了数值求解格式的相容性, 同时也增加了求解格式的数值稳定性。

## 4 时间离散

由式(32,33), 最终可得到统一的如下形式的常微分方程组:

$$\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{C}(t)}{\partial t} + \mathbf{N} \mathbf{C}(t) = \mathbf{F} \quad (34)$$

式中  $\mathbf{M}$  是离散后与时间相关的矩阵,  $\mathbf{N}$  是离散后与空间离散相关的矩阵,  $\mathbf{C}(t)$  是待求解向量,  $\mathbf{F}$  是右端项。采用  $\theta$  类离散格式可得

$$\left(\frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} + \theta \mathbf{N}\right) \mathbf{C}^{n+1}(t) =$$

$$\mathbf{F} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} \mathbf{C}^n(t) - (1 - \theta) \mathbf{N} \mathbf{C}^n(t) \quad (35)$$

在实际计算过程中, 本文采用具有二阶时间精度 Crank-Nicolson 离散格式, 即取  $\theta = 0.5$ 。

## 5 数值算例

本部分给出用上述方法求解线性和非线性对流-扩散方程的数值算例。第一个算例为有解析解的一维常系数对流-扩散方程; 第二、三算例分别为一维和二维 Burgers 方程。

**算例 1** 考虑如下—维常系数对流-扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \text{ in } [0, 1] \times [0, T]$$

$$u(x, 0) = \frac{5}{7} \exp\left\{-\left(\frac{x-x_0}{l}\right)^2\right\} \text{ in } [0, 1]$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0 \quad (36)$$

式中  $x_0 = 2/15, l = 2\sqrt{2}/300$ , 给定  $v = 1, k$  的不同值对应不同 Pe(Peclet) 数。其精确解为

$$u(x, t) = \frac{5}{7\sigma(t)} \exp\left\{-\left(\frac{x-x_0-at}{l\sigma(t)}\right)^2\right\}$$

$$\sigma(t) = \sqrt{1 + 4kt/(l^2)}$$

当 Pe 数大于 1 时, 标准 Galerkin 方法就开始出现数值伪振荡。图 1 给出了 Pe 数为  $10^6$  时标准 Galerkin 方法、PB 方法、RFB 方法在时间  $t = 0.6$  s 时的数值解、精确解及初始条件。可以看出, 本文的方法不仅消除了高 Pe 数时伴随 Galerkin 方法的数值伪振荡, 而且 also 具有很高的精度。变分多尺度方法可以较好地求解高 Pe 数问题。

**算例 2** 一维 Burgers 方程

考虑如下的一维 Burgers 方程

$$u_t + uu_x = ku_{xx} \text{ in } [0, 1] \times [0, T]$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \text{ in } [0, T]$$

$$u(x, 0) = \sin(\pi x) \text{ in } [0, 1]$$

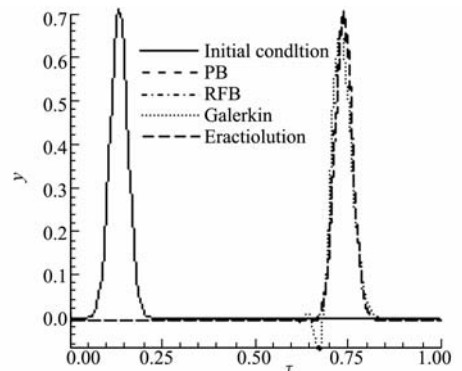


图 1 算例 1 的数值解 ( $t = 0.6$  s,  $Pe = 10^6$ )  
Fig. 1 Numerical solution for the problem 1

当  $k$  很小时,对应的方程为对流占优,在  $x = 1$  处形成尺度很小的边界层效应。Galerkin, PB 和 RFB 方法求解的结果如图 2 所示,实际计算中划分了 100 个单元,可以看出 RFB 方法具有明显优势。实际上,采用同样的计算网格,在  $k = 0.001$  这个量级上时, PB 方法在右端出现数值振荡,而采用同样计算网格的 RFB 方法可以在  $k = 10^{-6}$  时,仍然保持稳定。可见相对于 PB 函数法, RFB 函数法有较好的稳定性。

**算例 3 二维 Burgers 方程**

考虑如下的二维 Burgers 方程

$$\begin{aligned}
 u_t + uu_x + vu_y &= k\Delta u \\
 v_t + uv_x + vv_y &= k\Delta v \\
 v(x, y, 0) &= \sin(\pi y)\cos(\pi x)
 \end{aligned}$$

in  $[0, 1] \times [0, 1]$

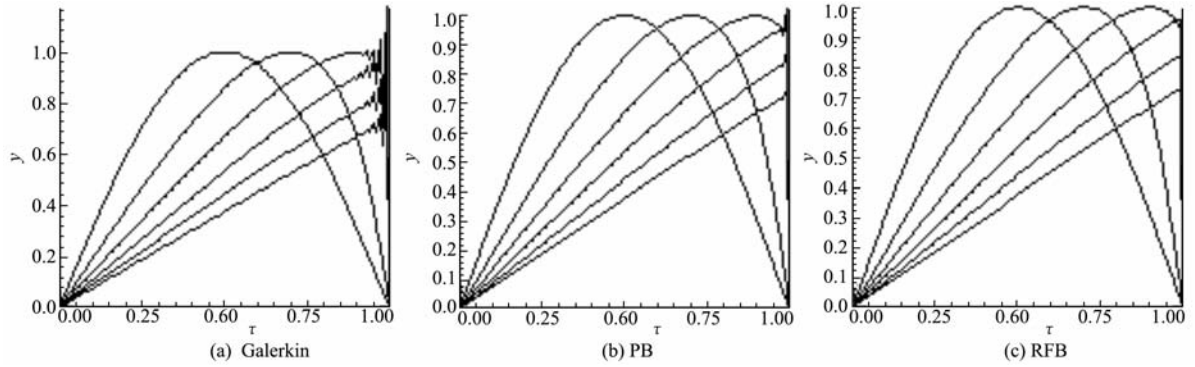


图 2 一维 Burgers 方程的数值解 ( $k = 0.001$ )  
Fig. 2 Numerical solution for the one dimension Burgers equation

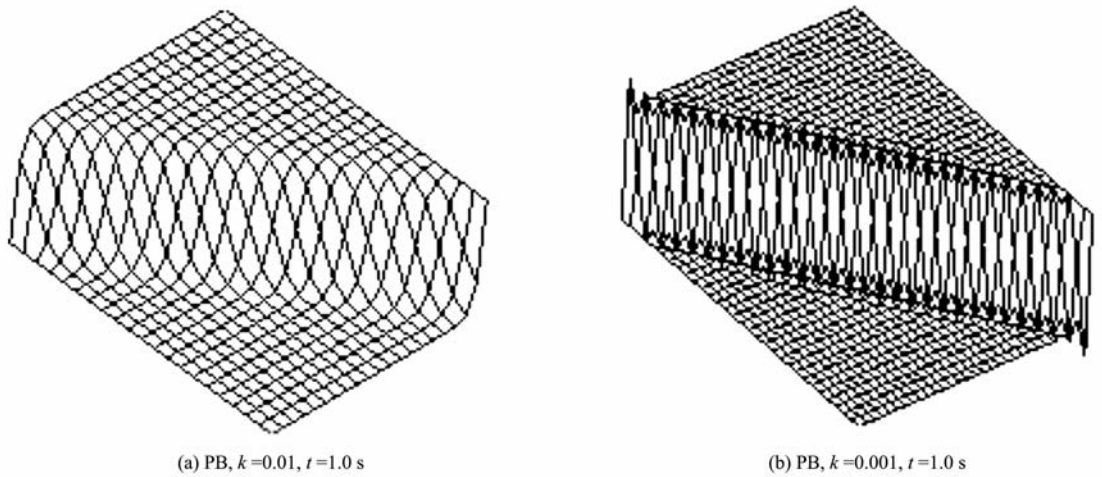


图 3 二维 Burgers 方程 PB 方法的数值解  
Fig. 3 Burgers equations' solution of PB method

**6 结 论**

(1) 变分多尺度方法是一种可以描述具有多尺度效应的空间离散方法。通过引入基于原偏微

$$\begin{aligned}
 v(x, 0, t) &= v(x, 1, t) = 0 \\
 \frac{\partial u}{\partial n}(x, 0, t) &= \frac{\partial u}{\partial n}(x, 1, t) = 0 \\
 v(x, y, 0) &= \sin(\pi y)\cos(\pi x) \\
 v(x, 0, t) &= v(x, 1, t) = 0 \\
 \frac{\partial v}{\partial n}(0, y, t) &= \frac{\partial v}{\partial n}(1, y, t) = 0
 \end{aligned}$$

当  $k$  值较小时,在通过点  $(0, 0)$  和  $(1, 1)$  的对角线上会出现解的间断现象。图 3 分别给出了  $k = 0.01$  和  $k = 0.001, t = 1.0$  s 时,在  $20 \times 20$  的均匀计算网格上 PB 函数方法的数值结果。实际上,在  $k = 0.001$  时,标准 Galerkin 方法和 RFB 函数法都出现了很强烈的数值振荡, PB 函数法虽然也出现了一定的数值振荡,但总体上可以较准确地捕捉到间断的位置,所得的结果是可以接受的。

分方程残差的稳定项,该方法不仅可以有效地消除由对流项占优引起的数值伪振荡,而且可以自动获得稳定化结构的稳定化系数和稳定化函数。

(2) 对于“细”尺度模型的求解,基于“细”尺度

解与时间无关的假定,应用 PB 函数和 RFB 函数逼近“细”尺度模型的解,均能获得满意的计算结果。

(3) PB 和 RFB 方法均具有很好的精确度和稳定性,适用于求解高 Peclet 数问题。相对于 PB 法,RFB 方法具有较高的精度,但是不适合求解高维的数值解具有内部间断的问题。PB 方法实施简单,具有较小的计算量。

## 参考文献(References):

[1] Hughes T J R. Multiscale Phenomena: Green's functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods[J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1995, **127**:387-401.

[2] Hughes T J R, Feijoo G R, Luca M, et al. The variational multiscale methods-a paradigm of computational mechanics [J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1998, **166**(1-2):3-24.

[3] Ayub M, Masud. A new stabilized formulation for convective-diffusive heat transfer [J]. *Numer Heat Transfer*, 2003, **43**(6):601-625.

[4] Garikipati K, Hughes T J R. A variational multiscale approach to strain localization-formulation for multi-dimensional problems [J]. *Colmput Methods Appl Mech Engrg*, 2000, **188**(1-3).

[5] Bazilevs Y, Calo V M, Cottrell J A, et al. Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows [J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2007, **197**(1-4).

[6] Masud A, Khurram R A. A multiscale /stabilized finite element method for advection-diffusion equation [J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2004, **193**:1997-2018.

[7] Franca L P, Nesliturk A, Stynes M. On the stability of residual-free bubbles for convection-diffusion problems and their approximation by two-level finite element method [J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1998, **166**:35-49.

## Variational multiscale method for the transient convection-diffusion equations

ZHU Hai-tao, OUYANG Jie\*

(School of Natural and Applied Science, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract:** This paper followed the lines of variational multi-scale method and presented a variational multi-scale finite element method for the transient linear and nonlinear convection-diffusion equations. The  $\theta$  family of methods were employed for the time discretization. Making a proper approximation to the fine scale solution, variational multi-scale method can stabilize the linear and nonlinear convective term with the help of the stabilization term based on the residual of the Partial Differential Equations. Modeling the fine scale by high-order polynomial bubble and residual free bubble, with the assumption that the fine scale solution is time independent corrects the lack of stability of the standard Galerkin weak form. The numerical results show that the method is stable, accurate, and yields high approximation to the high Peclet number problems.

**Key words:** transient convection-diffusion; variational multi-scale; stabilized method