文章编号:1003－207(2014)05－0033－09

寿险定价的线性优化模型

王　波

(浙江广播电视大学工商学院,浙江 宁波　315016)

摘　要:实际的金融市场中存在多种不同期限的利率。在定义最大累积函数的基础上建立了一个称为"收支问题"的线性规划模型,这个模型的最优值刻画了合理安排保费资金的投资期限所能够达到的最大保险支付水平,从而给出了多利率条件下寿险费率的计算依据。使用局部优化方法证明了收支问题最优解的两个性质,这些性质说明在满足保险支出的条件下,保险收入资金应该优先考虑期限较长(即利率较大)的投资。对于典型的寿险产品模型,给出了最优解的结构,针对两个具体实例列出了计算结果。结果表明,在保险费率的计算中,起主要作用的是最大期限的利率,其次是不同利率的一个综合水平。

关键词:多种利率;最大累积函数;线性优化;收支问题;寿险定价

中图分类号:F840　　**文献标识码:**A

1　引言

传统的精算理论是按照单一的预定利率计算寿险费率的,但是一般情况下实际的金融市场利率与预定利率并不一致,因此产品的定价要受到市场利率的影响。这个影响来自于两个方面,一个是利率随机性所带来的风险,另一个是利率的期限结构。关于前者,自 1971 年以来,一批学者对随机利率下的寿险定价进行了系统的研究。随机的利率模型主要有两种,早期采用时间序列方法对息力函数进行建模,自 1990 年以来部分学者采用摄动方法,利用 O－U 过程,Wiener 过程和反射 Wiener 过程对息力累积函数进行建模,基于这种模型 Beekman 和 Fuelling[1-2], De Scheppe 等[3-4], Perry 和 Stadje[5], Milvesky[6]研究了确定年金在随机利率下的现值,得到了期望值和方差的一些公式以及矩母函数和分布函数;Kaas 等[7], De Schepper 等[8]相继利用凸序的相关性质给出了随机利率下年金现值的上界。此外 Parker[9]还讨论了随机利率下贴现函数的问题,Zaks[10]则在假定各年利率均为独立且具有相同期望和方差的随机变量序列下,求出了确定年金累计值的期望和方差公式。

尽管随机利率下的寿险精算取得了比较丰富的成果,但是要应用于实际却有很大的难度。一般情况下寿险保单并不使用随机模型进行定价,这是由于随机模型虽然能在一定程度上降低利率的不确定性,但是并不能消除利率不确定性所带来的风险;同时寿险具有长期性的特点,而现实的金融市场复杂多变,我们很难对长时间内的利率建立合理的模型并作出准确的预测与估计,因此寿险业更愿意采用确定性的定价模型。同时为了规避利率风险,通常是采用一个比较保守的预定利率加上分红的方法。

与随机利率下的大量研究相比,关于利率期限结构的影响在文献中却很少涉及,当市场利率水平较高的时候,这种影响并不明显。以中国为例,从上世纪八十年代末到九十年代中期一直处于高利率的环境之中,其中一年期的存款基准利率最高的时候曾经达到 11.34%,在大部分的时间内都高于当时寿险业 8.8%的预定利率,所以当寿险准备金采用一年期利率投资生息时,并不会影响未来的保险偿付能力,这时候就不会去关注利率期限结构的影响。但是自从 1996 年以来,由于宏观经济形势发生了很大的变化,人民银行持续地下调基准利率,一年期存款利率最低的时候达到了 1.98%,导致保险监管部门将预定利率调低到了 2.5%。由于新的预定利率与原来 8.8%的水平有较大的差距,所以一度对寿险业务的发展产生了较大的影响,同时当一年期利率低于预定利率时,寿险公司原有的资金运用方法有可能会产生巨大的利差损失。考虑到一般情况下

收稿日期:2012－04－29;**修订日期:**2013－05－09

作者简介:王波(1970－),男(汉族),浙江宁波人,浙江广播电视大学工商学院,讲师,研究方向:最优化算法与应用.

长期的利率要高于一年期的短期利率，因此就提出了一个问题：我们是否可以通过对寿险资金的投资期限进行合理安排以提高保险金的支付能力，或者说提高寿险公司的盈利能力？最大能够达到多少？

基于上述背景，王波[11-12]提出了在多利率条件下合理配置保费资金的投资期限以求得最大的保险金额，田存福等[13]则考虑通过优化责任准备金的投资期限以求得最大的期末盈余。两者都是利用线性规划建立模型，区别主要是目标函数不同。由于上述模型都是根据每个时间点资金的流入与流出相等的原则构造线性规划的约束，不便于对优化解的性质作进一步的分析，因此本文在定义最大累积函数的基础上根据收支相等原则建立了一个称之为“收支问题”的线性规划模型。根据这个模型我们能够计算出多利率条件下最大的保险金支付水平，从而给出费率定价的依据，同时使用局部优化方法证明了最优解的两个性质，由此给出了典型寿险产品收支问题的优化解结构。这不仅简化了实际应用中的计算，而且还基本上回答了这么一个问题：在寿险精算中，起主要作用的是什么样期限的利率？这既为预定利率的制定确立了理论基础，又为寿险资金的运用提供了参考意见。

2 最大累积函数

假设市场上有 T 种无风险利率，期限分别为 $1,2,\cdots,T$，对应的利率为 $i_t \geqslant 0$（复利），其中 t 表示利率期限。我们将 1 个单位的资金在经过总期限为 t 的数次投资计息后所得到的最大本利和用函数 $v(t)$ 来表示，即：

$$v(t) = \max_{s_1+s_2+\cdots+s_k=t} (1+i_{s_1})^{s_1}(1+i_{s_2})^{s_2}\cdots(1+i_{s_k})^{s_k}\ (1\leqslant s_1,s_2,\cdots,s_k\leqslant T)$$

$v(t)$ 是利息理论中累积函数概念[14]在多利率条件下的一个推广，我们称之为最大累积函数（maximum accumulation function），特别地规定 $v(0)=1$。一般情况下，长期利率要高于短期利率，这时候就有 $v(t)=(1+i_t)^t(1\leqslant t\leqslant T)$。

根据定义，$v(t)$ 满足超指数性质，即对于任意的 t_1 和 t_2，有 $v(t_1)v(t_2)\leqslant v(t_1+t_2)$。如果对于任意的 $1\leqslant t_1,t_2\leqslant T\leqslant t_1+t_2$，函数 $v(t)$ 还满足条件：

$$v(t_1)v(t_2)\leqslant v(T)v(t_1+t_2-T) \tag{1}$$

那么当 $t>T$ 时，我们就有 $v(t)=v(T)\cdot v(t-T)$，这时 $v(t)$ 称为 T 周期的。

条件(1)意味当投资期限 t 大于 T 时，其最优投资方案的唯一性，即首先考虑期限为 T 的投资，然后再考虑剩余期限内的投资。如果更进一步地假设，对于任意的 $1\leqslant t_1,t_2\leqslant t\leqslant t_1+t_2\leqslant T$，最大累积函数 $v(t)$ 均满足条件：

$$v(t_1)v(t_2)\leqslant v(t)v(t_1+t_2-t) \tag{2}$$

那么我们就称 $v(t)$ 为正规的。

3 收支问题

这节中我们考虑一种简化的寿险定价模型。在模型中，保险费的收入期是从时间 1 到 T（即最大利率期限），时间 x 的期望收入为 $f(x)\ (x=1,2,\cdots,T)$；保险金的支付期是从时间 $T+1$ 到 $2T$，当保险金额等于 1 个单位时，时间 x 的期望支出为 $g(x)(x=T+1,T+2,\cdots,2T)$。我们的问题是：如何来安排保险费的投资期限，使得将来能够支付的保险金达到最大？也就是下列线性规划问题：

$$\max \lambda$$

$$s.t.\ \sum_{s=T+1}^{2T} x_t^s = f(t)(1\leqslant t\leqslant T) \tag{3}$$

$$\sum_{t=1}^{T} v(s-t)x_t^s = \lambda g(s)(T+1\leqslant s\leqslant 2T) \tag{4}$$

$$x_t^s \geqslant 0\ (1\leqslant t\leqslant T;T+1\leqslant s\leqslant 2T) \tag{5}$$

其中 $v(t)$ 是最大累积函数。我们称上述规划问题为收支问题（income-outcome problem，IOP），$f(x)$ 和 $g(x)$ 分别称为 IOP 的收入函数和支出函数。

命题 1 如果最大累积函数 $v(t)$ 是 T 周期的，则 IOP 存在最优解 $(\hat{x},\hat{\lambda})$，对于每一个 $i,\hat{x}_i^{T+i}=\min(f(i),\hat{\lambda}g(T+i)/v(T))$。

证明：假设 $(\hat{x},\hat{\lambda})$ 是 IOP 的一个最优解，如果 $\hat{x}_i^{T+i}<\min(f(i),\hat{\lambda}g(T+i)/v(T))$，那么就同时存在两个基变量 $\hat{x}_i^k>0,\hat{x}_j^{T+i}>0(1\leqslant i\neq j\leqslant T,T<k\neq T+i)$。令 $\alpha=\min(\hat{x}_i^k,\dfrac{v(k-j)}{v(k-i)}\hat{x}_j^{T+i})$，构造一个新的解 $\hat{x}'$：

$$\begin{cases}\hat{x}_i'^{T+i}=\hat{x}_i^{T+i}+\alpha,\hat{x}_j'^k=\hat{x}_j^k+\dfrac{v(k-i)}{v(k-j)}\alpha\\ \hat{x}_i'^k=\hat{x}_i^k-\alpha,\hat{x}_j'^{T+i}=\hat{x}_j'^{T+i}-\dfrac{v(k-i)}{v(k-j)}\alpha\end{cases}$$

其余情况下 $\hat{x}'^s_t=\hat{x}_t^s$。

显然 $\hat{x}'$ 满足约束条件(3)，(4)和(5)($s\neq T+i$)，且有：

$$\sum_{t=1}^{T} v(T+i-t)x'^{T+i}_t=\lambda g(T+i)+\alpha\cdot(v(T)$$

$-v(k-i)v(T+i-j)/v(k-j))$

由于 $v(t)$ 是 T 周期的，根据式(1)，有：

$v(k-i)v(T+i-j)\leqslant v(T+k-j)=v(T)v(k-j)$

如果 $v(k-i)v(T+i-j)<v(T)v(k-j)$，则 $\sum_{t=1}^{T}v(T+i-t)x'^{T+i}_{t}>\lambda g(T+i)$，与 $(\hat{x},\hat{\lambda})$ 是最优解矛盾。所以 $v(k-i)v(T+i-j)=v(T)\cdot v(k-j)$，由此可以推出 $\sum_{t=1}^{T}v(T+i-t)x'^{T+i}_{t}=\lambda g(T+i)$，这样就得到了一个新的最优解 $(\hat{x}',\hat{\lambda})$，在这个最优解中 $\hat{x}'^{T+i}_{i}>\hat{x}^{T+i}_{i}$。因此可以断言存在最优解 $(\hat{x},\hat{\lambda})$，使得 $\hat{x}^{T+i}_{i}=\min(f(i),\hat{\lambda}g(T+i)/v(T))$。由于上述过程中并不改变其它基变量 $\hat{x}^{T+l}_{l}(l\neq i)$ 的数值，所以使用相同的方法，最终就能够得到一个最优解 $(\hat{x},\hat{\lambda})$，使得对于每一个 i，$\hat{x}^{T+i}_{i}=\min(f(i),\hat{\lambda}g(T+i)/v(T))$，证毕。

命题 1 表明了，IOP 的最优解中时间 i 的保险收入优先支付时间 $T+i$ 的保险金支出，那么多余的收入是如何支付不足的支出？下面先来考虑一种特殊的情况。

对于一个 IOP，如果存在 $1\leq\mu<T$，使得下面两种情况之一成立：

(1)当 $x\leqslant\mu$ 时 $f(x)=0$；$x\geqslant T+\mu+1$ 时 $g(x)=0$。

(2)当 $x\geqslant\mu+1$ 时 $f(x)=0$；$T+1\leqslant x\leqslant T+\mu$ 时 $g(x)=0$。

那么我们称该 IOP 为半收支问题(quasi income-outcome problem，QIOP)。

命题 2 假设最大累积函数 $v(t)$ 是正规的，则 QIOP 存在最优解 $(\hat{x},\hat{\lambda})$，对于它的任意两个基变量 $x^{k}_{i}>0$ 和 $x^{l}_{j}>0$，如果 $i\leqslant j$，则有 $k\geqslant l$。

证明：与命题 1 类似，利用式(2)，略。

如果最大累积函数是正规的，命题 2 显示 QIOP 的最优解具有非常良好的结构：最近时刻的收入优先支付最远时刻的支出。例如图 1 所示，时间 $\mu+1$ 的收入首先支付时间 $T+\mu$ 的支出，如果有盈余，则支付时间 $T+\mu-1$ 的支出，如果有亏缺，则亏缺部分由时间 $\mu+2$ 的收入来支出；最后时间 T 的收入支付 $T+1$ 时刻的支出，如果有盈余，则支付 $T+2$ 时刻的支出，如果有亏缺，则亏缺部分由 $T-1$ 时刻的收入来支出。准确地说，最优解的基变量是 $\{x^{s_j}_{t_j},j=1,2,\cdots,T;\mu+1=t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_T=T;T+\mu=s_1\geqslant s_2\geqslant\cdots\geqslant s_T=T+1\}$，$t_j$ 取遍从 $\mu+1$ 到 T 的每一个值，s_j 取遍从 $T+1$ 到 $T+\mu$ 的每一个值。

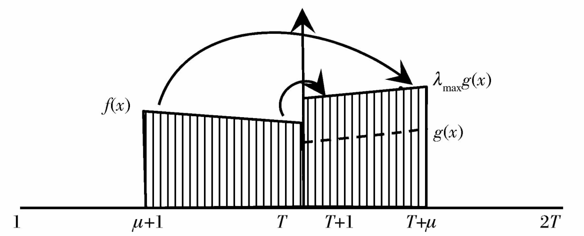

图 1　QIOP 最优解示意图(第一种情况)

根据命题 1 与 2，当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足一定的条件时，我们能够清楚地描述 IOP 最优解的结构，即下列推论：

推论 1　假设最大累积函数 $v(t)$ 是正规的，则 IOP 存在最优解 $(\hat{x},\hat{\lambda})$，$\{\hat{x}^{T+i}_{i}=\min(f(i),\hat{\lambda}g(T+i)/v(T))$；$i=1,2,\cdots,T\}$ 是 $\hat{x}$ 的基变量，并且有：

(1) 如果存在正整数 $\mu\leqslant T$，使得 $x\leqslant\mu$ 时 $h(x)\leqslant 0$，$\mu<x\leqslant T$ 时 $h(x)\geqslant 0$，其中 $h(x)=f(x)-\hat{\lambda}g(T+x)/v(T)$。则 $\hat{x}$ 的其它基变量为 $\{\hat{x}^{s_j}_{t_j},j=1,2,\cdots,T;\mu+1=t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_T=T;T+\mu=s_1\geqslant s_2\geqslant\cdots\geqslant s_T=T+1\}$，$t_j$ 取遍从 $\mu+1$ 到 T 的每一个值，s_j 取遍从 $T+1$ 到 $T+\mu$ 的每一个值(图 2)；

(2) 如果存在正整数 $\mu\leqslant T$，使得 $x\leqslant\mu$ 时 $h(x)\geqslant 0$，$\mu<x\leqslant T$ 时 $h(x)\leqslant 0$($h(x)$ 同上)。则 $\hat{x}$ 的其它基变量为 $\{\hat{x}^{s_j}_{t_j},j=1,2,\cdots,T;1=t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_T=\mu;2T=s_1\geqslant s_2\geqslant\cdots\geqslant s_T=T+\mu+1)\}$，$t_j$ 取遍从 1 到 μ 中的每一个值，s_j 取遍从 $T+\mu+1$ 到 $2T$ 的每一个值(图 3)。

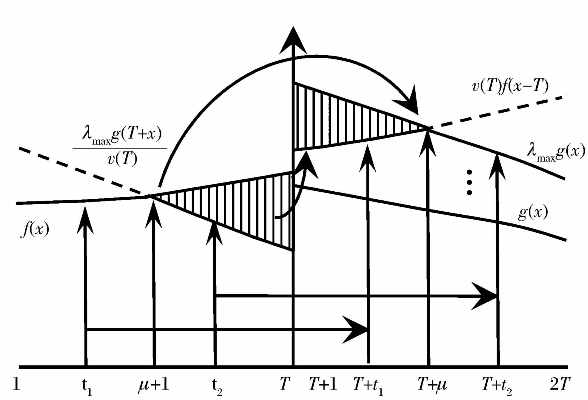

图 2　IOP 最优解示意图(一)

对于满足推论 1 条件的 IOP，最优解的结构可

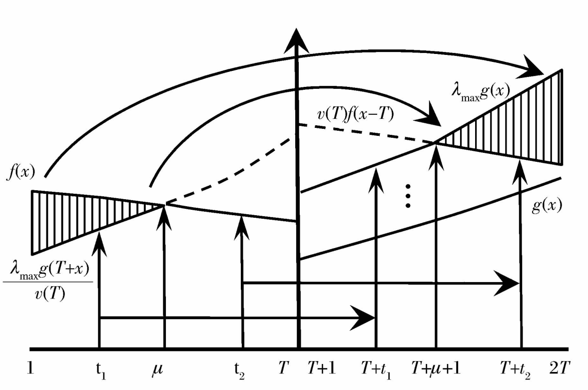

图 3　IOP 最优解示意图(二)

以这样来描述：i 时刻的收入优先支付 $T+i$ 时刻的支出，最近时刻多余的收入优先支付最远时刻不足的支出。因而我们可以利用二分搜索法来计算最优值而无需求解线性规划问题。图 2 和图 3 还定性地给出了最优解中不同期限利率的作用大小，如果阴影部分面积较小，那么最大期限以外的其它利率的作用就不大；相反阴影部分面积越大，那么其它利率的作用也就越大。虽然在实际的金融利率市场中，最大累积函数 $v(t)$ 不一定是正规的，甚至还不一定是 T 周期的，但是只要长期利率高于短期利率，我们就可以把推论 1 中所给出的结构作为(近似)最优解，这样所计算出的最大保险金额要小于理论上的最大值，因而从定价上来说是安全的。

4　多利率下的寿险定价

现在我们来考虑一般情况下的寿险定价模型。假设有一大群相同的保单，时刻 1 表示保单签发的时间，ω 为保单的终止时间。保险人在时间 $x(x=1,2,\cdots,\omega)$ 的期望保险费收入为 $P(x)$，当保险金额等于一个单位时，保险人按照保险合同在时间 x 所要支付的期望保险金为 $R(x)$。为简单起见，在本文中不考虑附加保险费用。按照收支相等的原则，可以假设保险支出的资金全部来源于保费的收入及其投资利息，与 IOP 相似，我们考虑下列线性规划问题：

$$\max \quad \lambda$$

$$s.t. \quad \sum_{s=1,t\leqslant s}^{\omega} x_t^s = P(t) \ (t=1,2,\cdots,\omega)$$

$$\sum_{t=1,t\leqslant s}^{\omega} v(s-t)x_t^s = \lambda R(s) \ (s=1,2,\cdots,\omega)$$

$$x_t^s \geqslant 0 \ (t,s=1,2,\cdots,\omega;t\leqslant s)$$

其中，$v(t)$ 是最大累积函数。在本节中我们均规定 $v(T+t)=v(T)\cdot v(t)$。变量 x_t^s 表示在时间 t 的保险收入中将用于支付时间 s 的保险金支出的数量，由于时间 t 收入的资金数 x_t^s 在 s 时刻所能得到的最大本利和是 $v(s-t)x_t^s$，所以上述问题准确地刻画了通过合理配置保险收入(由 $P(t)$ 表示))的投资期限(由 x_t^s 表示)能够使保险金支出水平(用 $\lambda R(s)$ 表示)达到最大，我们称之为广义收支问题(generalized income-outcome problem，GIOP)。而这个线性规划问题的最优值，则给出了多利率条件下保险费率的计算依据。要说明的是，在第二个约束式中我们使用了等式条件，而不是≥条件。这是因为在实际应用中，GIOP 的可行解一般都是存在的，也就是说，所有的保费收入在投资生息后都能够用在将来的保险金支出上。

在我们的定义中，$P(x)$ 与被保险人缴纳保费的方式有关，$R(x)$ 与寿险产品的设计有关。当这两个函数确定后，影响精算定价的就是最大累积函数 $v(t)$。由于对于任何的 $t\geqslant 0$，$v(t)=v^i(T)\cdot v(t-iT)(iT\leqslant t\leqslant (i+1)T)$，因此我们考虑对 GIOP 进行简化。不失一般性，假设 $\omega=kT\ (k\geqslant 1)$，令：

$$\widetilde{P}(x)=\sum_{i=0}^{k-1}P(iT+x)v^{-i}(T)(1\leqslant x\leqslant T)$$

$$\widetilde{R}(x)=\sum_{j=0}^{k-1}R((j-1)T+x)v^{-j+1}(T)\ (T+1\leqslant x\leqslant 2T)$$

现在来看收入函数和支出函数分别为 $\widetilde{P}(x)$ 和 $\widetilde{R}(x)$ 的 IOP，不难看出 GIOP 的每一个可行解对应于相应 IOP 的一个可行解，反之则不然。但是我们可以证明，在很多情况下，GIOP 与相应的 IOP 是等价的，或者两者的最优值是相等的，具体来说有如下结论：

命题 3 如果保险支出发生在保险收入之后，那么 GIOP 与对应的 IOP 等价。

证明：不妨假设保险收入发生在时间 1 至 lT 之间，保险支出发生在时间 $lT+1$ 至 kT 之间。如果 $(\hat{x}',\hat{\lambda})$ 是相应 IOP 的一个可行解，对于每一个分量 $\hat{x}'^{s'}_{t'}$，我们按照下式构造 GIOP 的一组分量：

$$\hat{x}^{(j-1)T+s'}_{iT+t'}=\frac{v^{-j+1}(T)P(iT+t')R((j-1)T+s')}{\widetilde{P}(t')\widetilde{R}(s')}\cdot\hat{x}'^{s'}_{t'}$$

其中 $0\leqslant i\leqslant l-1,l\leqslant j\leqslant k-1$。则容易验证 $\sum_{s=lT+1}^{kT}\hat{x}_t^s=P(t)(1\leqslant t\leqslant lT)$，$\sum_{t=1}^{lT}v(s-t)\hat{x}_t^s=$

$\hat{\lambda}R(s)(lT+1\leqslant s\leqslant kT)$，即 $\{\hat{x}_t^s,\hat{\lambda};1\leqslant t\leqslant lT,lT+1\leqslant s\leqslant kT\}$ 是 GIOP 的一个可行解，证毕。

命题 4 如果在保险期（$\omega=kT$）内 $P(x)$ 单调减少，$R(x)$ 单调增加，那么 GIOP 与对应 IOP 的最优值是相等的。

证明：由条件可知 $\tilde{P}(x)$ 单调减少，$\tilde{R}(x)$ 单调增加。根据推论 1，相应 IOP 存在最优解 $(\hat{x}',\hat{\lambda})$，其基变量 $\hat{x}'^{s'}_{t'}$ 的指标满足条件 $T+t'\leqslant s'$（见图 3）。记：

$$\begin{cases}a_i=v^{-i}(T)P(iT+t')/\tilde{P}(t')\\b_j=v^{-j+1}(T)R((j-1)T+s')/\tilde{R}(s')\\0\leqslant i,j\leqslant k-1\end{cases}$$

令 $\delta_i^j=\min(a_i-\sum_{l=i}^{j-1}\delta_i^l,b_j-\sum_{l=0}^{i-1}\delta_l^j)$，其中 $i\leqslant j$，$0\leqslant i,j\leqslant k-1$。则显然有 $\delta_i^j\geqslant 0$，同时由于 a_i 是非负单调减少数列，b_j 是非负单调增加数列，$\sum_{i=0}^{k-1}a_i=\sum_{j=0}^{k-1}b_j=1$，因此可以归纳地证明：

$$\begin{cases}\sum_{j=0,i\leqslant j}^{k-1}\delta_i^j=a_i(i=0,1,\cdots,k-1)\\\sum_{i=0,i\leqslant j}^{k-1}\delta_i^j=b_j(j=0,1,\cdots\cdots,k-1)\end{cases}$$

对于每一个基变量 $\hat{x}'^{s'}_{t'}$，我们按照下式构造 GIOP 的一组分量：

$$\hat{x}_{iT+t'}^{(j-1)T+s'}=v^i(T)\cdot\delta_i^j\cdot\hat{x}'^{s'}_{t'}$$

其中 $i\leqslant j,0\leqslant i,j\leqslant k-1$。由于 $T+t'\leqslant s'$，因此上述构造是合理的，也就是说如果 $i\leqslant j$，那么就有 $iT+t'\leqslant(j-1)T+s'$。不难验证所有这些分量与 $\hat{\lambda}$ 构成了 GIOP 的一个可行解，所以 GIOP 与相应 IOP 的最优值相等，证毕。

命题 3 和 4 表明了在多利率条件下，包括生存年金、定期人寿保险乃至更为广泛的一类寿险产品，其定价模型 GIOP 可以归结为相应的 IOP。由于在 $\tilde{P}(x)$ 和 $\tilde{R}(x)$ 的定义中唯一起作用的是期限为 T 的利率，这个结果也就意味着如果保险期比最大利率期限大的话，那么在精算定价中起主要作用的就是最大期限的利率 i_T，也就是最大利率。

最后我们来看一种特殊情况，当保险期与最大利率期限相等时，那么有 $\tilde{P}(x)=P(x),\tilde{R}(x)=v(T)\cdot R(x-T)$。根据命题 1，相应的 IOP 存在最优解 $(x,\hat{\lambda})$，其中 $\hat{x}_i^{T+i}=\min(\tilde{P}(i),\hat{\lambda}\tilde{R}(T+i)/v(T))=\min(P(i),\hat{\lambda}R(i))$ 是基变量，即 GIOP 存在基变量为 $x_i^i=\min(P(i),\hat{\lambda}R(i))$ 的最优解，这可以解释为在最优解中保险费收入优先支付同一时间的保险金支出。如果 $P(x)/R(x)$ 变化不大的话，那么绝大部分的保费收入将用于支付同一时间的保险金支出，此时费率的计算与利率的大小基本无关；相反如果 $P(x)/R(x)$ 变化较大的话，那么不同期限的利率（不含最大期限的利率 i_T）均起到一定的作用。

5　应用分析

在本节中我们将给出两个具体实例的计算结果，其中生命表均参照美国 1979—1981 全体人口生命表。假设最大利率期限为 5 年（$T=5$），其利率（复利）分别如下表所示：

表 1　假设的利率期限结构表

时期长度	1	2	3	4	5
利率	2.5 %	3.5 %	4.25 %	4.75 %	5.0 %

我们发现对应的最大累积函数 $v(t)$ 不是正规的，甚至还不是 T 周期的（因为 $v(5)\cdot v(3)<v^2(4)$），所以我们根据推论 1 中的最优解结构使用二分搜索法所计算出的最大保险金额要略微小于理论上的最大值。

第一个例子是终身生存年金，保费缴付方式是年缴（等额），年金支付形式是每年领取（等额），并且有十年固定年金。

设年龄为 a 岁者 l_a（生命表中年龄为 a 的生存人数，下同）人，每人都投保上述终身生存年金，年缴保险费为 P_0（从 a 岁至 $a+n-1$ 岁），共缴付 n 年。如果用时间 1 表示第一次缴费的时间（a 岁），那么在 $a+n$ 岁时生存者 l_{a+n} 人在时间 x 所缴付的保险费为 $P(x)=P_0l_{a+n}(1\leqslant x\leqslant n)$。由于 n 一般不是 T 的倍数，所以我们将初始时间前移 n_0，其中 $n_0=T-n\%T$，$n\%T$ 是 n 除以 T 的余数，那么在缴费期间 $P(x)$ 则为如下的等价形式：

$$P(x)=\begin{cases}0\ (1\leqslant x\leqslant n_0)\\P_0l_{a+n}(n_0+1\leqslant x\leqslant n+n_0)\end{cases}$$

从 $a+n$ 岁开始，生存者每年领取生存年金（具有十年固定年金），那么当年金金额为 1 个单位时期望的年金支出为：

$$R(x)=\begin{cases}l_{a+n}(n_0+n+1\leqslant x\leqslant n_0+n+10)\\l_{a+x}(n_0+n+11\leqslant x\leqslant n_0+\omega-a+1)\end{cases}$$

上式中 ω 表示的是生命表中的极限年龄。

表 2 最大年金表

投保年龄＼领取年龄	50	55	60	65	投保年龄＼领取年龄	50	55	60	65
25	333.124	498.421	735.604	1077.056	35	150.613	248.059	388.708	592.372
26	310.251	467.045	692.131	1016.316	36	136.571	228.797	362.019	555.082
27	288.684	437.460	651.138	959.039	37	123.331	210.634	336.853	519.920
28	268.291	409.487	612.381	904.892	38	110.811	193.461	313.059	486.677
29	248.995	383.018	575.707	853.653	39	98.964	177.210	290.544	455.220
30	230.792	358.047	541.104	805.300	40	87.791	161.881	269.302	425.537
31	212.871	333.462	507.041	757.708	41	76.788	146.789	248.390	396.319
32	195.973	310.282	474.922	712.830	42	66.414	132.558	228.672	368.769
33	179.994	288.364	444.555	670.404	43	56.605	119.102	210.029	342.722
34	164.875	267.624	415.820	630.256	44	47.322	106.369	192.387	318.073

表 3 最大保险金额表

投保年龄＼保险期限	5	10	15	20	投保年龄＼保险期限	5	10	15	20
30	721.027	631.616	529.607	434.270	40	358.720	285.601	228.902	186.899
31	693.797	596.628	493.862	401.884	41	327.350	260.142	209.313	171.405
32	662.123	559.489	458.485	370.957	42	298.910	237.224	191.598	157.245
33	624.743	520.550	423.464	341.503	43	272.780	216.575	175.553	144.318
34	585.366	481.879	389.581	313.796	44	248.412	197.789	160.953	132.521
35	544.740	444.170	357.242	287.945	45	225.843	180.735	147.608	121.788
36	505.530	408.497	327.151	264.141	46	205.331	165.298	135.412	112.044
37	466.415	374.809	299.366	242.255	47	186.966	151.352	124.246	103.184
38	428.493	343.125	273.859	222.194	48	170.676	138.792	114.071	95.133
39	392.440	313.323	250.381	203.792	49	156.159	127.481	104.840	87.798

根据命题 3，相应 GIOP 与对应的 IOP ($\tilde{P}(x)$ 和 $\tilde{R}(x)$ 的表达式略）等价，我们称其最优值为最大年金。由于生存人数随着年龄增加而减少，所以 $\tilde{R}(x)$ 为单调减少函数，而 $\tilde{P}(x)$ 则为二值递增阶梯函数，因此满足推论 1 中的条件（第 1 种情况），表 2 是利用二分搜索法计算的年缴纯保费 100 个单位的最大年金表。

通过计算我们发现表中数值基本上与以最大期限的利率（本例中是 5%）作为单一预定利率所计算出来的相同。原因是保险期比较长，同时 $\tilde{P}(x)/\tilde{R}(T+x)(1\leqslant x\leqslant T)$ 变化不大，接近于一个常数 c，由命题 1，其对应的 IOP 的最优值 $\hat{\lambda}$ 近似地等于 $c\cdot v(T)$。因此在生存年金的费率计算中，最大期限的利率起到了主要的作用，也就是说，资金的运用应该以利率最高的长期投资为主。

第二个例子是定期人寿保险，保费缴付方式也是年缴（等额），保险金即刻赔付。为了简单起见，我们假设保险期 n 是 T 的倍数，保险资金在一年之内是不计利息的（即最小计息期限是一年）。

设年龄为 a 岁者 l_a 人，每人都投保 n 年期人寿保险，每年年初缴付保险费为 P_0，那么在时间 x 的期望保险费收入为：

$$P(x)=P_0 l_{a+x-1}(1\leqslant x\leqslant n)$$

当保险金额为 1 个单位时，期望的保险金支出则为：

$$R(x)=d_{a+x-1}(1\leqslant x\leqslant n)$$

由于生命表中死亡人数基本上是随着年龄增大而增加的，同时保险期是 T 的倍数，所以 $R(x)$ 和 $\tilde{R}(x)$ 接近于单调增加函数，而 $P(x)$ 和 $\tilde{P}(x)$ 均为单调减少函数。根据命题 4，相应 GIOP 与对应的 IOP 的最优值可以认为是相等的，我们称之为最大保险金额，并且也基本满足推论 1 中的条件（第 2 种情况）。表 3 是利用二分搜索法计算的年缴纯保费 1 个单位时的最大保险金额表。

与第一个例子有区别的是，由于 $\tilde{P}(x)/\tilde{R}(T+x)$ 有一定的变化，因此最大保险金额小于单一年预定利率 5% 所计算出来的结果，但是随着保险期的增大，其差距越来越小。当保险期在 10 年以上时，两者相差不大，这时候的情况基本上与终身生存年金一样，在费率计算中起主要作用的是最大期限的利率。而当保险期为 5 年时，由于 $P(x)/R(x)$ 变化

不大，正如上一节末所提到的，费率计算的结果与利率的大小关系不大。10 年保险期的情况则介于两者之间，不同期限的利率均起到了一定的作用。

6　结语

在本文中，我们应用线性优化的方法解决了在多利率条件下寿险费率的定价问题。命题 1 和 2 表明了这么一个事实，如果长期利率高于短期利率，那么保险收入资金的运用在满足保险支出的情况下应该优先考虑期限较大（也就是利率较大）的投资，因而在保险费率的计算中，起主要作用的是最大期限的利率，其次是不同利率的一个综合水平。这个结果也就意味着，在寿险资金的运用中，应该考虑以长期投资为主，这为预定利率的确立提供了可靠的理论基础。如果将收支问题中的收入函数看作为"本金"，将最优值与支出函数的乘积看作为"累积值"，那么实际上我们已经把单一利率下的现值与终值的概念推广到了多利率的情况。在这种情况下，"本金"、"现值"或者"终值"不再是某一个时刻的金额数值，而是一个时间区间（长度为最大利率期限 T）上的收入或者支出金额的分布，这为推广传统的单一利率下的利息理论，建立更广泛意义的利率期限结构框架下的利息理论提供了模型基础。

附录

1. 命题 2 的证明

命题 2 假设最大累积函数 $v(t)$ 是正规的，则 QIOP 存在最优解 $(\hat{x},\hat{\lambda})$，对于它的任意两个基变量 $x_i^k > 0$ 和 $x_j^l > 0$，如果 $i \leqslant j$，则有 $k \geqslant l$。

证明：这里我们只证明 QIOP 的第一种情况，第二种情况与此类似。如果 QIOP 的最优解 $(\hat{x},\hat{\lambda})$ 中存在两个基变量 $\hat{x}_i^k > 0$，$\hat{x}_j^l > 0$，其中 $\mu+1 \leqslant i \leqslant j \leqslant T$，$T+1 \leqslant k < l \leqslant T+\mu$。令 $\alpha = \min\left(\frac{v(k-i)}{v(k-j)}\hat{x}_i^k, \hat{x}_j^l\right)$，构造一个新的解 $\hat{x}'$：

$$\hat{x}'^k_i = \hat{x}_i^k - \frac{v(k-j)}{v(k-i)}\alpha, \hat{x}'^l_i = \hat{x}_i^l + \frac{v(k-j)}{v(k-i)}\alpha, \hat{x}'^k_j = \hat{x}_j^k + \alpha, \hat{x}'^l_j = \hat{x}_j^l - \alpha$$

其余情况下 $\hat{x}'^s_t = \hat{x}_t^s$。

因为 $i \leqslant j$，所以 $\frac{v(k-j)}{v(k-i)} \leqslant 1$，因此 $\hat{x}'$ 满足约束条件 (3)，(4) 和 (5)($s \neq l$)，基变量 $\hat{x}'^k_i$ 和 $\hat{x}'^l_j$ 中至少有一个等于 0，并且有

$$\sum_{t=1}^{T} v(l-t)\hat{x}'^l_t = \hat{\lambda}g(l) + \left(\frac{v(k-j)}{v(k-i)} - \frac{v(l-j)}{v(l-i)}\right)v(l-i)\alpha。$$

因为 $\mu+1 \leqslant i \leqslant j \leqslant T < k < l \leqslant T+\mu$，所以有 $1 \leqslant l-j, k-i \leqslant l-i < T$。由于 $v(t)$ 是正规的，根据式(2)，有 $v(l-j)v(k-i) \leqslant v(l-i)v(k-j)$，即 $\frac{v(k-j)}{v(k-i)} \geqslant \frac{v(l-j)}{v(l-i)}$。如果 $\frac{v(k-j)}{v(k-i)} > \frac{v(l-j)}{v(l-i)}$，则 $\sum_{t=1}^{T} v(l-t)\hat{x}'^l_t > \hat{\lambda}g(l)$，与 $(\hat{x},\hat{\lambda})$ 是最优解矛盾。所以有 $\frac{v(k-j)}{v(k-i)} = \frac{v(l-j)}{v(l-i)}$，由此可以推出 $\sum_{t=1}^{T} v(l-t)\hat{x}'^l_t = \hat{\lambda}g(l)$，即得到了一个新的最优解 $(\hat{x}',\hat{\lambda})$，在这个最优解中不同时存在两个基变量 $\hat{x}'^k_i > 0$，$\hat{x}'^l_j > 0$。由于除了 $\hat{x}'^k_i, \hat{x}'^k_j, \hat{x}'^l_i, \hat{x}'^l_j$ 以外，其它的基变量均没有改变，所以使用相同的方法，最终就能够得到一个最优解 $(\hat{x}',\hat{\lambda})$，在这个最优解中不会同时存在两个基变量 $\hat{x}_i^k > 0$，$\hat{x}_j^l > 0$ $(i \leqslant j \leqslant T < k < l)$，证毕。

2. 下面是第 3 节系推论 1 中两种典型情况的最大保险金额 λ_{max} 的类 C 语言二分搜索算法，其中 ε 是给定的表示误差范围的一个小数，λ_h 是给定的保险金额较大的初始值，数组变量 Sp 和 Ls 分别表示多余的保险收入和不足的保险支出。

(1) $f(x)$ 单调增加（含常值），$g(x)$ 单调减少（图 2）。

```
int L,R; float ε,λl = 0, λh,Sp[],Ls[];
while(λh - λl > ε)
    λ = (λl + λh)/2; L = T;
    for(int t = T; t ≥ 1; t--)
        if(f(t) * v(T) ≥ λ * g(T+t)
            Sp(t) = f(t) - λ * g(T+t)/v(T); L--;
        else
            Ls(t) = λ * g(T+t) - f(t) * v(T);
    end for
    R = L; L++;
    while(L <= T and R >= 1)
      if Sp(L) * v(T+R-L) ≥ Ls(R)
        Sp(L) -= Ls(R)/v(T+R-L); R--;
      else
        Ls(R) -= Sp(L) * v(T+R-L); L++;
     end while
     if(R == 0) λl = λ;
    else λh = λ;
end while
return(λ);
```

(2) $f(x)$ 单调减少，$g(x)$ 单调增加（图 3）。

```
int L,R; float ε,λl = 0, λh,Sp[],Ls[];
while(λh - λl > ε){
    λ = (λl + λh)/2; L = 0;
    for(int t = 1; t ≤ T; t++)
        if(f(t) * v(T) ≥ λ * g(T+t)
            Sp(t) = f(t) * v(T) - λ * g(T+t); L++;
        else
            Ls(t) = λ * g(T+t) - f(t) * v(T);
    end for
```

```
R=L+1;
while(L>=1 and R<=T)
  if(Sp(L) * v(R-L)≥Ls(R))
      Sp(L)-=Ls(R)/v(R-L);R++;
  else
      Ls(R)-=Sp(L) * v(R-L);L--;
end while
if(L==0) λ_h=λ;
else λ_l=λ;
end while
return(λ);
```

3.第 5 节实例中对应 IOP 的收入函数 $\widetilde{P}(x)$ 和支出函数 $\widetilde{R}(x)$ 的表达式。

(1)终身生存年金

$$\widetilde{P}(x)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{[(n-1)/T]} P_0 l_{a+n} v^{-k}(T) & (1\leqslant x\leqslant (T-n)\%T)\\ \sum_{k=0}^{[(n-1)/T]} P_0 l_{a+n} v^{-k}(T) & ((T-n)\%T+1\leqslant x\leqslant T)\end{cases}$$

$$\widetilde{R}(x)=\begin{cases}\frac{1}{v^{[(n-1)/T]}(T)}\left(l_{a+n}+\frac{l_{a+n}}{v(T)}+\sum_{k=2}^{p}\frac{l_{a+n+kT+x-T-1}}{v^k(T)}\right. \\ \quad (T+1\leqslant x\leqslant T+\tilde{\omega}\%T+1)\\ \frac{1}{v^{[(n-1)/T]}(T)}\left(l_{a+n}+\frac{l_{a+n}}{v(T)}+\sum_{k=2}^{p-1}\frac{l_{a+n+kT+x-T-1}}{v^k(T)}\right) \\ \quad (T+\tilde{\omega}\%T+1< x\leqslant 2T)\end{cases}$$

其中 a、n、ω 和运算符 % 的定义见文中,$T=5$,$\tilde{\omega}=\omega-a-n$,$p=[\tilde{\omega}/T]$。

(2) 定期人寿保险

$$\widetilde{P}(x)=\sum_{k=0}^{p-1}\frac{P_0 l_{a+kT+x-1}}{v^k(T)}\ (1\leqslant x\leqslant T)$$

$$\widetilde{R}(x)=\sum_{k=0}^{p-1}\frac{d_{a+(k-1)T+x-1}}{v^{k-1}(T)}\ (T+1\leqslant x\leqslant 2T)$$

其中 a 是投保年龄,$n=pT(p\geqslant 1)$。

参考文献:

[1] Beekman J A, Fuelling C P. Interest and mortality randomness in some annuities [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 1990,9(2-3):185-196.

[2] Beekman J A,Fuelling C P. Extra randomness in certain annuity models [J]. Insurance:Mathematics and Economics, 1992, 10(4):275-287.

[3] De Schepper A, De Vylder F, Goovaerts M, et al. Interest randomness in annuities certain [J]. Insurance: Mathematics and Economics,1992, 11(4): 271-281.

[4] De Schepper A, Goovaerts M. Some further results on annuities certain with random interest [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 1992, 11(4):283-290.

[5] Perry D, Stadje W. Function space integration for annuities [J]. Insurance: Mathematics and Economics,2001, 29(1):73-82.

[6] Milevsky M A. The present value of a stochastic perpetuity and the Gamma distribution[J]. Insurance: Mathematics and Ecomomics, 1997, 20(3): 243-250.

[7] Kaas R, Dhaene J, Goovaerts M J. Upper and lower bounds for sums of random variables [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2000,27(2): 151-168.

[8] De Schepper A, Goovaerts M J, Dhaene J, et al. Bounds for present value functions with stochastic interest rates and stochastic volatility[J]. Insurance: Mathematics and Ecomomics,2002,31(1): 87-103.

[9] Parker G. Two stochastic approaches for discounting actuarial function[J]. Astin Bulletin, 1994,24(2):167-181.

[10] Zaks A. Annuities under random rates of Interest [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2001,28(1),1-11.

[11] 王波. 多种利率条件下寿险费率的测算[J]. 上海,上海保险,2002,197(3):17,28.

[12] 王波. 线性规划在寿险精算中的应用[J]. 北京,数学的实践与认识,2006,36(11):48-53.

[13] 田存福,刘芳,吴黎军. 责任准备金的最优投资计划[J]. 北京,系统工程理论与实践,2005,25(6):76-86.

[14] Kellison G S. The Theory of Interest[M]. 3th ed. New York: Irwin/McGraw-Hill, 2009.

Linear Optimization Model for Life Insurance Pricing

WANG Bo

(Institute of Business of Zhejiang Radio and TV University, Ningbo 315016, China)

Abstract: There are various interest rates of different terms in the actual financial markets. In order to calculate the life insurance rates under the condition of multiple interest rates, a linear programming model which is called "Income-outcome problem(IOP)" was established on the basis of the definition of maximum accumulation function, and its optimal value describes the maximum level of insurance payment that can be achieved through the rational arrangement of investment term of premium funds. Using local optimization method, two properties of the optimal solution of IOP are proved, and these properties show that the premium income fund should gives priority to the investment which has longer term (that is, larger interest rates) on the condition of meeting the insurance expenditures. For some typical life insurance product model, we give the structure of the optimal solution and list the calculated results of premium rate of two specific examples. The results show that the main factor in the calculation of premium rates is the longest term interest rate, followed by an comprehensive level of the different interest rates. The model of this paper also provides the basis for creating generalized theory of interest under the condition of multiple interest rates.

Key words: multiple interest rates; maximum accumulation function; linear optimization; income-outcome problem; life insurance pricing