

# 基于 Monte-Carlo 方法的结构系统可靠度计算及敏度分析

赵维涛\*, 张旭

(沈阳航空航天大学 航空宇航工程学院, 沈阳 110136)

**摘要:**基于可靠性分析理论,将结构失效概率对随机变量均值的敏度表示成失效概率与正则化随机变量在失效域上期望的乘积,并利用敏度分析的结果给出了结构线性等效安全余量的表达式。通过等概率转换,使得该方法可以应用于服从任意分布的随机变量。该方法在给出失效概率的同时,能够给出失效概率对随机变量均值的敏度,而无需重新对结构进行计算,提高了敏度分析的效率。该方法不受安全余量非线性程度的限制,不仅适用于单个单元,还适用于串联、并联和串并联系统。文中采用 MATLAB 语言编写程序,给出了相应的求解步骤,算例表明,该方法具有较高的效率和精度。

**关键词:**可靠性;结构系统;Monte-Carlo 方法;敏度分析;安全余量

**中图分类号:**O213.2 **文献标志码:**A

## 1 引言

在结构可靠性分析过程中,往往要计算失效概率对各变量均值的敏度,尤其是在基于可靠性的优化过程中。然而,在大数情况下结构系统失效概率是各随机变量的隐函数,很难给出具体的显式表达式<sup>[1-4]</sup>,即使在结构系统各失效模式为已知的条件下,也很难给出结构系统失效概率对各变量均值的敏度。文献[5,6]采取了适当的简化手段,给出了结构系统失效概率对随机变量均值的一阶和二阶敏度表达式,但所给出的公式过于复杂,且无法保证计算精度。本文基于 Monte-Carlo 方法<sup>[7-9]</sup>,提出了求解结构系统失效概率及可靠度敏度分析的数值算法。该方法从失效概率的定义式出发,经过一系列的变换,使得失效概率对随机变量均值的敏度成为求解失效概率过程中的副产品,而无需重新对结构进行计算,提高了可靠性敏度分析的效率。另外,参照 H-L 方法的求解思想并利用敏度分析的结果给出了结构系统线性等效安全余量,经过等概率转换可以将该方法应用于服从任意分布的随机变量。该方法具有一定的通用性,计算流程简单,可采用 MATLAB 等语言进行编写程序,便于工程应用。

## 2 敏度分析与等效安全余量

### 2.1 可靠性指标敏度分析

在结构可靠性分析时,安全余量可以表示为

$$M = g(\mathbf{X}) \quad (1)$$

式中  $\mathbf{X}$  为基本随机变量。

在应用 H-L 迭代方法求解可靠性指标时,需要将各变量转换到标准正态空间内,服从正态分布的随机变量  $x_i$  与服从标准正态分布的随机变量  $z_i$

$$\text{的转换关系为} \quad z_i = \frac{x_i - \mu_{x_i}}{\sigma_{x_i}} \quad (2)$$

式中  $\mu_{x_i}$  和  $\sigma_{x_i}$  分别为  $x_i$  的均值和均方差。

通过 H-L 迭代方法可以将式(1)简化为标准正态空间内的线性形式为

$$M = - \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i + \beta \quad (3)$$

式中  $\beta$  为可靠性指标,  $\alpha_i$  为标准正态空间中在设计点处的单位法向量的第  $i$  分量。

由此可得极限状态方程为

$$- \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i + \beta = 0 \quad (4)$$

因此,有

$$\frac{\partial \beta}{\partial z_i} = \alpha_i \quad (5)$$

结合式(2),得

$$\frac{\partial \beta}{\partial \mu_{x_i}} = \frac{\partial \beta}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial \mu_{x_i}} = - \frac{\alpha_i}{\sigma_{x_i}} \quad (6)$$

收稿日期:2009-06-08;修改稿收到日期:2010-03-05.

基金项目:航空基金(2007ZA54001)资助项目.

作者简介:赵维涛\*(1977-),男,博士,副教授

(E-mail:zhwt201@163.com).

## 2.2 失效概率灵敏度分析

根据可靠性理论,结构失效概率可以表示为

$$P_f = \int_{\Omega} f(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \quad (7)$$

式中  $f(\mathbf{z})$  为基本随机变量的联合概率密度函数,  $\Omega$  为失效域。

失效概率对  $\mu_{x_i}$  的灵敏度为

$$\frac{\partial P_f}{\partial \mu_{x_i}} = \int_{\Omega} \frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial \mu_{x_i}} d\mathbf{z} \quad (8)$$

变换式(8)可得

$$\frac{\partial P_f}{\partial \mu_{x_i}} = P_f \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial \mu_{x_i}} \frac{1}{f(\mathbf{z})} \right] \frac{f(\mathbf{z})}{P_f} d\mathbf{z} \quad (9)$$

根据概率论并结合式(7)可知,  $f(\mathbf{z})/P_f$  为基本随机变量在失效域上的联合概率密度函数。因此,式(9)可以表示成失效域上一个函数期望的形式为

$$\frac{\partial P_f}{\partial \mu_{x_i}} = P_f E \left[ \frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial \mu_{x_i}} \frac{1}{f(\mathbf{z})} \right]_{\Omega} \quad (10)$$

假定基本变量  $\mathbf{z}$  服从互不相关的标准正态分布(若变量之间相关,可以转换为不相关),则其概率密度函数为

$$f(\mathbf{z}) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z_i^2}{2}} \quad (11)$$

结合式(2),并根据文献[10],得

$$\frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial \mu_{x_i}} = \frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial \mu_{x_i}} = \frac{z_i}{\sigma_{x_i}} f(\mathbf{z}) \quad (12)$$

将式(12)代入式(10),得

$$\frac{\partial P_f}{\partial \mu_{x_i}} = P_f E \left[ \frac{z_i}{\sigma_{x_i}} \right]_{\Omega} = \frac{P_f}{\sigma_{x_i}} E[z_i]_{\Omega} \quad (13)$$

式中  $E[z_i]_{\Omega}$  为失效域内  $z_i$  的期望。

在以上推导过程中假定基本变量  $\mathbf{z}$  服从互不相关的标准正态分布,若变量不服从正态分布,可根据概率相等原则将非标准正态随机变量  $x_i$  转换成标准正态随机变量  $z_i$ ,具体表达为

$$z_i = \Phi^{-1}(F_{x_i}(x_i)) \quad (14)$$

式中  $\Phi(\cdot)$  为标准正态累积分布函数,  $F_{x_i}(x_i)$  为非标准正态随机变量  $x_i$  的累积分布函数。

在应用 Monte-Carlo 方法计算时,可以按照以下步骤进行计算:首先根据非正态随机变量  $x_i$  的具体分布形式,产生  $n$  个  $x_i$ ,并利用式(14)求得  $n$  个  $z_i$ ;然后根据  $n$  个  $x_i$  的值统计得到  $\mu_{x_i}$ ,利用式(2)得到  $n$  个  $\sigma_{x_i}$ ,计算  $n$  个  $\sigma_{x_i}$  的平均值  $\bar{\sigma}_{x_i}$ ;最后将  $\bar{\sigma}_{x_i}$  代入式(13)即可求得  $\partial P_f / \partial \mu_{x_i}$ 。

## 2.3 等效线性安全余量

由可靠性理论可知,失效概率和可靠性指标有

如下关系:

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (15)$$

式(15)两边同时对  $\mu_{x_i}$  求偏导数,有

$$\frac{\partial P_f}{\partial \mu_{x_i}} = -\phi(-\beta) \frac{\partial \beta}{\partial \mu_{x_i}} \quad (16)$$

式中  $\phi(\cdot)$  为标准正态概率密度函数。

将式(6)代入,得

$$\frac{\partial P_f}{\partial \mu_{x_i}} = \phi(-\beta) \frac{\alpha_i}{\sigma_{x_i}} \quad (17)$$

比较式(17)和式(13),得

$$\alpha_i = \frac{\partial P_f}{\partial \mu_{x_i}} \frac{\sigma_{x_i}}{\phi(-\beta)} = \frac{P_f E[z_i]_{\Omega}}{\phi(-\beta)} \quad (18)$$

在实际计算过程中发现,采用上式求得的  $\alpha_i$ ,很难严格满足平方和等于1的条件。但从公式的推导过程可知,其理论分析是正确的,出现这一现象的原因主要是由于计算误差所引起的。因此为了保证计算结果的合理性,对  $\alpha_i$  进行归一化处理:

$$\alpha_i = \frac{\alpha_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \alpha_j^2}} \quad (19)$$

将  $\alpha_i$  代入式(3)即可求得结构系统等效线性安全余量。

## 3 计算步骤

假设有  $k$  个安全余量,则并联系统的失效概率为

$$P_f = P(M_1 < 0 \cap M_2 < 0 \cap \dots \cap M_k < 0) \quad (20)$$

串联系统的失效概率为

$$P_f = P(M_1 < 0 \cup M_2 < 0 \cup \dots \cup M_k < 0) \quad (21)$$

若为串并联混合系统,在结构可靠性分析中则为多个并联系统串联的形式,此时可以将每个并联系统看成一个元件,然后按照串联系统进行分析即可。本文主要应用 Monte-Carlo 方法求解式(20, 21)以及  $P_f$  对各变量均值的灵敏度和相应的等效线性安全余量,在求解过程中采用向量和布尔计算规则。例如向量  $T_1 = (-0.2, 1.5, -4)$ ,  $T_2 = (3, 2, -1.5)$ , 则  $T_1 \cdot T_2 = (-0.6, 3, 6)$ ,  $T_1 < 0$  的返回值为  $(1, 0, 1)$ 。

本文采用 MATLAB 编写程序,具体求解步骤如下:

(1) 针对每个随机变量  $x_i$ ,均产生  $n$  个的随机数  $z_i$ ,形成  $n$  组数据。

(2) 将所得到的  $n$  组数据代入安全余量, 计算  $P_i = M_i < 0$ , 则  $P_i$  为  $n$  维向量, 其元素值为 1 或 0。

(3) 计算每个安全余量的失效概率为

$$P_{fi} = \frac{\text{sum}(P_i)}{n} \quad (22)$$

式中  $\text{sum}(P_i)$  表示对  $P_i$  中各元素进行求和, 等于安全余量  $M_i < 0$  的个数。

(4) 计算系统失效概率

若为并联系统, 则系统失效概率为

$$P_f = \frac{\text{sum}(a > 0)}{n} \quad (23)$$

式中  $a = \prod_{i=1}^k P_i$  为  $n$  维向量, 表示  $P_i (i = 1, 2, \dots, k)$  向量中对应元素相乘,  $\text{sum}(a > 0)$  等于所有安全余量同时小于零的个数。

若为串联系统, 则系统失效概率为

$$P_f = \frac{\text{sum}(b > 0)}{n} \quad (24)$$

式中  $b = \sum_{i=1}^k P_i$  为  $n$  维向量, 表示  $P_i (i = 1, 2, \dots, k)$  向量中对应元素相加,  $\text{sum}(b > 0)$  等于所有安全余量至少有一个小于零的个数。

若为串并联混合系统, 则系统失效概率的表达式仍为式(24)的形式, 此时有

$$b = \sum_{i=1}^l a_j, a_j = \prod_{i=1}^k P_i \quad (25)$$

式中  $a_j$  为第  $j$  个并联系统中的  $P_i (i = 1, 2, \dots, k)$  向量中对应元素相乘。

(5) 灵敏度分析

若为并联系统, 则

$$\frac{\partial P_f}{\partial \mu_{x_i}} = \frac{P_f}{\sigma_{x_i}} \frac{\text{sum}((a > 0) \cdot z_i)}{\text{sum}(a > 0)} \quad (26)$$

若为串联系统, 则

$$\frac{\partial P_f}{\partial \mu_{x_i}} = \frac{P_f}{\sigma_{x_i}} \frac{\text{sum}((b > 0) \cdot z_i)}{\text{sum}(b > 0)} \quad (27)$$

(6) 等效线性安全余量

将所得到的系统失效概率对各变量均值的敏感度  $\partial P_f / \partial \mu_{x_i}$  代入式(18, 19) 求得  $\alpha_i$ , 然后代入式(3) 即可得到系统所对应的等效线性安全余量。

(7) 两个安全余量之间相关性的计算

相关系数可根据需要选择是否计算, 具体公式如下:

$$\rho_{M_i, M_j} = \frac{\text{mean}(M_i \cdot M_j) - \text{mean}(M_i) \times \text{mean}(M_j)}{\text{std}(M_i) \times \text{std}(M_j)} \quad (28)$$

式中  $\text{mean}(M_i)$  表示对安全余量  $M_i$  的  $n$  个值取均

值,  $\text{std}(M_i)$  表示对安全余量  $M_i$  的  $n$  个值取标准差,  $\text{mean}(M_i \cdot M_j)$  表示对安全余量  $M_i$  和  $M_j$  的  $n$  个值对应相乘后取均值。

## 4 算 例

(1) 设两个安全余量为  $M_1 = 0.8z_1 - 0.6z_2 + 3.0$ ,  $M_2 = 0.1z_1 - 0.995z_2 + 3.5$ , 其中  $z_1$  和  $z_2$  为不相关的标准正态随机变量, 求系统失效概率及其对各变量均值的灵敏度。

解: 由线性代数知识可知, 两个安全余量之间的相关系数为  $\rho_{M_1, M_2} = 0.8 \times 0.1 + 0.6 \times 0.995 = 0.677$ , 应用文中方法(即式(28),  $n = 100000$ ) 计算得  $\rho_{M_1, M_2} = 0.6771$ , 相对误差为 0.015%。

由可靠性理论可知, 二者并联的失效概率为  $P_f = \Phi(-3.0, -3.5, 0.677) = 6.21 \times 10^{-5}$ , 二者串联的失效概率为  $P_f = 1 - \Phi(3.0, 3.5, 0.677) = 0.0015213$ , 应用文中方法所得计算结果见表 1, 等效线性安全余量  $M^e$  如图 1 所示。

表 1 算例 1 的计算结果

Tab. 1 The result of example 1

	并联	串联
$M^e$	$0.3975z_1 - 0.9176z_2 + 3.839$	$0.7362z_1 - 0.6767z_2 + 2.956$
$\partial P_f / \partial \mu_{z_1}$	$-9.8229 \times 10^{-5}$	$-0.0036$
$\partial P_f / \partial \mu_{z_2}$	$2.2678 \times 10^{-4}$	$0.0033$
$P_f$ [文中]	$6.17 \times 10^{-5}$	$0.0015$
$P_f$ [积分]	$6.21 \times 10^{-5}$	$0.0015213$
相对误差	0.644%	1.4%

注: 相对误差是以联合概率密度函数积分求得的失效概率为基准的。

(2) 设安全余量为  $M = (z_1 - 2\sin z_1)^3 - (z_1 - 5\cos z_1)^2 - z_2^3 + 10$ , 其中  $z_1$  和  $z_2$  为不相关的标准正态随机变量, 求系统失效概率及其对各变量均值的灵敏度。

解: 当安全余量非线性程度较高时, 采用 H-L 方法计算可靠性指标会引入较大的误差, 此时不宜采用 H-L 方法计算。对于本例, 经计算可知 H-L 方法不收敛, 无法给出  $\alpha_i$ , 因此不能应用式(17) 进行灵敏度分析。采用文中方法计算的结果:  $P_f = 0.0058$ ,  $\partial P_f / \partial \mu_{z_1} = -0.0058$ ,  $\partial P_f / \partial \mu_{z_2} = 0.0108$ , 等效线性安全余量为  $M^e = 0.4715z_1 - 0.8819z_2 + 2.5229$ , 安全余量  $M$  与等效线性安全余量  $M^e$  如图 2 所示。

(3) 设有三个安全余量分别为  $M_1 = 0.8z_1 - 0.6z_2 + 3.0$ ,  $M_2 = 0.1z_1 - 0.995z_2 + 3.5$ ,  $M_3 = z_3 + 4.0$ , 其中  $z_1, z_2$  和  $z_3$  为不相关的标准正态随机变量,  $M_1$  与  $M_2$  并联然后与  $M_3$  串联, 如图 3 所示,

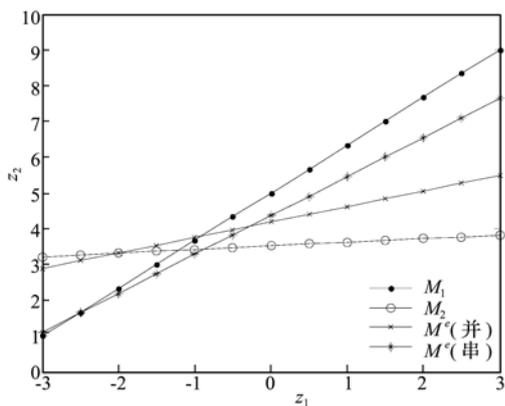


图 1 算例 1 中的安全余量  
Fig. 1 The safe margin of example 1

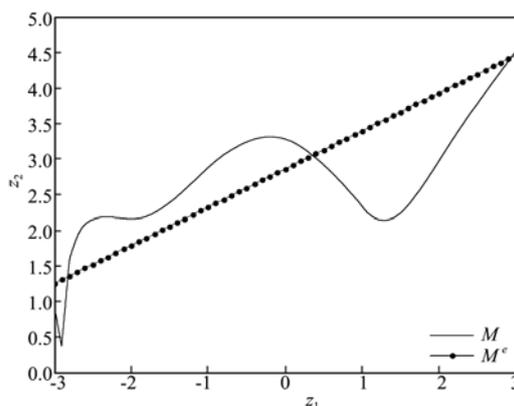


图 2 算例 2 中安全余量  
Fig. 2 The safe margin of example 2

求系统失效概率及其对各变量均值的灵敏度。

解:由算例 1 可知,  $M_1$  与  $M_2$  并联的失效概率为  $P_f = 6.21 \times 10^{-5}$ , 由可靠性理论可知,  $M_3$  对应的失效概率为  $P_f = \Phi(-4.0) = 3.167 \times 10^{-5}$ 。由于  $M_3$  不含有  $z_1$  和  $z_2$ , 即  $M_3$  与  $M_1, M_2$  不相关, 因此  $M_1$  与  $M_2$  并联然后与  $M_3$  串联的系统失效概率为  $P_f = 6.21 \times 10^{-5} + 3.167 \times 10^{-5} = 9.377 \times 10^{-5}$ , 应用本文的方法求得系统失效概率为  $P_f = 9.420 \times 10^{-5}$ , 二者相差 0.456%。进一步求得  $\partial P_f / \partial \mu_{z_1} = -9.9617 \times 10^{-5}$ ,  $\partial P_f / \partial \mu_{z_2} = 2.3146 \times 10^{-4}$ ,  $\partial P_f / \partial \mu_{z_3} = -1.3124 \times 10^{-4}$ , 等效线性安全余量为  $M^e = 0.3506 z_1 - 0.8147 z_2 + 0.4619 z_3 + 3.7341$ 。

(4) 已知等截面简支梁长为  $L$ , 在  $L/2$  处受集中载荷  $P$  作用, 设梁的最大挠度超过  $L/50$  时失效, 则该梁的安全余量为  $M = L/50 - PL^3/48EI$ , 其中  $L$  为常数,  $L = 6000 \text{ mm}$ , 截面惯性矩  $I$  和弹性模量  $E$  均为正态分布的随机变量, 载荷  $P$  为极值 I 型分布的随机变量, 各变量的均值和标准差分别为  $\mu_I = 1.0 \times 10^7 \text{ mm}^4$ ,  $\sigma_I = 0.2 \times 10^7 \text{ mm}^4$ ,  $\mu_E = 2.0 \times 10^5 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_E = 0.5 \times 10^5 \text{ MPa}$ ,  $\mu_P = 8000 \text{ N}$ ,  $\sigma_P = 2500 \text{ N}$ 。

解:根据各变量的分布形式, 产生  $n$  组随机数, 求得的失效概率为  $P_f = 6.2329 \times 10^{-4}$ 。由于  $P$  为极值 I 型分布, 因此在灵敏度分析时需要进行等概率转换, 令  $z_1 = (I - \mu_I) / \sigma_I$ ,  $z_2 = (E - \mu_E) / \sigma_E$ ,

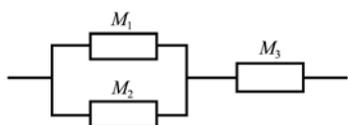


图 3 串并联混合系统  
Fig. 3 The series parallel system

$z_3 = \Phi^{-1}(F_P(P))$ 。应用本文的方法求得  $\partial P_f / \partial \mu_I = -3.2193 \times 10^{-10}$ ,  $\partial P_f / \partial \mu_E = -3.7727 \times 10^{-8}$ ,  $\partial P_f / \partial \mu_P = 8.2690 \times 10^{-8}$ , 等效安全余量为  $M^e = 0.3055 z_1 + 0.8950 z_2 - 0.3251 z_3 + 3.228$ 。

### 5 结 语

(1) 从求解过程可以看出, 结构系统失效概率的计算是采用 Monte-Carlo 方法, 因此所得失效概率的精度是可以保证的。

(2) 失效概率对各变量均值的灵敏度公式是通过严格的数学推导得到的, 在给出失效概率的同时, 能够给出失效概率对各变量均值的灵敏度以及等效线性安全余量, 而无需重新对结构进行计算。另外从图 1 和图 2 给出的线性等效安全余量也可以说明灵敏度分析是合理的, 因为线性等效安全余量是基于灵敏度分析的结果给出的。

(3) 该方法不受安全余量非线性程度的限制, 可以给出较为精确的解, 不但可以计算单个元件的失效概率及可靠性灵敏度值, 而且可以计算串联、并联以及串并联混合系统的失效概率及可靠性灵敏度值。

(4) 该方法对随机变量的分布形式没有具体要求, 通过等概率转换, 可以应用于服从任意分布的随机变量, 具有一定的通用性和工程应用价值。

### 参考文献 (References):

[1] Moses F. System reliability developments in structural engineering[J]. *Structural Safety*, 1982, (1): 3-13.  
[2] Karamchandani A, Dalane J I, Bjerager P. Systems reliability of offshore structures including fatigue and extreme wave loading[J]. *Marine Structures*, 1991, 4:

- 353-379.
- [3] 程耿东, 许 林. 基于可靠度的结构优化的序列近似规划算法[J]. 计算力学学报, 2006, **23**(6): 641-646. (CHENG Geng-dong, XU Lin. Sequential approximate programming approach to reliability based structural optimization[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2006, **23**(6): 641-646. (in Chinese))
- [4] 袁修开, 吕震宙. 可靠性敏感度分析方法及其在非线性能变疲劳失效模型中的应用[J]. 计算力学学报, 2007, **24**(1): 69-73. (YUAN Xiu-kai, LÜ Zhengzhou. Reliability sensitivity algorithm and its application in creep/fatigue failure[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2007, **24**(1): 69-73. (in Chinese))
- [5] 安伟光. 随机结构系统可靠性分析与优化设计[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2005. (AN Weiguang. *Structural Systems Reliability and Optimization Design Based on Reliability*[M]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics Press, 2005. (in Chinese))
- [6] 赵维涛, 张大千. 空间梁板结构可靠性优化的全局最优解讨论[J]. 上海航天, 2007, **24**(5): 1-4. (ZHAO Wei-tao, ZHANG Da-qian. Global optimal solution of space beam-plate structural reliability optimization[J]. *Aerospace Shanghai*, 2007, **24**(5): 1-4. (in Chinese))
- [7] Yuen K V, Beck J L. Structural damage detection and assessment by adaptive Markov chain Monte Carlo simulation[J]. *Structural Control and Health Monitoring*, 2004, **11**: 327-347.
- [8] Xi J M, Yang G S. Reliability analysis of tunnel surrounding rock stability by Monte-Carlo method[J]. *Journal of Coal Science and Engineering*, 2008, **14**(3): 361-364.
- [9] Cardoso J B. Structural reliability analysis using Monte Carlo simulation and neural networks[J]. *Advances in Engineering Software*, 2008, **39**(6): 505-513.
- [10] Sues R H, Cesare M A. System reliability and sensitivity factors via the MPPSS method[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2005, **20**: 148-157.

## Reliability calculation and reliability sensitivity analysis of structural system based on Monte-Carlo method

ZHAO Wei-tao\*, ZHANG Xu

(School of Aeronautical and Astronautical Engineering, Shenyang Aerospace University, Shenyang 110136, China)

**Abstract:** Based on the reliability analysis theory, the sensitivity of structural failure probability to random variable mean is expressed as the product of failure probability and expectation of regularization random variable in the failure domain. The expression of structural linear equivalent safe margin is given by using the result of sensitivity analysis. The method can be applied to the random variable with arbitrary distribution by equivalent probability transform. When the failure probability is calculated by the method proposed in the paper, the sensitivity of structural failure probability to random variable mean is also given without the need to recalculation, which improves the efficiency of sensitivity analysis. The method is not controlled by the nonlinear level of safe margin, and the method is suitable for the single element, series system, parallel system, and series parallel system. The calculation procedure is complied by using MATLAB codes. Numerical examples show that the method is efficient and accurate.

**Key words:** reliability; structural system; Monte-Carlo method; sensitivity analysis; safe margin