

适用于壳体 h 型自适应有限元分析的一组新单元

吴丹*, 余锦炎

(香港大学 机械工程系)

摘要:推导出一组适用于 h 型自适应分析的四边形蜕化壳元。对于大多数壳体结构,壳单元的刚度矩阵可分为薄膜、弯曲和剪切三部分。对薄膜部分本文采用杂交应力元方法进行设计,独立假设薄膜应力场以改善其精度;弯曲部分的刚度矩阵则依然由基于位移的应变来获得;而剪切部分则采用假设自然应变的方法来获得能克服薄壳下剪切自锁的新剪应变并用于计算此部分的刚度矩阵。在数值算例中,本文的新单元组在 h 型自适应分析下可以产生较为规整的网格,并且收敛速度比其他单元有所提高。

关键词:壳;自适应;有限元;杂交应力元;假设自然应变

中图分类号:O359+.1 **文献标志码:**A

1 引言

由于壳体结构在工程领域的广泛应用,因此在过去几十年里,对壳单元的研究一直没有停止过。依据不同的几何近似及壳体理论,主要的壳单元类型有平板壳元、三维固体壳元、离散 Kirchhoff 壳元及蜕化壳元^[1,2]。目前应用最为广泛的壳元仍是基于 Ahmad 等^[3]提出的蜕化壳元这一概念构造的。此类壳元与 Reissner-Mindlin 假设相同,允许横向剪切变形,并略去了中面法线方向应变。由于蜕化壳元未采用任何具体的壳体理论,因此此类单元使用起来更加灵活。但当壳由厚变薄时,蜕化壳元会发生剪切自锁及薄膜自锁。为了克服剪切自锁问题,各式各样的方法推陈出新,其中极其近似的 MITC^[4]和假设自然应变法^[5,6]最为有效。对于薄膜自锁而言,Huang & Hinton^[6]及 Choi & Paik 等^[7]采用了改进的薄膜应变插值方法。

在分析实际工程问题时,壳体的几何形状可能会非常复杂,要得到高效合理的有限元网格本身便不是一件容易的事情,而自适应有限元方法则可以有效地解决这一问题。据作者了解,已经有很多学者采用 h 型自适应方法和四边形壳元进行了此类研究^[8-15]。但大部分学者均无采用过渡单元,这使得有限元网格在自适应细分过程中产生了众多形状畸变的四边形单元,因此总体精度也随之下

降。Choi 和 Lee^[14]使用了过渡单元组以连接细分前后的单元,其整个单元组均是平板壳元。但此类单元由于缺少单元内拉伸与弯曲的耦合,并且只能用多面体去近似曲面,因此在同等单元个数的情况下精度较差。

本文推导出一组适用于 h 型自适应分析的四边形蜕化壳元。对于大多数壳体结构,壳单元应变可分为薄膜、弯曲和剪切三部分,基于不同的应变可形成相应的刚度矩阵并组合为单元刚度矩阵。对于薄膜部分,文中独立假设薄膜应力以改善其精度,并采用杂交应力元方法得到刚度矩阵;弯曲部分则不做改变,由基于位移的应变得得到;剪切部分则采用假设自然应变的方法来得到新的剪应变以克服薄壳剪切自锁,并用于计算相应的刚度矩阵。在最后给出的算例中,采用新单元组的网格在自适应细分后,依旧规整并不出现大的几何形状畸变,并且整体收敛速度有所提高。

2 单元刚度矩阵的形成

在新单元中,薄膜部分采用基于 H-R(Hellinger-Reissner)原理的杂交应力元方法以改善薄膜应力,而剪切部分则采用假设自然应变方法以克服薄壳下的剪切自锁,弯曲部分则保持不变。本文所阐述的单元为四节点线性单元及在此基础上演变的过渡单元(仍属线性范畴)。线性单元对壳弯曲近似较差,因此一般情况下不会发生薄膜自锁。

同时,杂交应力元方法本身也有助于缓解薄膜自锁。在单元列式中,各场变量均定义在单元局部正交坐标系 $(x, y, z)^{[3]}$ 中,并且 x - y 面与壳体中面相切。如此以单元为基础的拓展 H-R 泛函为

$$\Pi^e = \int_{\Omega^e} \left[-\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_m^T \mathbf{C}_p^{-1} \boldsymbol{\sigma}_m + \boldsymbol{\sigma}_m^T \boldsymbol{\varepsilon}_m \right] + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_b^T \mathbf{C}_p \boldsymbol{\varepsilon}_b + \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{C}_s \boldsymbol{\gamma} \Big] d\Omega - W^e \quad (1)$$

式中 Ω^e 表示单元范围, \mathbf{C}_p 和 \mathbf{C}_s 分别指面内及剪切材料弹性矩阵, W^e 为单元外部做功。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_m &= \{ \sigma_{mx}, \sigma_{my}, \sigma_{mxy} \}^T = \mathbf{P} \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_m &= \{ \varepsilon_{mx}, \varepsilon_{my}, \gamma_{mxy} \}^T = \mathbf{B}_m \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_b &= \{ \varepsilon_{bx}, \varepsilon_{by}, \gamma_{bxy} \}^T = \mathbf{B}_b \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\gamma} &= \{ \gamma_x, \gamma_y \}^T = \mathbf{B}_s \mathbf{q} \end{aligned} \quad (2)$$

分别是独立于位移的假设薄膜应力场,基于位移的薄膜应变,基于位移的弯曲应变及假设自然剪应变。在式(2)中, \mathbf{P} 是应力形函数矩阵, $\boldsymbol{\beta}$ 是参数向量, \mathbf{q} 是单元节点位移向量。 \mathbf{B} 为应变 - 位移矩阵, \mathbf{B}_m 和 \mathbf{B}_s , 沿厚度均匀分布,而 \mathbf{B}_b 沿厚度线性分布, \mathbf{B}_m , \mathbf{B}_s 和 \mathbf{B}_b 的具体列式可参考文献[16]。由式(1)的驻值条件可以得到单元刚度矩阵:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_m + \mathbf{K}_b + \mathbf{K}_s \quad (3)$$

式中 \mathbf{K}_m , \mathbf{K}_b 和 \mathbf{K}_s 分别对应薄膜、弯曲及剪切部分的刚度矩阵,具体表达式为

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_b &= \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_b^T \mathbf{C}_p \mathbf{B}_b d\Omega \\ \mathbf{K}_s &= \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_s^T \mathbf{C}_s \mathbf{B}_s d\Omega \end{aligned} \quad (4)$$

式中

$$\mathbf{H} = \int_{\Omega^e} \mathbf{P}^T \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{P} d\Omega, \mathbf{G} = \int_{\Omega^e} \mathbf{P}^T \mathbf{B}_m d\Omega \quad (5)$$

对于 5 至 7 节点的过渡单元(见图 1),单元内坐标和位移采用了 Gupta^[17] 专为过渡单元设计的插值形函数,其偏导数在单元内并不连续,因此在计算含有基于位移的应变 - 位移矩阵的积分时,需要按图 1 给出的不同阴影区域分片计算。

2.1 假设薄膜应力场的设计

由于薄膜应力分量与二维平面问题中各应力分量一致,可将已存在的二维平面杂交应力元及其假设应力场用于构造 \mathbf{K}_m 。对于本文的四节点单元如图 1 所示,可以使用经典的二维 Pian-Sumihara 假设应力场^[18],即

$$\boldsymbol{\sigma}_m = \mathbf{P} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{T}_\sigma \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \xi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_5 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

式中 \mathbf{T}_σ 为从自然坐标 (ξ, η) 到单元局部正交坐标 (x, y) 的面内应力转换矩阵^[19]。

而对于如图 1 所示拥有 5 至 7 个节点的过渡单元(如果网格中含有 8 节点的过渡单元,则将其细分成四个四节点单元),从保证单元刚度矩阵满秩

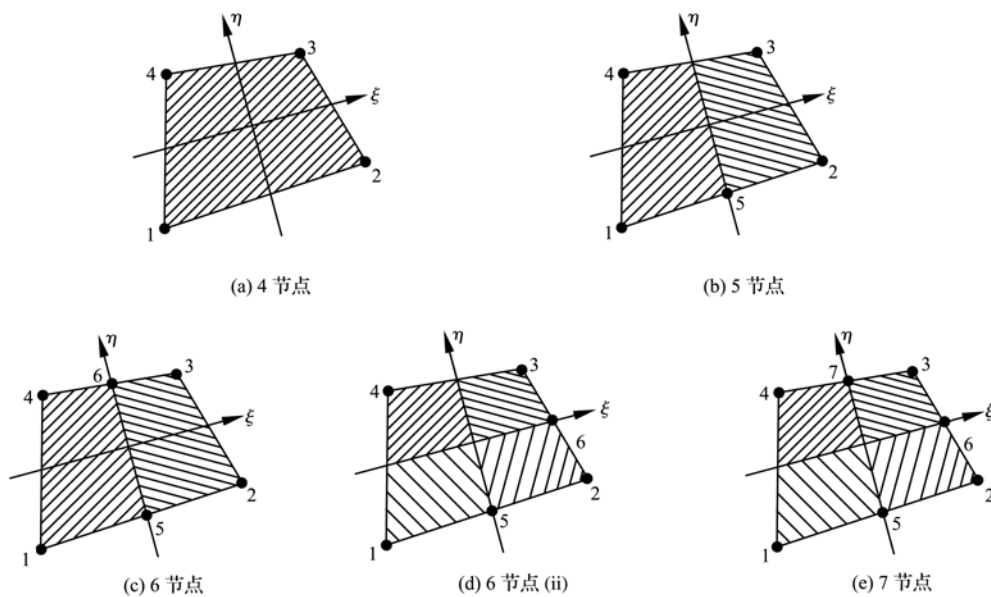


图 1 自然坐标系下(a)普通 4 节点单元和(b-e)各种过渡单元中面图

Fig. 1 The middle surface of regular element (a) and transition elements (b-e) with different mid-side nodes different integration zones are hatched differently

的角度考虑,需要分别设计另外三个假设应力场。作者先前在研究二维平面自适应问题中对 5 至 7 个节点的杂交应力过渡单元使用不同应力场和使用同一应力场有过详细阐述^[20,21]。得到的结论为:由于 5 节点过渡单元在自适应分析时所生成的过渡单元中占绝大多数,因此有必要设计一个应力场使得此过渡单元单刚满秩。为此, σ_m 采用与文献 [20,21] 中 5 节点杂交应力过渡单元相同的假设应力场:

$$\sigma_m = \mathbf{T}_\sigma \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \eta & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \xi & 0 & \eta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\eta & -\xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_7 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

另一方面,如果要单独为 6、7 节点的过渡单元设计保证单刚满秩的应力场,则需要引入含有二次项的应力模态,但这需要提高积分阶次并导致计算效率降低。文献 [20,21] 将统一使用式 (7) 应力场的单元组与使用为不同过渡单元分别设计应力场的单元组进行了比较,精度上两者相差不大,前者稍稍占优。因此,这里依然为 6、7 节点的过渡单元使用式 (7) 的假设应力场。需要注意的是 6、7 节点的过渡单元采用只含有 7 个应力模态的应力场 (7) 会引起 6、7 节点单元产生伪零能模态,但由于所有的过渡单元都与满秩的四节点单元相连接,因此总体刚度矩阵仍可保证满秩,这一点也在各种数值算例中得到验证。以缺秩最为严重的七节点过渡单元为例,在其三条含有中间节点的边界上将至少连接 6 个四节点普通单元。如果将这个过渡单元和与其连接的 6 个普通单元看做一个单元集合的话,则此单元集合的刚度矩阵一定满秩。6 个节点过渡单元则同理。

2.2 假设自然应变

在假设自然应变方法中,自然坐标系下的剪应变 $\{\gamma_{z\xi} \ \gamma_{z\eta}\}$ 是由选定样点处的值插值得到^[4-6]。对于四节点单元有

$$\begin{aligned} \gamma_{z\xi} &= \frac{1-\eta}{2} \gamma_{z\xi}^- + \frac{1+\eta}{2} \gamma_{z\xi}^+ \\ \gamma_{z\eta} &= \frac{1-\xi}{2} \gamma_{z\eta}^- + \frac{1+\xi}{2} \gamma_{z\eta}^+ \end{aligned} \quad (8)$$

式中 $\gamma_{z\xi}^-$, $\gamma_{z\xi}^+$, $\gamma_{z\eta}^-$ 及 $\gamma_{z\eta}^+$ 便是样点处的剪应变,这里 $\gamma_{z\xi}^- = \gamma_{z\xi}^-|_{\xi=0, \eta=-1}$, 其他符号同理。这些值由应变-位移关系直接推导得出。

对于过渡单元,由于在特定边界上有中间节点,则此边上的样点值需要插值得到。以 5 节点过

渡单元为例,在含有节点 5 的单元边界上的剪应变 $\gamma_{z\xi}$ 由以下关系得

$$\gamma_{z\xi} = \frac{1-2\xi}{2} \gamma_{z\xi}^- \Big|_{\xi=-1/2, \eta=-1} + \frac{1+2\xi}{2} \gamma_{z\xi}^+ \Big|_{\xi=+1/2, \eta=-1} \quad (9)$$

至此,单元局部正交坐标下的剪应变可通过坐标转化得到,即

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_{zx} \\ \gamma_{zy} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_\gamma \begin{Bmatrix} \gamma_{z\xi} \\ \gamma_{z\eta} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_\gamma \mathbf{q} \quad (10)$$

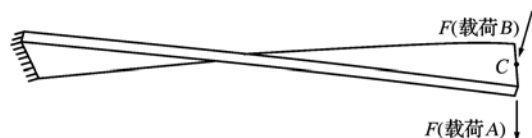
式中 \mathbf{T}_γ 为从自然坐标 (ξ, η) 到单元局部正交坐标 (x, y) 的剪应变转换矩阵^[19]。

3 数值算例

本节将给出两个常用于壳单元数值验证的算例,并对其中一个算例采用本文推出的新单元组进行自适应分析。在采用自适应分析的算例中,将出现四组数据,每组数据所采用的网格划分方法和具体单元类型见表 1。其中,ANS4 为假设自然应变四节点蜕化壳元^[4-6];ANS-A 是采用 2.2 节的方法而得到的 5 ~ 7 节点假设自然应变过渡单元组;MHS- $n\beta$ 为本文所推导的新单元组, n 表示应力场中含有的应力模态个数,其 4 节点单元为 MHS-5 β , 使用式 (6) 的假设应力场,而 5 ~ 7 节点过渡单元组命名为 MHS-7 β 并统一使用式 (7) 的假设应力场。在比较这四组数据时,将会以系统自由度个数 n DOF 的对数为横坐标,整体估算误差的能量范数 $\|e\|$ 的对数为纵坐标,画出对应的收敛曲线。

3.1 90° 扭曲悬臂梁

本算例考察一个 90° 扭曲悬臂梁受不同方向集中力作用的问题,此算例常用于验证薄膜自锁问题^[23]。图 2 给出了扭曲悬臂梁的具体参数及边界条件。为了验证新单元组是否会产生薄膜自锁,悬臂梁采用两种厚度进行计算并与精确解进行比较,分别为 0.32 及 0.0032。两个集中力 A 和 B 将分别加载于 C 点,载荷 A 与悬臂梁平行,而载荷 B 垂直于悬臂梁。图 3 所示的网格 (a) 用于 4 节点单元的验证,而对



$E = 29 \times 10^6, \nu = 0.22, F = 1.0$
长度 = 12, 宽度 = 1.1, 扭曲 = 90°

图 2 90° 扭曲悬臂梁受不同方向集中力作用

Fig. 2 90° twisted beam under different concentrated loads

表 1 四组数据分别采用的网格划分方法和具体单元类型

Tab. 1 The mesh refinement strategies and element types used in four different groups

	网格细分方法	普通 4 节点单元	过渡单元
第 1 组(ANS4-U)	均匀细分	ANS4	无
第 2 组(ANS-A)	采用过渡单元的 h 型自适应	ANS4	ANS-A
第 3 组(ANS4 + MHS)	采用过渡单元的 h 型自适应	ANS4	MHS-7 β
第 4 组(MHS)	采用过渡单元的 h 型自适应	MHS-5 β	MHS-7 β

于过渡单元,只需验证唯一满秩的 5 节点过渡单元即可,为此网格(b)加入了尽可能多的该过渡单元。通过计算,将悬臂梁在不同厚度及载荷作用下 C 点沿载荷作用方向的挠度与精确解进行比较,可以发现本文推出的新单元组不会产生薄膜自锁,而且在精度上比经典的 ANS 单元有所提高。

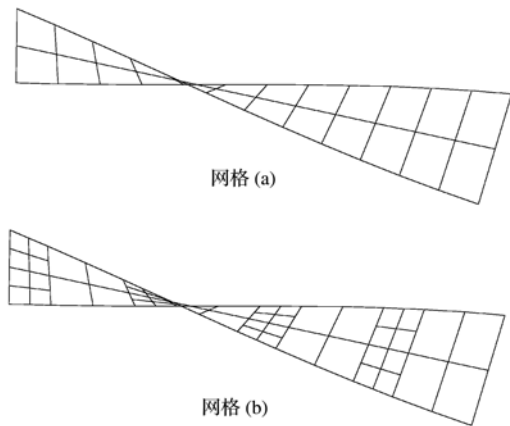


图 3 用于验证薄膜自锁的两种网格
Fig. 3 Meshes applied to verify membrane locking

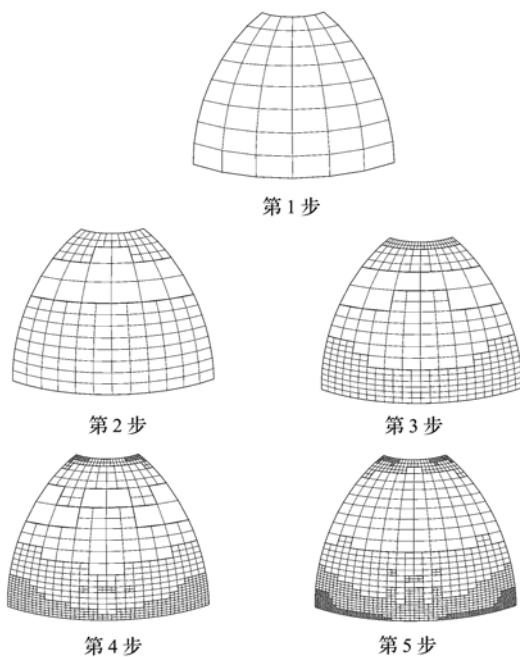


图 5 半圆形薄壳问题中采用本文推出的新单元组进行自适应分析所生成的网格
Fig. 5 Meshes for the hemispherical shell problem

3.2 半球形薄壳

本算例将分析一个半球形薄壳结构受到对称集中力作用的问题,如图 4 所示。利用对称性,只需为整个结构的四分之一部分建立模型。采用新单元组进行分析,需要 5 个自适应步骤以达到设定为 8% 的目标误差,相应网格如图 5 所示。从图 6 的误差比较来看,MHS 相比 ANS-A 有较明显的精度提高,而 ANS4 + MHS 则与 ANS-A 相差不多,原因在于这两组数据均采用 ANS4 作为普通 4 节点单元。

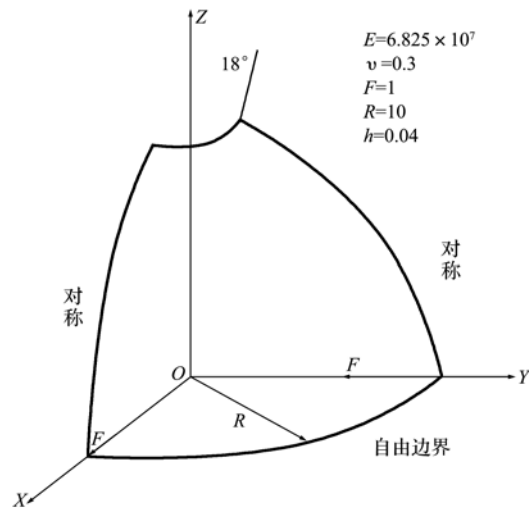


图 4 半球形薄壳受集中力作用
Fig. 4 Hemispherical shell subjected to self-equilibrating radial point forces

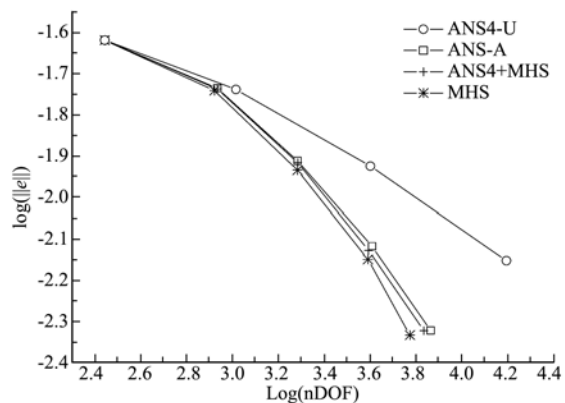


图 6 半球形薄壳问题中四种单元组的误差比较
Fig. 6 System errors and convergence speeds by different element families in the hemispherical shell problem

4 结 论

本文推出一组可用于 h 型自适应分析的四边形蜕化壳元。此组单元的刚度矩阵由薄膜、弯曲和剪切三部分组合而成。薄膜部分采用杂交应力元方法去设计以改善薄膜应力,并且 5~7 节点的过渡单元统一使用一个含有 7 个应力模态的假设应力场;弯曲部分则不做改变,由基于位移的应变得到;剪切部分采用假设自然应变的方法来设计以克服薄壳剪切自锁,并且对于过渡单元,本文给出了在含有中间点的边界上剪应变样点值的获取办法。在文章最后,首先通过一个算例验证了新单元组不会出现薄膜自锁,其后在另一个算例中,采用新单元组的网格在自适应细分后,依旧规整而不出现大的几何形状畸变,并且整体收敛速度和精度相比其他单元有所提高。

参考文献(References):

- [1] Yang T Y, et al. A survey of recent shell finite elements [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000, **47**:101-127.
- [2] Sze K Y. Three-dimensional continuum finite element models for plate/shell analysis[J]. *Progress in Structural Engineering and Materials*, 2002.
- [3] Ahmad S, Irons B M, Zienkiewicz O C. Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1970, **2**:419-451.
- [4] Dvorkin E N, Bathe K J. A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis [J]. *Engineering Computations (Swansea, Wales)*, 1984, **1**:77-88.
- [5] Park K C, Stanley G M. A curved C0 shell element based on assumed natural coordinate strains[J]. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 1986, **53**:278-290.
- [6] Huang H C, Hinton E. A new nine node degenerated shell element with enhanced membrane and shear interpolation[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1986, **22**:73-92.
- [7] Choi C K, Paik J G. An effective four node degenerated shell element for geometrically nonlinear analysis [J]. *Thin-Walled Structures*, 1996, **24**:261-283.
- [8] Onate E, Bugeda G. Study of mesh optimality criteria in adaptive finite element analysis[J]. *Engineering Computations*, 1993, **10**:307-321.
- [9] Hinton E, Rao N V R, Oezakea M. Mesh generation with adaptive finite element analysis. *Advances in engineering software and workstations*, 1991, **13**: 238-262.
- [10] Hinton E, Oezakca M, Rao N V R. Adaptive analysis of thin shells using facet elements[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1991, **32**:1283-1301.
- [11] Pica A, et al. Smoothing stress resultants in adaptive finite element shell analysis [J]. *Computers and Structures*, 1995, **54**:835-849.
- [12] Okstad K M, Mathisen K M. Towards automatic adaptive geometrically non-linear shell analysis. Part I: Implementation of an h -adaptive mesh refinement procedure[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, **37**:2657-2678.
- [13] Yunus S M, Pawlak T P, Wheeler M J. Application of the Zienkiewicz-Zhu error estimator for plate and shell analysis[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1990, **29**:1281-1298.
- [14] Choi C K, Lee W H. Versatile Variable-Node Flat-Shell Element[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1996, **122**:432-441.
- [15] Lee C K, Hobbs R E. Automatic adaptive refinement for shell analysis using nine-node assumed strain element [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1997, **40**:3601-3638.
- [16] Sze K Y. Explicit hybrid-stabilized 9-node Lagrangian shell element[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1994, **117**:361-379.
- [17] Gupta A K. A finite element for transition from a fine to a coarse grid[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1978, **12**:35-45.
- [18] Pian T H H, Sumihara K. Rational approach for assumed stress finite elements[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1984, **20**:1685-1695.
- [19] Sze K Y, Zhu D. A quadratic assumed natural strain curved triangular shell element[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1999, **174**:57-71.
- [20] Wu D, Sze K Y, Lo S H. Two-and three-dimensional transition elements for adaptive refinement analysis of elasticity problems[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2008, **78**: 587-630.
- [21] Lo S H, Wu D, Sze K Y. Adaptive meshing and analysis using transitional quadrilateral and hexahedral elements[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2010, **46**:2-16.

A new family of elements for h -type adaptive analysis for shell problems

WU Dan^{*}, SZE Kam-yim

(Department of Mechanical Engineering, The University of Hong Kong, Hong Kong, China)

Abstract: In this paper, a new family of degenerated shell elements being suitable for h -type adaptive analysis is presented. For most of shell structures, the stiffness matrix of the shell element can be split into membrane, bending and shear stiffness matrices. For the membrane part, the membrane stresses are independently assumed and the pertinent stiffness matrix is obtained by the hybrid element method to improve the accuracy of membrane stresses. For the bending part, displacement-based strain is kept intact and used to formulate the corresponding stiffness matrix. For the shear part, the assumed natural strain method is employed to construct the shear strains to obtain pertinent stiffness matrix and overcome shear locking for thin shell problems. Several numerical examples are presented. With the newly developed element family, more regular meshes are generated and the convergence rate is higher than those yielded by using other element families.

Key words: shell; adaptive; finite element; hybrid-stress; assumed natural strain

~~~~~  
(上接第 472 页)

## Failure modes analysis of a broken down transmission tower under ice loads

XIONG Tie-hua<sup>\*1</sup>, LIANG Shu-guo<sup>1</sup>, WU Hai-yang<sup>2</sup>

(1. School of Civil and Architectural Engineering, Wuhan University, Wuhan 430072, China

2. Central Southern China Electric Power Design Institute, Wuhan 430071, China)

**Abstract:** A method controlled by ice thickness was introduced to generate dominant failure modes of a transmission tower. In two conditions, dominant failure modes of a broken down transmission tower in southern China were gotten. The examples showed that this kind of tower had three weakparts: points of hanging lines, upside braces and upside tower body, and the limit ice thickness of points of hanging lines and upside braces were very close to the designed ice thickness of the tower if 20% unbalance tension existed. The numerical results of failure modes analysis were consistent with the conclusion given by the accident investigation report.

**Key words:** failure modes; transmission tower; ice load; limit load; tower collapses