

基于控制响应的时变系统模态参数 辨识的改进子空间方法

张 强*, 吴庆鸣, 张志强

(武汉大学 动力与机械学院, 武汉 430072)

摘要:提出了一种基于系统控制信号激发的响应数据来辨识时变系统模态参数的改进子空间方法。该方法以系统控制响应信号建立系统的状态空间输出方程并构造了一个广义 Hankel 矩阵, 通过对该矩阵做奇异值分解 (SVD), 用广义能观阵的估计代替输出矩阵, 然后利用奇异值矩阵的正交性, 有效地降低了噪声敏感性和计算量, 从而容易地辨识出等效状态下的系统矩阵, 最后采用转换矩阵辨识出时变系统的模态参数。通过理论分析、仿真和实验, 讨论了不同信噪比对辨识结果的影响, 验证了该方法的有效性。

关键词:时变系统; 模态参数辨识; 子空间方法; 状态空间
中图分类号: O32; TB123; N945.14 **文献标识码:** A

1 引言

时变系统的模态参数辨识一直是个难点问题, 由于状态空间模型具有优良的性质, 利用其辨识自由响应数据的模态参数得到了广泛的应用, 其中最典型的代表是特征系统实现算法, 它将子空间方法的最小实现应用到模态分析中, 取得了很好地效果。但该方法只能用于线性时不变系统中, 不能很好地解决时变系统的辨识问题。

随着子空间方法的发展, 更多辨识控制响应模态参数的研究应运而生。马革新^[1]等将基于 A-PEX 算法子空间跟踪方法引入辨识算法, 利用神经网络法有效地减少了辨识的运算量和存储量。吴日强^[2]等利用改进的子空间方法辨识出三连杆系统的时变模态参数。杨利芳^[3]等通过使用模态试验数据对线性时变系统参数的多种辨识方法, 给出了详细比较, 分析了影响算法精度的影响因素及不同方法的影响程度。Guillaume^[4]等利用递归子空间方法对时变系统的多输入多输出状态空间模型进行了辨识。Berkant^[5]利用降阶模型获得 4SID 方法的递推格式实现了最小的系统矩阵, 从而辨识出系统的状态子空间。Federico^[6]等构建

了一个多参量状态空间的 LPV 系统来映射它们之间的相关性, 在噪声的干扰下辨识出结构的参量。Per Sjövall^[7]等从耦合系统中的测试数据完成了子结构系统的辨识。

子空间方法大多是基于单一数据的, 也就是在辨识中只使用单次测量的数据。对于时变系统, 单次测量数据不能满足大量数据输入与输出, 因此对于一组互不相关的输入信息, 利用相邻时刻系统响应数据的 Hankel 矩阵, 可以实现两个相邻时刻间系统状态矩阵的转换。本文利用测量的控制响应信号建立了状态空间输出方程, 通过输入(控制)响应数据的改进子空间方法辨识出等效状态下的系统矩阵, 运用转换矩阵, 最终辨识出时变系统的模态参数。仿真和实验算例验证了该方法的有效性。

2 时变系统状态方程

对于一个 n 阶线性时变控制激励下的强迫振动系统, 其运动方程式可以表述如下:

$$\mathbf{M}(t)\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{E}(t)\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}_0\mathbf{u}(t) \quad (1)$$

式中 t 是连续时间, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ 是位移向量, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{r \times 1}$ 是输入向量; $\mathbf{M}(t)$, $\mathbf{E}(t)$ 和 $\mathbf{K}(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 分别为时变质量、阻尼和刚度矩阵, $\mathbf{B}_0 \in \mathbb{R}^{n \times r}$ 是输入影响矩阵。对于 m 个输出的测试系统, 其结构系统的输出可表示为^[8]:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_a\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}_v\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}_d\mathbf{x}(t) \quad (2)$$

式中 $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ 是输出向量, \mathbf{C}_a , \mathbf{C}_v 和 $\mathbf{C}_d \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 分别是加速度、速度和位移的输出影响矩阵。

收稿日期:2008-03-27; 修改稿收到日期:2008-11-12.

基金项目:湖北省流体机械与动力工程装备技术重点实验室
开放基金(2007208010013)资助项目.

作者简介:张 强*(1978-), 男, 博士.
(E-mail: engine2003@126.com);
吴庆鸣(1947-), 男, 教授, 博士生导师.

定义状态向量:

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{2n \times 1} \quad (3)$$

将上式代入运动方程(1),则上述运动方程可以改写为状态空间运动方程组:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (4)$$

式中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{E} \end{bmatrix} \quad (5a)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times r} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_0 \end{bmatrix} \quad (5b)$$

式中 $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{2n \times 2n}$ 和 $\mathbf{B} \in \mathcal{R}^{2n \times r}$ 分别为系统矩阵和输入(控制)矩阵。将式(3)代入式(2),则系统输出可由式(2)转换为

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{z}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (6)$$

式中

$$\mathbf{C} = [\mathbf{C}_d - \mathbf{C}_a\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \quad \mathbf{C}_v - \mathbf{C}_a\mathbf{M}^{-1}\mathbf{E}] \quad (7a)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{C}_a\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_0 \quad (7b)$$

式中 $\mathbf{C} \in \mathcal{R}^{m \times 2n}$ 和 $\mathbf{D} \in \mathcal{R}^{m \times r}$ 分别为系统的输出影响矩阵和直接传递矩阵。由式(7b)知,当加速度不是测量输出时,式(6)中的 \mathbf{D} 矩阵将不存在。

由控制理论和模态参数辨识理论^[9]知,需要将连续时间系统的状态空间方法转化为离散时间系统。设 τ 为测试系统的采样周期,则式(4)和式(6)可转换成:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(k+1) &= \mathbf{G}\mathbf{z}(k) + \mathbf{h}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{z}(k) + \mathbf{d}\mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (8)$$

式中 k 为采样点序号, $\mathbf{z}(k) \in \mathcal{R}^{2n \times 1}$ 是在 $k\tau$ 时刻系统的状态向量, $\mathbf{y}(k) \in \mathcal{R}^{m \times 1}$ 是在 $k\tau$ 时刻的实测响应向量, $\mathbf{u}(k) \in \mathcal{R}^{r \times 1}$ 是在 $k\tau$ 时刻系统的输入向量, $\mathbf{G} \in \mathcal{R}^{2n \times 2n}$ 为系统矩阵, $\mathbf{h} \in \mathcal{R}^{2n \times r}$ 为输入(控制)矩阵, $\mathbf{C} \in \mathcal{R}^{m \times 2n}$ 为系统输出响应矩阵, $\mathbf{d} \in \mathcal{R}^{m \times r}$ 为系统的直接传递矩阵。且 \mathbf{G} 与 \mathbf{A} 和 \mathbf{h} 与 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 有如下关系:

$$\mathbf{G} = e^{\mathbf{A}\tau} \approx \tau\mathbf{A} + \mathbf{I}, \quad \mathbf{h} = \int_0^\tau e^{\mathbf{A}t} dt \mathbf{B} \approx \tau\mathbf{B} \quad (9, 10)$$

3 控制响应数据的子空间方法

3.1 基本方法

对于线性时变系统,系统的参数矩阵对于任意的非奇异状态相似变换是可辨识的,基于文献[1]和[10],可以得到系统在小段采样时间之间,即系统从时刻 k 到 $k+q-1$ 之间是时不变的,则有:

$$\mathbf{Y}(k) = \mathbf{\Gamma}(k)\mathbf{Z}(k) + \mathbf{H}\mathbf{U}(k) \quad (11)$$

式中

$$\mathbf{Y}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(k) & \mathbf{y}(k+1) & \cdots & \mathbf{y}(k+q-1) \\ \mathbf{y}(k+1) & \mathbf{y}(k+2) & \cdots & \mathbf{y}(k+q) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{y}(k+p-1) & \mathbf{y}(k+p) & \cdots & \mathbf{y}(k+p+q-2) \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{\Gamma}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{G} \\ \cdots \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{p-1} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\mathbf{Z}(k) = [\mathbf{z}(k) \quad \mathbf{z}(k+1) \quad \cdots \quad \mathbf{z}(k+q-1)] \quad (14)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}\mathbf{h} & \mathbf{d} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}\mathbf{G}\mathbf{h} & \mathbf{C}\mathbf{h} & \cdots & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{C}\mathbf{G}^{p-2}\mathbf{h} & \mathbf{C}\mathbf{G}^{p-3}\mathbf{h} & \cdots & \mathbf{d} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{U}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k) & \mathbf{u}(k+1) & \cdots & \mathbf{u}(k+q-1) \\ \mathbf{u}(k+1) & \mathbf{u}(k+2) & \cdots & \mathbf{u}(k+q) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{u}(k+p-1) & \mathbf{u}(k+p) & \cdots & \mathbf{u}(k+p+q-2) \end{bmatrix} \quad (16)$$

式中 $\mathbf{Y}(k) \in \mathcal{R}^{p_m \times q}$ 是由实测数据所构成的广义 Hankel 矩阵, $\mathbf{\Gamma}(k) \in \mathcal{R}^{p_m \times q}$ 为广义能观阵, $\mathbf{Z}(k) \in \mathcal{R}^{2n \times q}$ 是连续状态向量, $\mathbf{H} \in \mathcal{R}^{p_m \times p_r}$ 为包含 Markov 参数的下三角 Toeplitz 矩阵, $\mathbf{U} \in \mathcal{R}^{p_r \times q}$ 是系统的连续输入(控制)Hankel 矩阵,且 $p_m = mp$, $p_r = rp$ 。

为得到矩阵 \mathbf{G} ,需要找到转换矩阵 $\bar{\mathbf{G}}$,使其和 \mathbf{G} 的特征值相同,引入由 $k+1$ 时刻到 $k+p$ 时刻的数据所组成新的 Hankel 矩阵 $\mathbf{\Gamma}(k+1)$,有^[11]:

$$\bar{\mathbf{G}} = \mathbf{\Gamma}_1^+(k+1)\mathbf{\Gamma}_2(k) \quad (17)$$

式中 $\mathbf{\Gamma}_1(k+1)$ 为 $\mathbf{\Gamma}(k+1)$ 的前 $p-1$ 个子块, $\mathbf{\Gamma}_2(k)$ 为 $\mathbf{\Gamma}(k)$ 的后 $p-1$ 个子块, $\mathbf{\Gamma}_1^+(k+1)$ 表示矩阵 $\mathbf{\Gamma}_1(k+1)$ 的 Moore-Penrose 广义逆。

定义 $\mathbf{U}^\perp(k) = \mathbf{I} - \mathbf{U}^T(k)(\mathbf{U}(k)\mathbf{U}^T(k))^{-1}\mathbf{U}(k)$ ^[1-3], 则可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(k)\mathbf{U}^\perp(k) &= \mathbf{\Gamma}(k)\mathbf{Z}(k)\mathbf{U}^\perp(k) = \\ & [\mathbf{P}_s \quad \mathbf{P}_n] \begin{bmatrix} \Sigma_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_s^T \\ \mathbf{V}_n^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

假设 $\mathbf{Y}(k)\mathbf{U}^\perp(k)$ 的秩为 s ,式(18)表明,适当地选择 p 和 q , $\mathbf{\Gamma}(k)$ 将张成与 $\mathbf{Y}(k)\mathbf{U}^\perp(k)$ 相同的列向量空间。且可以得到 $\mathbf{\Gamma}(k)$ 的估计:

$$\mathbf{\Gamma}(k) = \mathbf{P}_s \quad (19)$$

式中 \mathbf{P}_s 是 $\mathbf{Y}(k)\mathbf{U}^\perp(k)$ 的左奇异正交矩阵中对应前

s 个奇异值的子块。 $\Sigma_s = \text{diag}[\sigma_1(k), \sigma_2(k), \dots, \sigma_s(k)]$ 是由非零奇异值所构成的对角矩阵, 且 $s=2n$ 。当系统无噪声干扰时, $\Sigma_n=0$; 当系统有噪声干扰时, Σ_n 会随着信噪比的大小而改变。

由式(17)、(18)和(19)可以得到^[12]:

$$\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{P}_{s1}^+(k+1) \mathbf{P}_{s2}(k) \approx \mathbf{Q}(\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{G}} \mathbf{Q}^{-1} \quad (20)$$

式中 $\tilde{\mathbf{G}}$ 为与式(8)中 \mathbf{G} 等效的离散时间状态方程的状态转换矩阵, $\mathbf{P}_{s1}(k+1)$, $\mathbf{P}_{s2}(k)$ 分别为 \mathbf{P}_s 的前 $(p-1)m$ 行和后 $(p-1)m$ 行元素所组成的矩阵, \mathbf{Q} 是 \mathbf{G} 进行相似变换所需要的非奇异矩阵。由式(9)可求得 k 时刻等效的连续时间状态方程式的状态转换矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 。

3.2 基于控制响应数据的改进子空间方法

由式(20)知, 上节方法相当于求解一个最小二乘问题, 因此为降低噪声敏感性可适当提高矩阵维数。而该子空间方法只使用了广义能观阵 $\mathbf{F}(k)$ 估计值的一部分, 为了充分利用整个广义能观阵的估计值 \mathbf{P}_s , 将该式改为

$$\tilde{\mathbf{G}} \approx \mathbf{Q}(\mathbf{P}_s^T \mathbf{P}_s)^{-1} \mathbf{P}_s^T \mathbf{P}_s \bar{\mathbf{G}} \mathbf{Q}^{-1} \quad (21)$$

可以看出该式给出了 $\tilde{\mathbf{G}}$ 的一个估计, 与式(20)比较, 可以得出两式的差别在于用广义能观阵 $\mathbf{F}(k)$ 的估计 \mathbf{P}_s 替换了输出矩阵 \mathbf{C} 。令 $\mathbf{P}_{s(i)} \in \mathcal{R}^{m \times 2n}$, 且 $i=1, 2, \dots, p$ 为 \mathbf{P}_s 的递推子块。根据式(22)和式(23)得

$$\mathbf{y}^T(k) \mathbf{y}(k) = \mathbf{z}^T(k) \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{z}(k) + \mathbf{u}^T(k) d^T \mathbf{C} \mathbf{z}(k) + \mathbf{z}^T(k) \mathbf{C}^T d \mathbf{u}(k) + \mathbf{u}^T(k) d^T d \mathbf{u}(k) \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{z}^T(k) \mathbf{P}_s^T(k) + \mathbf{u}^T(k) d^T = \\ & \mathbf{z}^T(k) [\mathbf{P}_{s(1)}^T \quad \mathbf{P}_{s(2)}^T \quad \dots \quad \mathbf{P}_{s(p)}^T] + \mathbf{u}^T(k) d^T = \\ & [\mathbf{y}^T(k) \quad \mathbf{y}^T(k+1) \quad \dots \quad \mathbf{y}^T(k+p-1)] \end{aligned} \quad (23)$$

得到

$$\begin{aligned} & \mathbf{z}^T(k) \mathbf{P}_s^T \mathbf{P}_s \mathbf{z}(k) + \mathbf{z}^T(k) \mathbf{P}_s^T d \mathbf{u}(k) + \\ & \mathbf{u}^T(k) d^T \mathbf{P}_s \mathbf{z}(k) + \mathbf{u}^T(k) d^T d \mathbf{u}(k) = \\ & [\mathbf{y}^T(k) \quad \mathbf{y}^T(k+1) \quad \dots \quad \mathbf{y}^T(k+p-1)] \times \\ & [\mathbf{y}^T(k) \quad \mathbf{y}^T(k+1) \quad \dots \quad \mathbf{y}^T(k+p-1)]^T = \\ & \sum_{i=k}^{k+p-1} \mathbf{y}_i^T \mathbf{y}_i \end{aligned} \quad (24)$$

可以看出该方法是用从 k 时刻到 $k+p-1$ 时刻的平均值代替了 k 时刻的值, 相当于对数据进行了一次滤波, 因此利用该方法可以求得数据在一个时间段内的平均值, 提高了数据对噪声的抗干扰能力和精确性。

这种算法虽然降低了系统对噪声的敏感性, 但同时由于在子空间中应用了整个广义能观阵的估计值, 因此计算量大大增加。考虑到式(19)中 \mathbf{P}_s

是左伪逆矩阵中对应前 n 个奇异值的子块, 由这些子块的正交性知:

$$\mathbf{P}_{s1}^+(k) \mathbf{P}_{s2}(k) = (\mathbf{P}_{s1}^T(k) \mathbf{P}_{s1}(k))^{-1} \mathbf{P}_{s1}^T(k) \mathbf{P}_{s2}(k) = \mathbf{P}_{s1}^T(k) \mathbf{P}_{s2}(k) \quad (25)$$

通过上式可以看出, $\mathbf{P}_{s1}^T(k) \mathbf{P}_{s1}(k)$ 是单位阵, 故求其广义逆的过程变成了求该矩阵转置的过程, 降低了计算量。

4 模态参数辨识模型与物理模型间的转换

固有频率和阻尼比可以通过式(5a)所示的系统矩阵 \mathbf{A} 的特征分析来确定, 标准模态是矩阵 $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}$ 的特征向量, 为系统矩阵 \mathbf{A} 的左下角部分。虽然通过系统矩阵 \mathbf{A} 可以确定系统的模态参数, 但却不能直接通过它来辨识其模态值。根据加速度、速度和位移组成的输出影响矩阵, 设转换矩阵 \mathbf{T} , 以便完成参数辨识模型与物理模型间的转换。

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \\ \mathbf{T}_2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

式中

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{C}_d \tilde{\mathbf{C}} + \mathbf{C}_v \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{A}}^{-1} + \mathbf{C}_a \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{A}}^{-2} \quad (27)$$

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1 \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{C}_d \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{C}_v \tilde{\mathbf{C}} + \mathbf{C}_a \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \quad (28)$$

式中 $\tilde{\mathbf{C}}$ 和 $\tilde{\mathbf{A}}$ 分别是系统的输出影响矩阵 \mathbf{C} 和系统矩阵 \mathbf{A} 的辨识矩阵。

当只有加速度、速度或是位移中一个参量用于系统的测量时, 转换矩阵 \mathbf{T} 将变为

$$\mathbf{T}_d = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}} \\ \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{A}} \end{bmatrix}, \text{ 只有位移参量;}$$

$$\mathbf{T}_v = \mathbf{T}_d \tilde{\mathbf{A}}^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \\ \tilde{\mathbf{C}} \end{bmatrix}, \text{ 只有速度参量;}$$

$$\mathbf{T}_a = \mathbf{T}_d \tilde{\mathbf{A}}^{-2} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{A}}^{-2} \\ \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \end{bmatrix}, \text{ 只有加速度参量。}$$

具有与时变系统运动学模型的系统矩阵 \mathbf{A} 同样类型的状态转换矩阵 $\bar{\mathbf{A}}$ 可以通过下面的转换得到

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1} \quad (29)$$

经过上述转化, 得到的系统矩阵 $\bar{\mathbf{A}}$ 具有与式(5a)相同的型式, 其中由式(29)知: 标准模态向量是矩阵 $\bar{\mathbf{A}}$ 的下子块矩阵的负特征向量。因此在质量参数已知时有

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}(k) \bar{\mathbf{K}}(k) & -\mathbf{M}^{-1}(k) \bar{\mathbf{E}}(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (30)$$

式中 $\bar{\mathbf{K}}$ 和 $\bar{\mathbf{E}}$ 即为系统识别出的刚度、阻尼矩阵,由式(30)可得:

$$\bar{\mathbf{K}}(k) = -\mathbf{M}(k)\bar{\mathbf{A}}_{21}, \quad \bar{\mathbf{E}}(k) = -\mathbf{M}(k)\bar{\mathbf{A}}_{22} \quad (31,32)$$

5 算例分析

5.1 仿真

为了针对性地考察本文方法的有效性,本节使用三自由度弹簧-质量模型首先来进行系统刚度辨识的仿真验证,系统模型如图 1 所示。系统中质量块的质量不变,分别为 $m_1 = m_2 = m_3 = 1 \text{ kg}$, 初始刚度与阻尼分别为 $k_1 = k_2 = k_3 = 200 \text{ N/m}$, $c_1 = c_2 = c_3 = 2 \text{ Ns/m}$; $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 和 \mathbf{x}_3 分别是三质量块相对平稳位置的位移,三个质量块初始位移、速度及加速度均为零,第三个质量块受力为 150 N 。采用四阶 Runge-Kutta 法求得系统动态响应,采样率为 100 Hz ,采样时间为 5 s ,系统的输入取高斯白噪声,取式(12)中 $\mathbf{Y}(k) \in \mathcal{R}^{20 \times 30}$ 。考虑三种刚度时变情况,即周期、线性变化和突变。

(1) 刚度周期变化算例:

$$k_1(t) = 200 + 50\sin(2\pi + 8t) \quad (33)$$

(2) 刚度线性变化算例:

$$k_1(t) = 200 - 25t \quad (34)$$

(3) 刚度突变算例:

$$k_1(t) = \begin{cases} 200 & t < 2.5\text{s} \\ 100 & t \geq 2.5\text{s} \end{cases} \quad (35)$$

利用 Matlab 仿真工具箱得到系统在噪声干扰

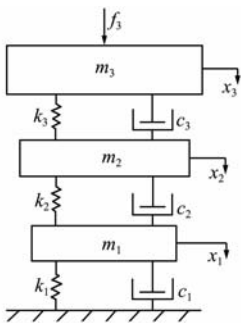


图 1 三自由度的弹簧-质量模型
Fig. 1 A 3 D. O. F spring-mass model

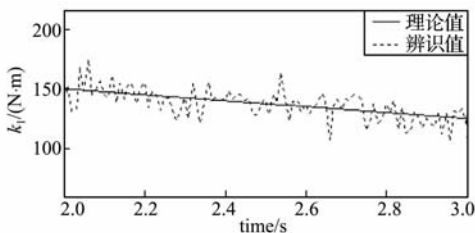


图 3 SNR=40 时,参数 k_1 线性变化的辨识结果
Fig. 3 Ramp change of k_1 when SNR=40

下的仿真动态响应数据。定义信噪比(SNR)是信号均值与噪声均值的比值。图 2~图 4 中实线和虚线分别是系统时变参数刚度 k_1 在信噪比为 40 的理论值和辨识值,从图中可以看出,在噪声的影响下,本文方法也可以有效地实时跟踪时变系统的参数 k_1 的变化。图 2 所示, k_1 在理论曲线的极值点位置变化比较显著,在过了这个位置后其辨识值可以快速有效地跟踪到系统的参数变化。图 3 所示,刚度的辨识效果较好,这是由于刚度值较大,计算斜率变化较小,因此整个区间的参数变化较为满意。图 4 可以看出参数突变前后时间段里辨识值与理论值变化较大,这里因为采用的算法是以时间段为计算单位,在突变前后由于数值变化大造成的辨识误差较大。

针对不同信噪比在 k_1 的三个变化下辨识结果的精度问题,引入了平均相对误差的绝对值(MAPE),定义如下:

$$\text{MAPE} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{k_{1i} - \hat{k}_{1i}}{k_{1i}} \right| \times 100\%$$

式中 k_{1i}, \hat{k}_{1i} 和 N 分别是辨识得到的结果,理论值和采样点数。表 1 是各种参数变化情况在不同噪声水平下辨识得到的 MAPE 值。

由表 1 可以看出,信噪比为 10 时, k_1 辨识结果的 MAPE 值比较大,信噪比在 20 以后 k_1 辨识结果的 MAPE 值变化较小,且辨识精度较高,对噪声不敏感。由此可得该方法在信噪比较大时,具有辨识精度高和较强的抗噪性。

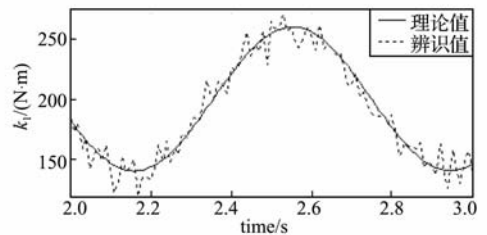


图 2 SNR=40 时,参数 k_1 周期变化的辨识结果
Fig. 2 Periodic change of k_1 when SNR=40

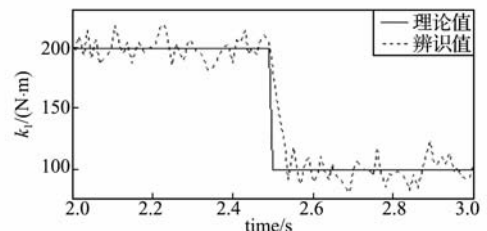


图 4 SNR=40 时,参数 k_1 突变的辨识结果
Fig. 4 Step change of k_1 when SNR=40

表 1 不同信噪比下 k_1 辨识结果的 MAPE 值
Tab. 1 The MAPE of k_1 identification results at different SNR

信噪比	正弦(%)	线性(%)	突变(%)
10	2.125	1.732	2.475
20	1.347	1.139	1.613
40	0.938	0.843	0.978
60	0.661	0.522	0.794
100	0.374	0.324	0.451

5.2 振动台实测数据

为进一步验证本文提出的方法,采用砌块成型机振动台测试数据进行实验数据分析。该设备对砌块的振动密实作用力是通过一对偏心轴组成的激振器提供的,激振器每次振动大约需要 4 s,其简化的振动模型如图 1 所示。在振动台面上共布置 4 个加速度传感器进行振动测试,采样频率为 2048 Hz,为保证振动信息的收集,采样时间为 10 s,本文对平稳振动后的前 0.1~0.24 s 数据进行分析,由于激振器是由电动机带动,因此本文只针对周期变化的刚度 k_3 进行实验验证。系统中质量块的质量不变,分别为 $m_1 = 63$ kg, $m_2 = 461$ kg 和 $m_3 = 152$ kg,初始刚度与阻尼分别为 $k_1 = k_2 = k_3 = 36000$ N/m, $c_1 = c_2 = c_3 = 8.5$ Ns/m, x_1 , x_2 和 x_3 分别是三质量块相对平稳位置的位移,三个质量块初始位移、速度及加速度均为零,第三个质量块受激振力为 2.52×10^4 N。图 5 所示是其中一个采样点的刚度 k_3 在激振器周期变化下的实测值与辨识结果。

从图 5 中可以很容易地看出 k_3 的辨识值仍可以快速有效地跟踪到其参数变化,只是对于极值点位置的辨识结果有所偏差,主要是由于参数在这些位置前后的变化发生了剧变,即从 k 时刻到 $k+p-1$ 时刻的平均值不能反映当前时刻的模态参数的原因。表 2 为 k_3 在不同信噪比下周期变化的 MAPE 值。

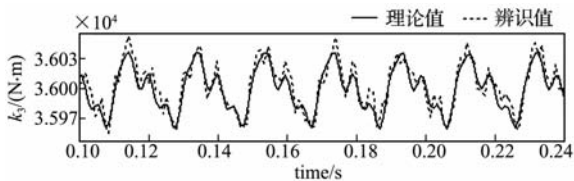


图 5 SNR=40 时 k_3 在激振器周期变化下辨识结果

Fig. 5 Periodic change of k_3 when SNR=40

表 2 不同信噪比下 k_3 辨识结果的 MAPE 值
Tab. 2 The MAPE of k_3 identification results at different SNR

信噪比	10	20	40	60	100
周期变化(%)	4.358	3.423	2.673	1.547	0.495

从表 2 得到,在实测状态下模态参数随着信噪比的变化,其 MAPE 值都很小,均在 5% 以下,辨识精度良好。根据图 5 及表 2 知,在参数变化情况下,文中提到的方法在信噪比较小时,辨识结果会有较大的误差外,其他情况下该方法对系统模态参数具有较好的辨识精度,且对噪声不敏感。

6 结 论

本文方法对时变系统运动学方程进行推导,得出时变系统转换矩阵,为减少其辨识计算量及存储量,通过增加转换矩阵计算维数和利用奇异值矩阵的正交性,得到了一种改进算法,改善了运用子空间方法对时变系统参数辨识较难得到实际物理模型下的模态参数的情况,同时该算法也降低了计算量和对噪声的不敏感性。通过仿真及实测验证了该方法的正确性及有效性。总之该方法具有较强的参数辨识能力和对噪声不敏感等优点,对于怎样降低信噪比较小时及参数在突变时刻前后造成的辨识精度误差较大的情况仍需进一步深入研究。

参考文献 (References):

- [1] 马革新,张大力,李衍达. 基于子空间跟踪的状态空间系统辨识方法及其在时变系统辨识中的应用[J]. 信号处理,1998,14(4):346-352. (MA Ge-xin, ZHANG Da-li and LI Yan-da. Subspace tracking in state space modal system identification with applications in time-varying system identification[J]. *Signal Processing*, 1998,14(4):346-352. (in Chinese))
- [2] 吴日强,于开平,邹经湘. 改进的子空间方法及其在时变结构参数辨识中的应用[J]. 工程力学,2002,19(4):67-70. (WU Ri-qiang, YU Kai-ping, ZOU Jing-xiang. An improved subspace method and its application to parameter identification of time-varying structures[J]. *Engineering Mechanics*, 2002,19(4):67-70. (in Chinese))
- [3] 杨利芳,于开平,庞世伟等. 用于线性时变结构系统辨识的子空间方法比较研究[J]. 振动与冲击,2007,26(3):8-12. (YANG Li-fang, YU Kai-ping, PANG Shi-wei. Comparison study on identification methods applied to linear time-varying structures[J]. *Journal of*

- Vibrations and Shock*, 2007, **26**(3): 8-12. (in Chinese))
- [4] Guillaume Mercère, Laurent Bako and Stéphane Lecoche. Propagator-based methods for recursive subspace modal identification [J]. *Signal Processing*, 2008, **88**:468-491.
- [5] Berkant Savas, David Lindgren. Rank reduction and volume minimization approach to state-space subspace system identification [J]. *Signal Processing*, 2006, **86**:3275-3285.
- [6] Federico Felici, Jan-Willem and Michel Verhaegen. Subspace identification of MIMO LPV systems using a periodic scheduling sequence[J]. *Automatica*, 2007, **43**:1684-1697.
- [7] Per Sjövall, Thomas Abrahamsson. Substructure system identification from coupled system test data[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2008, **22**:15-33.
- [8] Huang Chen-far, Ko Wen-jiunn, Peng Yen-tun. Identification of modal parameters from measured input and output data using a vector backward auto-regressive with exogeneous model[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, **276**:1043-1063.
- [9] Joseph Lardiès. Relationship between state-space and ARMAV approaches to modal parameter identification[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2008, **22**:611-616.
- [10] Bart De Moor, Marc Moonen and Lieven Vandenberghe. A geometrical approach for the identification of state space models with singular value decomposition [J]. *International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1988, **4**:2244-2247.
- [11] Edwin Reynders, Rik Pintelon and Guido De Roeck. Uncertainty bounds on modal parameters obtained from stochastic subspace identification[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2008, **22**: 948-969.
- [12] 庞世伟,于开平,邹经湘.识别时变结构模态参数的改进子空间方法[J].应用力学学报,2005, **22**(2):184-188. (PANG Shi-wei, YU Kai-ping, ZOU Jing-xiang. Improved subspace method with application in linear time-varying structural modal parameter identification[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2005, **22**(2):184-188. (in Chinese))

An improved subspace method with time-varying system modal parameter identification based on control response data

ZHANG Qiang*, WU Qing-ming, ZHANG Zhi-qiang

(College of Power & Mechanical Engineering, Wuhan University, Wuhan 430072)

Abstract: A data-processing method concerning subspace identification is presented to improve the identification of time-varying system modal parameters from measured system control response data. Using system control response data, the identification procedure of this method includes the following steps. A state space output equation was first founded, and then a generalized Hankel matrix was constructed. After that, the state space system matrix of structure was identified by singular value decomposition (SVD) of the Hankel matrix. By replacing the output matrix with the estimation of generalized observability matrix and utilizing the orthogonality of the singular value matrix, the sensitivity to noise and computational complexity were abated effectively, making it easier to distinguish the equivalent system matrix. Finally, the time-varying system modal parameters were identified by conversion matrix. The practicability of the proposed method has been verified by theoretical analysis, simulation and experimental data.

Key words: time-varying system; modal parameter identification; subspace method; state space