文章编号:1007-4708(2011)02-0183-04

时滞抛物型方程的高精度精细积分法

金承日*[1], 刘明珠[2]

(1. 哈尔滨工业大学(威海)数学系,威海 264209;2. 哈尔滨工业大学数学系,哈尔滨 150001)

摘 要:对一类时滞抛物型方程初边值问题,提出了关于空间步长是四阶精度的高精度无条件稳定的精细积分法。数值算例表明,本文提出的精细积分法具有很高的精度,因而是一种有效的数值方法。

关键词:时滞抛物型方程;精细积分法;局部截断误差

中图分类号:O241.82　　**文献标志码**:A

1 引 言

时滞微分方程是关于时间的导函数依赖于解在过去时间点上的值的一种微分方程,它用于描述运动状态与时间历史有关的运动现象。时滞微分方程在人口动力学、传染病学、生态学、环境科学、电力工程及自动控制等领域中有着广泛的应用。但是,时滞的存在给时滞微分方程的数值求解带来了很大的困难。目前,有关时滞偏微分方程的数值计算方面的文献很少,主要是有限差分法[1,2]。

近年来,由钟万勰院士提出的求解一阶常微分方程组的精细时程积分法[3](简称精细积分法)因为具有算法简单、精确度高的优点,引起广泛的关注,在结构动力分析、计算流体力学及最优控制等领域得到了广泛的应用。此外,以精细积分法为基础,研究者又提出了一些新的算法,例如求解偏微分方程的子域精细积分法[4]、齐次扩容精细积分法[5]、子域精细积分并行算法[6,7]、小波精细积分法[8]及样条精细积分法[9]等。但是,目前为止未见到有关时滞偏微分方程精细积分法方面的文献。

本文以一类时滞抛物型方程初边值问题(1~3)为模型,详细讨论求解该问题的精细积分法。数值算例表明,利用精细积分法求解时滞抛物型方程是有效的。

收稿日期:2009-08-07;**修改稿收到日期**:2009-12-09.

基金项目:国家自然科学基金(10671047);哈尔滨工业大学(威海)校研究基金(HIT(WH)200706)资助项目.

作者简介:金承日*(1961-),男,博士,教授(E-mail: jincr0327@163.com);
刘明珠(1941-),男,博士,教授,博士生导师.

2 半离散高精度差分格式

考虑如下时滞抛物型方程初边值问题

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+\sum_{i=1}^{K_1}b_i\frac{\partial^2 u(x,t-\tau_i)}{\partial x^2}+\sum_{i=1}^{K_2}c_iu(x,t-\sigma_i)+f(x,t)$$

$$0<x<L,0<t\leqslant T \quad (1)$$

$$u(x,t)=g(x,t),-\tau_0\leqslant t\leqslant 0,\ 0\leqslant x\leqslant L \quad (2)$$

$$u(0,t)=\varphi_1(t),u(L,t)=\varphi_2(t)\qquad t>0 \quad (3)$$

式中 K_1 和 K_2 为已知的正整数;a,b_i,L,T,τ_i 和 σ_i 均为已知的正实数,c_i 为已知的实数;f,g,φ_1 和 φ_2 均为已知的函数,而且 $\tau_0=\max\{\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_{K_1},\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{K_2}\}$。

取空间步长 $h=L/M$(M 为正整数),并记空间结点为 $x_m=mh$。

为了提高精度,利用四阶中心差商公式将微分方程(1)对空间变量 x 进行差分离散,得局部截断误差阶为 $O(h^4)$ 的半离散高精度差分格式:

$$\frac{\mathrm{d}u_m(t)}{\mathrm{d}t}=a\Gamma u_m(t)+\sum_{i=1}^{K_1}b_i\Gamma u_m(t-\tau_i)+\sum_{i=1}^{K_2}c_iu_m(t-\sigma_i)+f_m(t)$$

$$m=2,3,\cdots,M-2 \quad (4)$$

式中 $u_m(t)=u(x_m,t)$ 和 $f_m(t)=f(x_m,t)$ 都是 t 的一元函数,$\Gamma u_m(t)$ 是 $\partial^2u(x,t)/\partial x^2$ 在 $x=x_m$ 处

的四阶中心差商逼近，即

$$\Gamma u_m(t)=\frac{1}{12h^2}[16(u_{m+1}(t)+u_{m-1}(t))-(u_{m+2}(t)+u_{m-2}(t))-30u_m(t)]$$

由边值条件(3)可以直接求得

$$u_0(t)=\varphi_1(t),u_M(t)=\varphi_2(t),\quad t>0 \tag{5}$$

在式(4)中，令 $m=1$ 和 $m=M-1$，得 $du_1(t)/dt$ 和 $du_{M-1}(t)/dt$ 的表达式，其中含有虚拟网格节点上的值 u_{-1} 和 u_{M+1}。为此，将四阶公式 $u_{-1}=4u_0-6u_1+4u_2-u_3+O(h^4)$ 和 $u_{M+1}=4u_M-6u_{M-1}+4u_{M-2}-u_{M-3}+O(h^4)$ 分别代入 $du_1(t)/dt$ 和 $du_{M-1}(t)/dt$ 的表达式中，并舍去局部截断误差 $O(h^4)$，再将这两个表达式与式(4)联立，写成矩阵形式，得

$$Y'(t)=AY(t)+\sum_{i=1}^{K_1}B_iY(t-\tau_i)+\sum_{i=1}^{K_2}c_iY(t-\sigma_i)+F(t) \tag{6}$$

式中 A 和 B_i 均为 $M-1$ 阶方阵，而且

$$A=\frac{a}{12h^2}\begin{bmatrix}-24&12&0&&&&\\16&-30&16&-1&&&\\-1&16&-30&16&-1&&\\&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\\&&-1&16&-30&16&-1\\&&&-1&16&-30&16\\&&&&0&12&-24\end{bmatrix}$$

$$B_i=\frac{b_i}{a}A\ ,i=1,2,\cdots,K_1$$

$$Y(t)=(u_1(t),u_2(t),\cdots,u_{M-1}(t))^T$$

$$F(t)=(\tilde{f}_1(t),\tilde{f}_2(t),\cdots,\tilde{f}_{M-1}(t))^T$$

$$\tilde{f}_1(t)=f_1(t)+\frac{au_0(t)}{h^2}+\sum_{i=1}^{K_1}b_i\frac{u_0(t-\tau_i)}{h^2}$$

$$\tilde{f}_2(t)=f_2(t)-\frac{au_0(t)}{12h^2}-\sum_{i=1}^{K_1}b_i\frac{u_0(t-\tau_i)}{12h^2}$$

$$\tilde{f}_m(t)=f_m(t),m=3,4,\cdots,M-3$$

$$\tilde{f}_{M-2}(t)=f_{M-2}(t)-\frac{au_M(t)}{12h^2}-\sum_{i=1}^{K_1}b_i\frac{u_M(t-\tau_i)}{12h^2}$$

$$\tilde{f}_{M-1}(t)=f_{M-1}(t)+\frac{au_M(t)}{h^2}+\sum_{i=1}^{K_1}b_i\frac{u_M(t-\tau_i)}{h^2}$$

再记

$$G(t)=\sum_{i=1}^{K_1}B_iY(t-\tau_i)+\sum_{i=1}^{K_2}c_iY(t-\sigma_i)+F(t) \tag{7}$$

则方程(6)可以简写成：

$$Y'(t)=AY(t)+G(t) \tag{8}$$

这个多延迟常微分方程组(8)(即时滞抛物型方程(1)的半离散差分格式)关于空间步长具有四阶的局部截断误差。

3 精细积分法

取时间步长为 Δt，并记 $t_n=n\cdot\Delta t$，$u_m^n\approx u(x_m,t_n)$，$Y_n=(u_1^n,u_2^n,\cdots,u_{M-1}^n)^T$。以 $Y(t_n)=Y_n$ 为初始条件，在区间$[t_n,t_{n+1}]$上利用常数变易法，解得 $t\in[t_n,t_{n+1}]$ 时方程(8)的通解：

$$Y(t)=\exp(A(t-t_n))\cdot[Y(t_n)+\int_{t_n}^{t}\exp(-A(s-t_n))\cdot G(s)ds] \tag{9}$$

式中 $\exp(A)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k$ 是矩阵指数函数。

将 $t=t_{n+1}$ 代入式(9)，并整理得

$$Y(t_{n+1})=\exp(A\cdot\Delta t)\cdot Y(t_n)+\int_{t_n}^{t_{n+1}}\exp(A\cdot(t_{n+1}-s))\cdot G(s)ds \tag{10}$$

对于式(10)右端中的积分项，可以用各种不同的方法进行处理，得各种不同的精细时程积分法计算公式。

(1) 利用梯形数值求积公式处理式(10)右端的积分项，经整理得精细积分梯形公式：

$$Y_{n+1}=\exp(A\cdot\Delta t)\cdot[Y_n+\frac{\Delta t}{2}G(t_n)]+\frac{\Delta t}{2}G(t_{n+1})\qquad n=0,1,2,\cdots \tag{11}$$

(2) 利用抛物形数值求积公式处理式(10)右端的积分项，可得精细积分抛物形公式：

$$Y_{n+1}=\exp(A\cdot\Delta t)\cdot[Y_n+\frac{\Delta t}{6}G(t_n)]+\frac{4\Delta t}{6}\exp(A\cdot\frac{\Delta t}{2})\cdot G(t_n+\frac{\Delta t}{2})+\frac{\Delta t}{6}G(t_{n+1})\qquad n=0,1,2,\cdots \tag{12}$$

在使用以上两个公式进行计算时，涉及到矩阵指数 $\exp(A\cdot\Delta t)$ 和 $\exp(A\cdot\Delta t/2)$ 的计算问题。为了在计算机意义下精确地计算指数矩阵 $H=$

$\exp(A\cdot\Delta t)$，可以选择适当大的正整数 l 和 J，然后计算：

$$H_0=\sum_{k=1}^{l}\frac{(As)^k}{k!} \tag{13a}$$

$$H_i=2H_{i-1}+H_{i-1}\times H_{i-1},i=1,2,\cdots,J \tag{13b}$$

最后取 $H=I+H_J$，就能保证 H 在计算机意义下是精确的[3]。用同样的方法，可以计算 $\exp(A\cdot\Delta t/2)$。

注 1　向量函数 $G(t)$ 中含有延迟项 $Y(t-\tau_i)$ 和 $Y(t-\sigma_i)$，如果延迟量 τ_i 和 σ_i 都是 Δt 的整数倍，则精细积分公式 $G(t_n)$ 和 $G(t_{n+1})$ 均在网格节点上，不需要另行处理；否则，$G(t_n)$ 和 $G(t_{n+1})$ 中出现虚拟层，此时对相应的延迟项需要进行插值处理。此外，式(12) 的 $G(t_n+\Delta t/2)$ 也需要进行插值处理。

注 2　精细积分公式(11,12) 都是数值稳定的，由于其证明过程很长，故在此省略。

4　数值算例

考虑如下时滞抛物型方程初边值问题

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=e\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u(x,t-1)}{\partial x^2}+8\sqrt{e}\,u(x,t-0.5)-e^{-t}(32e+4+\sin 2x)$$

$$0<x<\pi,0<t\leqslant 3$$

$$u(x,t)=e^{-t}(4+\sin 2x)\qquad -1\leqslant t\leqslant 0,0\leqslant x\leqslant\pi$$

$$u(0,t)=u(\pi,t)=4e^{-t},\ 0<t\leqslant 3$$

取空间步长 $h=\pi/40$，时间步长分别取 $\Delta t=1/100$ 和 $\Delta t=1/10000$，$l=6$ 和 $J=30$，首先用方法式(13) 计算指数矩阵 $\exp(A\cdot\Delta t)$ 和 $\exp(A\cdot\Delta t/2)$，然后分别用公式(11,12) 进行计算，求出 $t=3$ 时的数值结果，并将数值解的绝对误差 $E_m^N=u(x_m,t_N)-u_m^N$(这里 $N=3/\Delta t$) 列入表 1 和表 2。

表 1　取 $\Delta t=1/100$ 时的绝对误差

Tab. 1　The absolute errors when $\Delta t=1/100$

m	精确解	(11) 的误差	(12) 的误差
5	0.2343530	−0.030217	−0.002964
10	0.2489353	−0.009902	−0.001422
15	0.2343530	−0.010628	−0.001863
20	0.1991483	−0.011092	−0.001995
25	0.1639435	−0.009422	−0.001823
30	0.1493612	−0.008196	−0.001364
35	0.1639435	−0.029010	−0.002922

表 2　取 $\Delta t=1/10000$ 时的绝对误差

Tab. 2　The absolute errors when $\Delta t=1/10000$

m	精确解	(11) 的误差	(12) 的误差
5	0.2343530	−0.000027	−0.000027
10	0.2489353	−0.000041	−0.000041
15	0.2343530	−0.000037	−0.000036
20	0.1991483	−0.000019	−0.000018
25	0.1639435	0.000002	0.000003
30	0.1493612	0.000014	0.000015
35	0.1639435	0.000013	0.000013

从表 1 和表 2 可以看出，时间步长越小数值解的精度越高，而且计算公式(12) 比计算公式(11) 具有更高的精确度。

5　结　论

本文利用 4 阶中心差商近似代替微分方程(1) 中的导数项 $\partial^2u/\partial x^2$，构造出逼近阶为 $O(h^4)$ 的精细时程积分法。类似地，如果用更高阶(比如 6 阶或 8 阶) 的中心差商近似代替 $\partial^2u/\partial x^2$，是可以构造出精度更高的精细时程积分法。

理论分析和数值算例均表明，空间步长越小计算精度越高。但需要注意的是，随着空间步长的缩小，矩阵 A 的阶数随之增大，从而计算量也在增大。因此，在实际计算时空间步长不宜取得太小。

参考文献(References)：

[1]　Pao C V. Finite difference reaction-diffusion systems with coupled boundary conditions and time delays[J]. *J Math Anal Appl*, 2002, **272**: 407-434.

[2]　姜珊珊，常玉青，谢德仁. 中立型时滞抛物方程初边值问题的差分方法[J]. 山东师范大学学报(自然科学版)，2002，**17**(1)：1-4. (JIANG Shan-shan, CHANG Yu-qing, XIE De-ren. The difference method of the initial-boundary value problem for the neutral delay differential equation[J]. *Journal of Shandong Normal University* (*Natural Science*), 2002, **17**(1): 1-4. (in Chinese))

[3]　Zhong W X. On precise integration method[J]. *J Comp Appl Math*, 2004, **163**: 59-78.

[4]　钟万勰. 子域精细积分及偏微分方程数值解[J]. 计算力学学报，1995，**12**(3)：253-260. (ZHONG Wan-xie. Subdomain precise integration method and numerical solution of partial differential equations[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 1995, **12**(3):

253-260.(in Chinese))

[5] 王跃先,周 钢,陈 军,等.齐次扩容精细算法[J].计算力学学报,2001,**18**(3):339-344.(WANG Yue-xian, ZHOU Gang, CHEN Jun, et al. Homogenization high precision direct integration [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2001, **18**(3): 339-344.(in Chinese))

[6] 金承日.解对流方程的子域精细积分并行算法[J].计算力学学报,2002,**19**(4):423-426.(JIN Cheng-ri. Subdomain precise integration parallel method for solving convection equation [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2002, **19**(4): 423-426.(in Chinese))

[7] 金承日,刘明珠.解对流扩散方程的子域精细积分AGEI方法[J].高等学校计算数学学报,2002,**24**(4):307-312.(JIN Cheng-ri, LIU Ming-zhu. Subdomain precise integration AGEI method for convection-diffusion equation [J]. *Numerical Mathematics A Journal of Chinese Universities*, 2002, **24**(4): 307-312.(in Chinese))

[8] 梅树立,张森文,雷廷武.Burgers方程的小波精细积分法[J].计算力学学报,2003,**20**(1):49-52.(MEI Shu-li, ZHANG Sen-wen, Lei Ting-wu. On wavelet precise time-integration method for Burgers equation [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2003, **20**(1): 49-52.(in Chinese))

[9] 富明慧,廖子菊,刘祚秋.结构动力方程的样条精细积分法[J].计算力学学报,2009,**26**(3):379-384.(FU Ming-hui, LIAO Zi-ju, LIU Zhi-qiu. Spline precise time-integration of structural dynamic analysis [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2009, **26**(3): 379-384.(in Chinese))

A precise integration method with high accuracy for delay parabolic equation

JIN Cheng-ri*[1], LIU Ming-zhu[2]

(1. Department of Mathematics, Harbin Institute of Technology at Weihai, Weihai 264209, China;

2. Department of Mathematics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: The precise time-integration method is proposed for solving delay parabolic equation with initial condition and boundary condition. The local truncation error of the method is $O(\Delta x^4)$. The method is unconditionally stable. Numerical example shows that the method has high accuracy. So the precise time-integration method is a practical method.

Key words: delay parabolic equation; precise time-integration method; local truncation error