

文章编号:1007-4708(2011)03-0332-06

# 一种基于壳单元的自动快速计算方法 及其在结构设计中的应用

雷飞\*, 韩旭

(湖南大学 汽车车身先进设计制造国家重点实验室,长沙 410082)

**摘要:**提出一种自动快速计算方法实现壳结构设计中多参数大规模问题的快速计算。该方法将参数域离散技术、显式参数化有限元技术和子空间构造技术通过自动快速计算流程联系起来,提高了快速计算方法的可操作性,改变了常规快速计算方法的流程。同时,通过误差控制实现对子空间的实时更新,在提高快速计算方法的精度的同时减少计算成本。该方法在车身结构设计过程的结果表明,自动算法具有更高的精度和更少的计算时间。该方法可以应用于多参数大规模结构设计过程以及有实时计算要求的场合。

**关键词:**减基法;混合数值方法;子空间;壳结构;车身设计

**中图分类号:**TB121;U463.8 **文献标志码:**A

## 1 引言

在结构设计过程中,为了评价结构的特定性能,需要对结构进行相应的力学性能分析。基于有限元等数值方法的结构设计技术可以对结构响应做出数值评价,这类方法已经成为现代结构设计的主要手段。为了保证有限元方法的计算精度,对工程中复杂的结构,通常会得到一个大规模的线性方程组。大规模线性方程组的求解是一个较为耗时的过程。提高结构设计效率的一个可行的方法是对结构进行降阶建模和分析。常用的降阶方法有 Guyan 降阶、Ritz 向量降阶和减基法<sup>[1,2]</sup>等。其中,减基法在降阶的同时可以保证一定的误差界,近年来在热传导领域和反问题<sup>[3,4]</sup>中得到应用。在实际结构设计中,设计变量在有限元离散得到的线性方程组中不能显式地表达,这必然导致设计变量的任何变化均需要对刚度矩阵和质量矩阵进行重新组装,是个较为繁琐的过程。

文献[5]针对车身设计中多参数大规模问题进行缩减计算方法研究,文中在参数化有限元程序的基础上进行基于减基原理的混合算法编程,通过离线和在线两个阶段实现快速计算。本文提出一种

自动快速计算方法,通过在计算中实时更新近似子空间来最大程度上保证计算精度,同时减少计算成本。

## 2 快速计算方法基本原理

### 2.1 基于减基原理的快速计算方法

减基法基本思想是:多参数系统不同条件下有不同的响应,系统在各种参数条件下的解可以用事先设计的一个低维近似子空间来表示,使用该低维近似子空间对原来的高维系统进行映射得到低维系统。这种方法在对结构进行缩减的同时能较好地保持系统的物理特性。

假设已知满足误差要求的一个低维子空间  $W_N$ ,以该子空间的一组基为列向量组成矩阵  $Z$ ,通过有限元离散得到的结构刚度矩阵和力向量分别为  $K(\mu)$  和  $F$ ,将刚度矩阵和力向量向该子空间投影,得到缩减刚度矩阵和力向量分别为

$$K^N(\mu) = Z^T K(\mu) Z, F^N = Z^T F \quad (1,2)$$

$$\text{缩减系统表示为 } K^N(\mu) U^N = F^N \quad (3)$$

式中  $U^N$  为缩减系统的解。通过求解低维缩减系统得到原高维系统的近似解:  $\tilde{U} = Z U^N$  (4)

### 2.2 显式参数化有限元格式

在进行结构设计的快速计算过程中,参数经过有限元离散后通常隐含表示于刚度矩阵中,参数化有限元格式的目的是将设计中所涉及的参数显式地表示出来,为不同参数条件下的总体刚度矩阵组装和进行子空间投影提供方便。本文选取壳单元的厚度为设计参数,以壳单元为例说明有限元格式

收稿日期:2009-07-05;修改稿收到日期:2009-11-07.

基金项目:国家杰出青年基金(10725208);湖南大学汽车车身先进设计制造国家重点实验室自主课题(61075003)资助项目.

作者简介:雷飞\*(1981-),男,博士  
(E-mail: fea\_lei@163.com).

的参数化方法。

显式参数化有限元的基本思路:在单元水平上对单元刚度矩阵进行参数化解,生成显式参数化表达的单元刚度矩阵,然后将其转换至整体坐标系下,实现总体刚度矩阵的显式参数化。壳单元通常由膜单元和 Mindlin 厚板单元叠加而成<sup>[6]</sup>,壳单元刚度矩阵表示为

$$k = \mu k^m + \mu^3 k^b + \mu k^s \quad (5)$$

式中  $\mu k^m$  是由平面应力单元的膜效应引起的刚度项, $\mu^3 k^b$  是厚板单元弯曲的面内效应引起的刚度项, $\mu k^s$  是由厚板面外剪切引起的刚度项, $\mu$  为板厚。合并相同的参数项,可得

$$k = \mu k_1 + \mu^3 k_2 \quad (6)$$

式中  $\mu k_1$  为与参数成线性关系的部分, $\mu^3 k_2$  为与参数三次方相关的部分。对单元刚度矩阵进行坐标转换并组装,得到整体刚度矩阵,表示为

$$K(\mu) = \sum_{i=1}^m (\mu K_{i1} + \mu^3 K_{i2}) \quad (7)$$

式中  $K_{i1}$  和  $K_{i2}$  分别为总体刚度矩阵中由单元刚度矩阵中  $k_1$  和  $k_2$  转换并组装得到的部分, $m$  为单元个数。

### 3 常规快速计算方法

#### 3.1 快速计算方法流程

快速计算方法是将参数化有限元方法与减基原理相结合的混合数值方法,流程如图 1 所示。快速计算方法的流程包含六项内容,其中前三项内容是快速计算的准备工作,称为离线计算;后三项内容主要目的是在任意参数组合下快速得到系统的响应,称为在线计算。在离线阶段需要使用子空间对刚度矩阵进行缩减,在在线阶段,通过参数组装生成缩减系统,求解缩减系统实现快速计算。

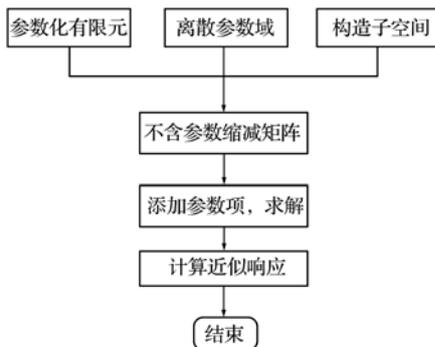


图1 快速计算流程

Fig. 1 Procedure of rapid computational method

#### 3.2 快速计算方法的精度

快速计算方法的精度取决于所构造的子空间的精度。常用于构造子空间的方法有贪婪算法<sup>[7,8]</sup>和直接正交法<sup>[5]</sup>等。其中,贪婪算法是一种自适应方法,在一定程度上可以控制所构造的子空间在参数域内的误差界;直接正交法通过施密特正交直接构造子空间,对于高维问题存在一定的正交性损失。

由于离线阶段和在线阶段是两个独立的计算过程,近似子空间需要在离线阶段构造完成。离线阶段涉及到参数域离散、采样方法、参数化有限元方法及子空间构造方法等诸多计算方法,由于这些计算方法实现的方式不同,需要对每个计算过程进行独立编程,涉及较为繁琐的数据交换工作,因此计算效率随之降低。

### 4 自动快速计算方法

#### 4.1 基本流程

常规快速计算方法不适用于有实时计算要求的场合。为了克服常规快速计算方法的弊端,提出一种自动快速计算方法。自动快速计算方法的目标是:在输入模型基本信息之后程序能够自动完成参数域离散、样本选择、实时子空间构造及矩阵降阶等工作,同时要保证子空间满足一定的精度要求。自动快速计算方法的基本流程如图 2 所示。

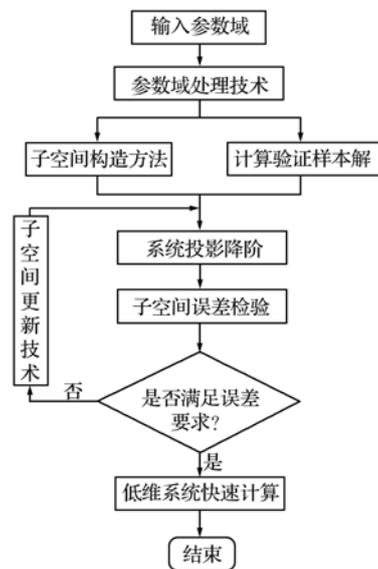


图2 自动计算方法基本流程

Fig. 2 Basic procedure of automatic computational method

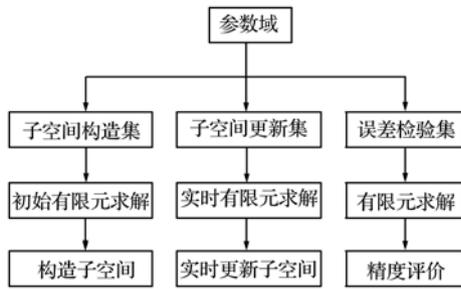


图 3 参数域中三个样本集的功能

Fig. 3 The functions of three sampling sets in parameter domain

## 4.2 参数域处理技术

在自动算法中,输入为参数的上下界,通过一定的参数域离散和采样方法构造三个参数集,分别为:子空间构造集,子空间更新集和误差检验集。其中,子空间构造集的样本通过结合参数化有限元程序计算系统响应,并以此为基础构造子空间;子空间更新集的样本通过与参数化有限元程序结合实时计算系统响应,用于更新所构造子空间;误差检验集用于检验所构造子空间的精度。三个样本集的功能如图 3 所示。

## 4.3 自适应子空间更新方法

为了保证子空间的精度,自动快速计算方法通过自适应方法对所构造的子空间进行实时更新。实时更新子空间的基本原理是:对子空间更新集中误差最大的样本点进行跟踪,以一定的规则在该样本处或该样本周围进行采样,将此新的样本加入子空间构造集中,更新子空间并判断误差。实时更新子空间流程如图 4 所示。

## 5 算 例

### 5.1 问题描述

本文以车身刚度设计问题为例对自动快速计算方法进行研究。图 5 为某型商用车驾驶室白车身承载骨架结构。弯曲工况约束驾驶室地板纵梁的前后两端,在地板中间施加载荷,边界条件和载荷工况如图 6 所示。

根据装配关系将该结构分为四个总成,分别是前围、侧围、地板和后围。其中,每个总成由若干部件组成,每个部件都具有各自的厚度,这些厚度构成了刚度设计的设计变量。这里假设每个分总成内部件的厚度是一致的,即整个设计中存在 4 个设计变量。

参数化有限元总体刚度矩阵可以表示为

$$\mathbf{K}(\mu) = \sum_{i=1}^4 (\mu_i \mathbf{K}_{i1} + \mu_i^3 \mathbf{K}_{i2}) \quad (8)$$



图 4 子空间实时更新流程

Fig. 4 Procedure of real-time updating the subspace

参数化有限元格式表示为

$$\left[ \sum_{i=1}^4 (\mu_i \mathbf{K}_{i1} + \mu_i^3 \mathbf{K}_{i2}) \right] \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (9)$$

式中  $\mathbf{U}$  为有限元的解,  $\mathbf{F}$  为载荷向量。

### 5.2 子空间构造集选取及更新策略

初始子空间构造集的选取方法需考虑到计算量和采样方法的可行性,因此,应尽量避免过于复杂的采样运算。在本问题中,初始子空间构造集通过参数的上下界和中点确定,初始子空间构造样本集选取见表 1。其中“+”代表参数域上界,“-”代表参数域下界,“0”代表参数域的中点。误差验证样本集取自参数域的边界,对于 4 个参数的情况,误差验证样本为 16 个。

为了避免重复选择构造点,在更新子空间构造集时,将最大误差对应的样本点向参数域中心进行适当缩放,从而生成新的子空间构造点。缩放因子的大小决定着更新后子空间的精度。在计算过程中,缩放因子应保证新样本点在最大误差样本点附近,同时不能过于逼近,避免在构造子空间时的正交性损失。

### 5.3 误差评价

对于每一个样本点,通过该子空间近似后的解与有限元解之间的差异来衡量其子空间对该样本点近似的程度,使用向量之间的相对误差来表示:

$$\epsilon = \frac{\|\mathbf{U} - \tilde{\mathbf{U}}\|}{\|\mathbf{U}\|} \quad (10)$$

式中  $\|\mathbf{U} - \tilde{\mathbf{U}}\|$  为有限元计算解与近似解的长度差,  $\|\mathbf{U}\|$  为有限元解的长度。子空间的误差通过该子空间对所有验证样本点的近似程度求得

$$\epsilon = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m\} \quad (11)$$

式中  $m$  为验证样本的个数。将该向量的无穷范数定义为该子空间的误差,有

$$r = \|\epsilon\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} |\epsilon_i| \quad (12)$$

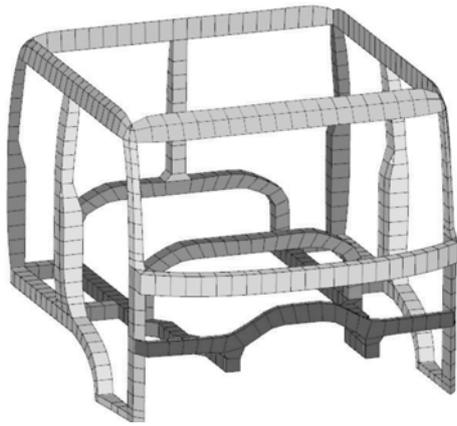


图 5 某商用车驾驶室骨架结构

Fig. 5 The frame structure of a cab in commercial vehicles

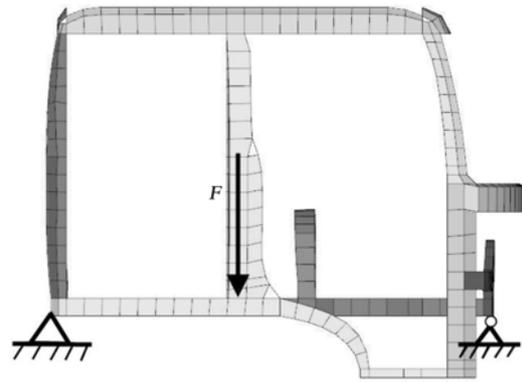


图 6 弯曲工况的约束和加载情况

Fig. 6 The boundary constrain and load condition of bending load case

表 1 初始子空间构造集

Tab. 1 Initial sampling set to construct the subspace

| 构造点 | $\mu_1$ | $\mu_2$ | $\mu_3$ | $\mu_4$ |
|-----|---------|---------|---------|---------|
| 1   | +       | 0       | 0       | 0       |
| 2   | -       | 0       | 0       | 0       |
| 3   | 0       | +       | 0       | 0       |
| 4   | 0       | -       | 0       | 0       |
| 5   | 0       | 0       | +       | 0       |
| 6   | 0       | 0       | -       | 0       |
| 7   | 0       | 0       | 0       | +       |
| 8   | 0       | 0       | 0       | -       |
| 9   | 0       | 0       | 0       | 0       |

表 2 常规快速计算方法和自动快速计算方法的误差对比

Tab. 2 Comparison of deviations derived from traditional and automatic computational methods

| 子空间维数 | 常规快速计算方法 | 自动快速计算方法 |
|-------|----------|----------|
| 9     | 9.40e-03 | 1.66e-02 |
| 10    | 5.66e-03 | 1.58e-02 |
| 11    | 5.65e-03 | 8.49e-03 |
| 12    | 5.14e-03 | 5.91e-03 |
| 13    | 8.03e-03 | 6.04e-03 |
| 14    | 7.85e-03 | 4.79e-03 |
| 15    | 7.85e-03 | 5.30e-03 |
| 16    | 7.86e-03 | 4.30e-03 |
| 17    | 7.86e-03 | 3.77e-03 |
| 18    | 7.86e-03 | 3.35e-03 |
| 19    | 7.86e-03 | 3.66e-03 |
| 20    | 7.87e-03 | 2.93e-03 |

### 5.4 计算结果

为了验证自动快速计算方法的计算效率和精度,将构造子空间的误差在更大规模的验证样本点上验证,比较常规快速计算方法和自动快速计算方法构造子空间的误差和成本。表 2 为在相同计算条件下使用常规快速计算方法和使用自动快速计算方法构造的子空间的精度比较。两种方法所构造的子空间在 256 个样本点处进行精度验证,选取误差界为 0.005。从表 2 可以看出,由于对子空间进行了实时更新,使用自动快速计算方法的精度要优于常规的快速计算方法。

根据工程实际的要求,20 维子空间完全可以满足计算精度要求。在 AMD4200 + CPU 和 2G 内存的计算机上求解该系统的计算时间为 0.00354 s,而求解原来方程组大约需要 244.9 s,该方法在提高了计算精度的同时大幅减少了计算时间。

快速计算方法的计算成本包括有限元求解、构造子空间和对系统进行缩减等部分。常规快速计算方法和自动快速计算方法在构造子空间和对系统进行缩减使用的方法是一致的,二者的差异存在于有限元求解的数量和构造子空间的方法所引起的计算量的差别。将维数为  $n \times n$  的刚度矩阵向维数为  $N$  的子空间进行投影的需要进行  $N(N+n)$  次向量内积运算,使用贪婪算法构造一个  $N$  维的子空间需要进行  $N(N+1)(3n+2N+1)/6$  次向量内积运算,两种方法在构造子空间计算成本的差异如图 7 所示。可以看出,自动快速计算方法的总计算时间小于常规快速计算方法。

考虑到缩放因子对实时子空间更新的影响,对不同缩放因子情况下的子空间误差进行比较。表 3 列出为缩放因子取不同水平时子空间误差随维数

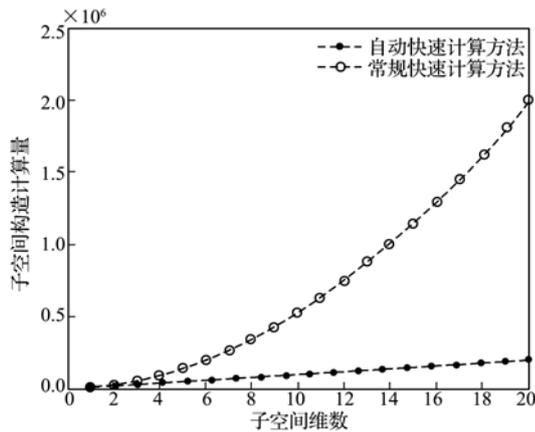


图 7 常规计算方法和自动计算方法构造子空间的计算量  
Fig. 7 The operational counts of traditional and automatic computational methods

变化的情况。从表中可以看出,虽然不同的缩放因子对子空间的精度有一定影响,但表中缩放因子更新的子空间均可达到精度要求。

## 6 结 论

针对基于减基原理的快速计算方法在计算过程中存在的流程繁琐、各计算阶段孤立以及子空间精度不高的问题,提出一种自动快速计算方法。该方法在参数域处理技术和显式参数化有限元格式的基础上,通过在快速计算过程中实时更新子空间来提高计算精度,避免了常规快速计算方法中子空间构造成本较高且不能实时更新的缺点。

通过参数域处理技术、显式参数化有限元技术和实时子空间更新技术的使用,整个计算过程无需进行人为组合和控制,改变了基于减基法的快速计算方法流程,实现了快速计算方法的自动化,大幅提高计算效率。该自动算法可以应用于复杂结构多参数大规模问题的快速计算方法中,同样可以应用于有实时计算要求的场合。

## 参考文献(References):

- [1] Noor A K, Peters J M. Reduced-basis technique for nonlinear analysis of structures[J]. *AIAA J*, 1980, **18**(4):455-462.
- [2] Porsching T A. Estimation of the error in the reduced basis method solution of nonlinear equations [J]. *Math Comput*, 1985, **45**(172):487-496.
- [3] Liu G R, Zaw Khin, Wang Y Y. Rapid inverse parameter estimation using reduced-basis approximation with asymptotic error estimation [J]. *Comput. Methods Appl Mech Engrg*, 2008, **197**:3898-3910.

表 3 不同缩放因子条件下的子空间误差

Tab. 3 The deviations of subspace in the condition of different scale factors

| 维数 | 缩放因子     |          |          |          |
|----|----------|----------|----------|----------|
|    | 0.965    | 0.975    | 0.985    | 0.995    |
| 9  | 1.66e-02 | 1.66e-02 | 1.66e-02 | 1.66e-02 |
| 10 | 1.58e-02 | 1.58e-02 | 1.58e-02 | 1.58e-02 |
| 11 | 8.48e-03 | 8.49e-03 | 8.49e-03 | 8.51e-03 |
| 12 | 6.12e-03 | 5.99e-03 | 5.91e-03 | 6.11e-03 |
| 13 | 5.99e-03 | 6.08e-03 | 6.04e-03 | 5.81e-03 |
| 14 | 5.27e-03 | 5.15e-03 | 4.79e-03 | 5.55e-03 |
| 15 | 4.80e-03 | 4.82e-03 | 5.30e-03 | 5.35e-03 |
| 16 | 4.69e-03 | 4.02e-03 | 4.30e-03 | 5.42e-03 |
| 17 | 3.57e-03 | 4.24e-03 | 3.77e-03 | 6.36e-03 |
| 18 | 3.61e-03 | 3.22e-03 | 3.35e-03 | 4.75e-03 |
| 19 | 3.87e-03 | 3.31e-03 | 3.66e-03 | 4.03e-03 |
| 20 | 3.79e-03 | 3.76e-03 | 2.93e-03 | 3.90e-03 |

- [4] Liu G R, Lee J H, Patera A T, et al. Inverse identification of thermal parameters using reduced-basis method [J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2005, **194**:3090-3107.
- [5] 雷 飞, 韩 旭, 黄永辉. 车身设计中复杂结构多参数大规模问题缩减计算方法研究[J]. *中国机械工程*, 2009, **20**(17):2127-2131. (LEI Fei, HAN Xu, HUANG Yong-hui. Study on reduced methods in solving complex and multi-parameterized large scale problem in automotive body design [J]. *China Mechanical Engineering*, 2009, **20**(17):2127-2131. (in Chinese))
- [6] Zienkiewicz O C, Taylor R L. *The Finite Element Method, fifth ed* [M]. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000.
- [7] 黄永辉, 韩 旭, 冉承新. 基于减基法的层合板瞬态响应快速分析方法[J]. *力学学报*, 2008, **40**(2):255-260. (HUANG Yong-hui, HAN Xu, RAN Cheng-xin. Efficient method for transient analysis in laminated plates based on reduced-basis method [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2008, **40**(2):255-260. (in Chinese))
- [8] 黄永辉, 韩 旭, 冉承新. 一种动力响应混合快速分析方法及其在功能梯度材料板瞬态响应分析中的应用[J]. *固体力学学报*, 2009, **30**(2):182-188. (HUANG Yong-hui, HAN Xu, RAN Cheng-xin. An efficient method for dynamic problems and its application to transient response analysis for functionally graded material plates [J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2009, **30**(2):182-188. (in Chinese))

## An automatic and rapid computational method and its application in vehicle body design

LEI Fei\*, HAN Xu

(State Key Laboratory of Advanced Design and Manufacturing for Vehicle Body,  
Hunan University, Changsha 410082, China)

**Abstract:** An automatic and rapid computational method was suggested to predict the structural behavior of multi-parameterized and large-scale problems in structural design. Some isolate techniques, such as parameter domain discretization, explicit parametrized finite element method and subspace construction method, were connected by the automatic computational procedure to improve the feasibility of the method. The procedure of general rapid computational method was changed. Furthermore, the subspace constructed in the procedure was real-time updated according to the computational error. Meanwhile, the accuracy of the automatic computational method was improved and the cost of constructing the subspace is reduced. The method was applied to the stiffness evaluation of a vehicle body. It is found that the subspace derived from the automatic method is of higher accuracy with less computational efforts. The method is applicable to the multi-parameterized large-scale structural design and real-time design contexts.

**Key words:** reduced-basis method; hybrid numerical method; subspace; shell structure;  
vehicle body design

~~~~~  
(上接第 325 页)

## Remeshing algorithm of hexahedral mesh based on double adaptivity

WANG Zhong-lei<sup>1,2</sup>, ZHAO Guo-qun<sup>\*1</sup>, MA Xin-wu<sup>1</sup>, HUANG Li-li<sup>1</sup>, SUN Lu<sup>1</sup>

(1. Key Laboratory for Liquid-Solid Structural Evolution and Processing of Materials (Ministry of Education),  
Shandong University, Jinan 250061, China;

2. Institute of Electrical and Mechanical, Shandong Architectural University, Jinan 250101, China)

**Abstract:** An adaptive remeshing method with grid-based approach for hexahedral element mesh is presented, which is based on the geometric features of old mesh model and the physical field variables distribution of new mesh model. First, using adaptive remeshing method of hexahedral element mesh with grid-based approach, the base mesh is generated, whose density is controlled by boundary curvature and geometry feature of the old mesh model. Second, physical field variables are transformed from the old mesh into the new mesh. Finally, to reduce the analytical error of finite element, with the error estimating method for FEM, the error of new mesh elements are estimated and the elements with large error are refined. The effectiveness and robustness of the algorithm are tested through the applications.

**Key words:** hexahedral element mesh; geometrical characteristic; physical field variables; grid-based approach; remeshing