

材料热传导系数随温度变化函数的反演方法

唐中华^{*1}, 钱国红², 钱炜祺³

(1. 西南科技大学土建学院, 绵阳 621010; 2. 海军装备研究院 航空研究所, 上海 200436;
3. 中国空气动力研究与发展中心, 绵阳 621000)

摘要:材料热传导系数的反演是一类典型的热传导逆问题。针对材料热传导系数随温度变化的情况, 本文将材料的热传导系数值按温度区间分段离散, 建立了通过材料边界点的温度测量来反演各温度区间热传导系数值的遗传算法和伴随方程法。通过典型算例分析和考虑测量噪声、系统噪声的反演计算结果分析表明: 所建立的反演算法都是可行有效的, 受测量随机噪声和系统噪声的影响较小, 具有较好的鲁棒性。

关键词:热传导逆问题; 热传导系数; 反演; 遗传算法; 伴随方程法
中图分类号: O242 **文献标志码:** A

1 引言

热传导逆问题, 或称为热传导反问题 IHCP (Inverse Heat Conduction Problem), 是利用实验手段测得物体内部或边界上某点或某些点上的温度及其随时间的变化历程, 通过求解传热微分方程来反演物体边界热流、材料热传导系数或物体内部的热源分布等参数。热传导逆问题在航空航天、核物理、冶金等工业研究领域中有广泛的应用背景^[1,2], 是传热学研究的热点之一。材料热传导系数的反演是一类典型的热传导逆问题, 目前, 工程上反演材料热传导系数的方法主要有稳态法^[3]、激光法^[4]及灵敏度法^[5]等。在这些方法的传热模型中, 都引入了材料的热传导系数为常数或是随温度变化的已知函数形式的假设, 而如果在工程实际中事先对材料的热传导系数随温度变化的函数形式未知, 一种可行的方法则是将材料的热传导系数值按温度区间分段离散, 并通过材料内部或边界温度场的测量结果来反演出各段的热传导系数值^[6]。但是, 对材料内部点进行温度测量在工程上实现起来较为困难, 因此通常只能通过边界点上的温度测量来进行反演。本文建立了求解这一反演问题的

两种方法: 遗传算法和伴随方程法, 并进行了算例计算和分析。

2 反演材料热传导系数的数学模型

确定材料的热传导系数, 需要开展相应的实验, 如图 1 所示, 所测材料试样的左端受常值均匀热流 $q_1 = Q$, 右端绝热 $q_2 = 0$, 其余两端近似为绝热边界条件, 温度传感器置于测点 $x = L$ 处, 测量该点的温度历程 $\hat{T}(L, t)$ 。则这一传热问题可简化为一维热传导方程来描述, 其无量纲化后的形式可写为

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (1)$$

$$\text{边界条件: } x = 0: -k(T) \frac{\partial T}{\partial x} = q_1$$

$$x = L: -k(T) \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$\text{初始条件: } t = 0: T = T_0$$

$$\text{观测方程: } \hat{T}(L, t) = T(L, t) + v(t) \quad (2)$$

式中 ρ 为材料密度, C_p 为材料比热, $v(t)$ 为测量噪声。

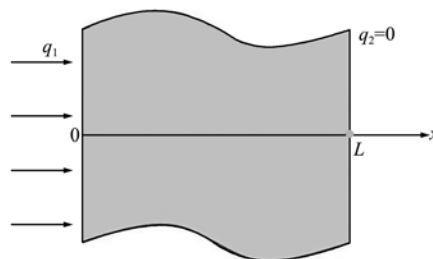


图 1 反演材料热传导系数示意图
Fig. 1 Sketch of thermal conductivity inversion

收稿日期: 2009-07-09; 修改稿收到日期: 2010-07-19.
基金项目: 国家自然科学基金(10702076); 四川省科技厅重点项目(2010JY0165); 四川绵阳市重点专项(09Y003-13); 四川省教育厅重点项目(2003A112)资助。
作者简介: 唐中华*(1960-), 男, 副教授
(E-mail: tangzhonghua@126.com).

式(1)中的热传导系数是温度的函数,若函数形式未知,则需将温度的可能取值范围 $[T_0, T_M]$ 分为 M 个区间,热传导系数值在各温度区间内取常数,即

$$[T_0, T_M] = \bigcup_{i=1}^M [T_{i-1}, T_i]$$

$$k(T) = \begin{cases} k_1; T \in [T_0, T_1] \\ \dots \\ k_i; T \in [T_{i-1}, T_i] \\ \dots \\ k_M; T \in [T_{M-1}, T_M] \end{cases} \quad (3)$$

可见,如果给定热传导系数在各温度区间内的值 $k_i (i = 1, M)$, 则可以采用有限控制体积法^[4,5]来进行热传导正问题的数值求解。然而就逆问题而言,热传导系数 $k(T)$ 未知,需要由观测方程(2)中的信息来反演,因此该逆问题可转化为求合适的 $k(T)$ 使目标函数达极小的优化问题即

$$J(k) = \int_{t=0}^{t_f} [T(L, t, k) - \hat{T}(L, t)]^2 dt \quad (4)$$

式中 $t = [0, t_f]$ 表示温度测量的时间段。由于 k 针对温度区间进行了离散,因此式(4)中的函数优化问题转化为了针对参数 $k_i (i = 1, M)$ 的参数优化问题,下面介绍其优化策略。

3 反演材料热传导系数的遗传算法

对于上述优化问题,可以采用的优化方法主要分为遗传算法和梯度类优化算法。遗传算法 GA(Genetic Algorithms) 是模拟生物在自然环境中的遗传和进化过程而形成的一种自适应全局优化概率搜索算法。与梯度类优化算法相比,遗传算法主要有以下几个不同之处:(1) 遗传算法不直接作用在参变量集上,而是利用参变量集的某种编码;(2) 遗传算法不是从单个点,而是从一个点的群体开始搜索;(3) 遗传算法利用适应值信息,无需导数或其它辅助信息;(4) 遗传算法利用概率转移准则,而非确定性准则。遗传算法实际上提供了一种求解复杂系统优化问题的通用框架,不依赖于问题的具体领域,具有较强的鲁棒性和全局优化能力,因而在函数优化、组合优化、自动控制、图像处理及人工智能等研究领域日益得到广泛应用^[7,8]。

采用遗传算法来处理优化问题的基本思路是随机生成一个由待优化参数组合成个体的种群,

计算所有个体的目标函数,并转换为适应值 F 的形式为

$$F = 1/J \text{ 或 } F = a - J$$

(a 是一个较大的正数) (5)

以使最小的目标函数对应于最大的适应值,再通过适当的选择、复制及进化机制,使适应值较大的个体能在优化过程中被保留并不断进化,类似于“适者生存”,这样经过若干代进化后最终得到的适应值最大的个体即为优化问题的最优解。对于材料热传导系数的反演, J 为式(4)中的形式,其具体算法如下。

(1) 首先是编码,可以采用二进制编码或十进制编码,将待优化参数 $k_i (i = 1, M)$ 分别对应成二进制数或十进制浮点数字列,组合在一起形成个体的染色体。

(2) 初始化:利用随机方法产生 P 个个体,形成初始种群,利用每个个体对应的 $k_i (i = 1, M)$ 进行热传导正问题计算,得到各个体的 J 和适应值 F 。

(3) 个体选择、复制操作:对初始种群,根据适应值决定的概率分布,采用轮盘赌选择法来重新生成 P 个个体。

(4) 对步骤(3)生成的 P 个个体进行单点交叉、均匀变异操作,产生新的种群。

(5) 对新种群中的 P 个个体进行热传导正问题计算,找出新种群中适应值最大的个体,判断计算是否收敛,若收敛,则停止,否则返回步骤(3)。

4 伴随方程法

伴随方程法 AEM(Adjoint Equation Method) 是梯度类优化算法^[9],其基本思想是将传热模型的偏微分状态方程看作为对未知参数的约束,利用拉格朗日(Lagrange) 乘法法将有约束的参数优化问题转化为如下的无约束优化问题。同时,由于 T 本身是位置和时间的函数,所以 $k(T)$ 可改写为 $k(x, t)$ 的形式,即

$$J(k) = \int_{t=0}^{t_f} [T(L, t, k) - \hat{T}(L, t)]^2 dt + \int_0^L \int_0^L \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\partial T}{\partial t} \right] \lambda(x, t) dx dt \quad (6)$$

式中 λ 称为伴随变量,对此式做分部积分,并采用变分分析后可知伴随变量满足:

$$\begin{cases} \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[k(x, t) \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right] = 0 \\ k(x, t) \frac{\partial \lambda}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \\ k(x, t) \frac{\partial \lambda}{\partial x} \Big|_{x=L} = 2[T(L, t) - \hat{T}(L, t)] \\ \lambda(t_f) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

该方程的形式与式(1)类似,可采用有限体积法进行求解,但需注意为了使用时域边界条件,应进行变量替换 $\tau = t_f - t$ 后再求解。同时,由式(6)可知,目标函数对热传导系数 $k(x, t)$ 的导数为

$$\frac{\partial J}{\partial k}(x, t) = \frac{\partial J}{\partial k}(x, t) = -\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \lambda(x, t)}{\partial x} \quad (8)$$

而目标函数对离散区间热传导系数 $k_i (i = 1, M)$ 的导数为

$$\frac{\partial J}{\partial k_i} = \overline{\sum_j \sum_l \frac{\partial J}{\partial k}(x_j, t_l)} \quad (9)$$

且 j, l 满足 $T(x_j, t_l) \in [T_{i-1}, T_i]$

此导数即为梯度值,可代入下式进行优化计算得

$$\hat{k}_i^{n+1} = \hat{k}_i^n - \beta \left[\frac{\partial J}{\partial k_i} \right] \quad (10)$$

式中 上标 n 和 $n+1$ 为迭代步数, β 为步长,此时 k_i 上部的“ $\hat{\cdot}$ ”符号为估计值。

5 算例与结果分析

对于上述反演算法,首先对热传导正问题计算及反演算法的有效性进行算法验证。对于图 1 所示的热传导问题,当 Q 和 k 为常数时,测点处的温度值有如下理论解^[4]:

$$T(L, t) = T_0 + \frac{QL}{k} \left[\frac{kt}{\rho C_p L^2} - \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp \left\{ \frac{-n^2 \pi^2 kt}{\rho C_p L^2} \right\} \cos(n\pi) \right] \quad (11)$$

取 $Q = L = k = 1, \rho C_p = 1, T_0 = 0$, 利用上式可以计算出测点处的温度历程。下面将此温度历程的理论解视为实测值,先利用第 3 节中的遗传算法来反演材料的热传导系数,遗传算法中采用二进制编码,种群样本数 $P = 50$,交叉概率为 0.8,变异概率为 0.05,进化 30 代结果就收敛到 $k = 1.0002686$,与真值 $k = 1$ 的相对偏差为 0.02686%。这一结果同时验证了热传导正问题求解方法和遗传算法求解逆问题的有效性。同样对这一算例采用伴随方程法来反演,热传导系数的初值取为 0.5,图 2 给出了式(10)迭代过程中热传导系数的收敛过程和优化目标函数的下降过程,可以看出,优化计算 30 步后

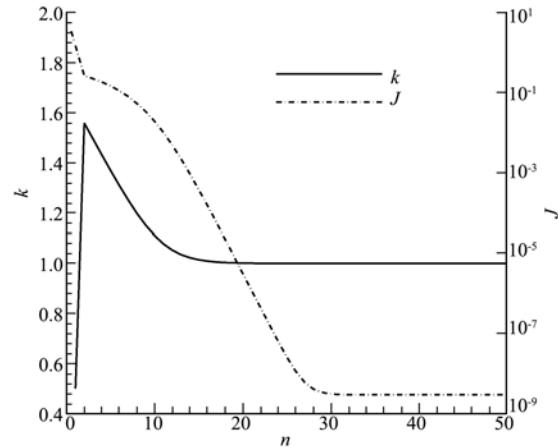


图 2 伴随方程法反演出热传导系数收敛历程
Fig. 2 Convergent history of estimated thermal conductivity by AEM
目标函数下降至 10^{-8} , 参数收敛到 $k = 1.000305$, 与真值 $k = 1$ 的相对偏差为 0.0305%, 这一结果也初步验证了伴随方程法的有效性。

接下来考虑某型热传导系数随温度显著变化的典型隔热材料反演算例,材料的 $\rho = 1300 \text{ kg/m}^3, C_p = 1100 \text{ J/kgK}, L = 0.01 \text{ m}, T_0 = 600 \text{ K}, Q = 50 \text{ kW/m}^2$ 。设材料热传导系数随温度变化的函数为

$$k(T) = \begin{cases} 1.5; T < 680 \text{ K} \\ 1.8; 680 \text{ K} \leq T < 760 \text{ K} \\ 2.3; 760 \text{ K} \leq T < 840 \text{ K} \\ 2.7; 840 \text{ K} \leq T < 920 \text{ K} \\ 3.0; T \geq 920 \text{ K} \end{cases} \quad (12)$$

利用式(1)和有限控制体积法可以计算出测点上的温度历程,再将这一计算结果做为测量结果,用遗传算法来反演 $k_i (i = 1, 5)$,遗传算法同样采用二进制编码,种群样本数 $P = 50$,交叉概率为 0.8,变异概率为 0.05,进化 400 代后得到的结果见表 1,可以看到,反演结果与参数真值都符合较好,相对误差都在 0.4% 以下。同样也采用伴随方程法来处理,参数初值都选取 1.0,经过 200 步迭代,得到的反演结果见表 1,可以看出,反演结果与参数真值符合很好,与遗传算法相比,由于其局部寻优能力更强,所以其反演结果的精度高于遗传算法。这一算例进一步验证了两种反演算法的有效性。此外,对两种算法的计算量做一简单对比可知,遗传算法进化 400 代需完成 400×50 (50 为样本数) 次热传导正问题计算,而伴随方程法的 200 代迭代则只需进行 200 次热传导正问题计算和 200 次伴随方程计算,伴随方程法的计算效率明显高于遗传算法。

表 1 反演结果与真值比较(无测量噪声)

Tab. 1 Comparison of inversion result and exact value

参数	真值	遗传算法		伴随方程法	
		反演结果	相对误差	反演结果	相对误差
k_1	1.5	1.499048	0.063%	1.499935	0.0043%
k_2	1.8	1.800635	0.035%	1.799815	0.0100%
k_3	2.3	2.308229	0.36%	2.300160	0.0070%
k_4	2.7	2.691478	0.32%	2.699803	0.0073%
k_5	3.0	2.998169	0.061%	2.999880	0.0040%

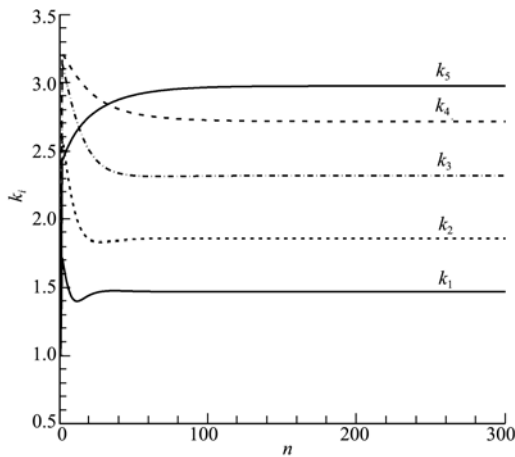


图 3 伴随方程法反演出热传导系数收敛历程
Fig. 3 Convergent history of estimated thermal conductivity by AEM ($\sigma = 5$ K)

以下分析测量噪声对反演结果的影响。材料热传导系数随温度变化的函数同样取式(12)的形式,在测点计算值的基础上迭加均值为零、标准差为 $\sigma = 5$ K 的白噪声(近似对应于温度传感器 0.5% 的相对误差)作为实测结果,再分别采用遗传算法和伴随方程法来反演 $k_i (i = 1, 5)$,就遗传算法而言,进化 400 代后的反演结果见表 2;伴随方程法中的参数初值取 1.0,经过 250 步迭代,得到的反演结果见表 2。图 3 给出了伴随方程法优化迭代过程中各参数的收敛过程,而图 4 则给出了用遗传算法反演出参数计算得到的测点温度变化历程(记为“Estimated”)与实测值(记为“Exp.”)的比较。从图 4 可以看出,利用遗传算法反演结果计算出的测点温度变化历程与实测值拟合较好(伴随方程法的情况与之类似),而从表 2 可知,两种反演算法得出的各温度区间热传导系数反演结果与真值的相对误差都较小,反演算法受测量噪声的影响较小,具有较好的鲁棒性。

表 2 反演结果与真值比较(测量噪声 $\sigma = 5$ K)

Tab. 2 Comparison of inversion result and exact value

参数	真值	遗传算法		伴随方程法	
		反演结果	相对误差	反演结果	相对误差
k_1	1.5	1.480024	1.33%	1.471386	1.91%
k_2	1.8	1.838681	2.15%	1.856694	3.15%
k_3	2.3	2.321685	0.94%	2.319179	0.83%
k_4	2.7	2.725812	0.96%	2.716833	0.62%
k_5	3.0	2.961514	1.28%	2.977164	0.76%

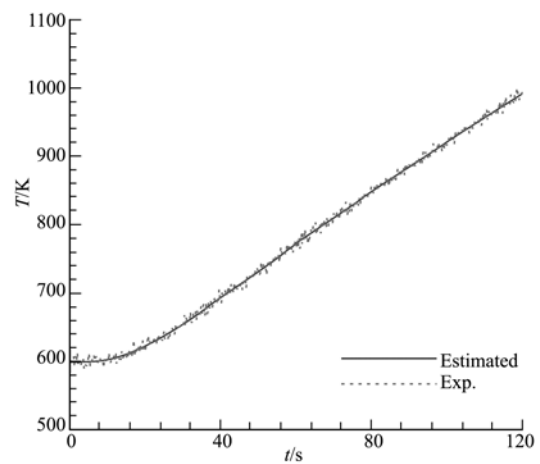


图 4 反演结果计算出测点温度与实测值比较
Fig. 4 Comparison of calculated and experimental temperature history ($\sigma = 5$ K)

最后分析系统误差对反演结果的影响。现假设材料的热传导系数的真值是随温度变化的连续函数形式,如图 5 所示的实线(记为“Specified function”),利用此函数关系和式(1)可以计算出测点上的温度历程。而在反演过程中,由于仍然设材料的热传导系数是温度的分段函数形式,这样反演的数学模型就与正问题计算的数学模型之间存在着系统误差,势必会对反演结果造成影响。为分析此影响,将正问题计算出的测点温度历程做为测量结果,分别用遗传算法和伴随方程法来反演 $k_i (i = 1, 5)$,图 5 中的离散点“Inversion(GA)”和“Inversion(AEM)”分别给出了遗传算法和伴随方程法的反演结果,从图 5 可以看出,两种算法得出的反演结果与真实的函数曲线都符合较好,系统误差对反演结果的影响不明显。当然,图 5 给出的热传导系数随温度变化曲线较为光滑,将温度分为 5 个区间就能有效捕捉到热传导系数随温度的变化规律,如果函数曲线是变化较为剧烈的情况,此时系统误差的影响可能会较为

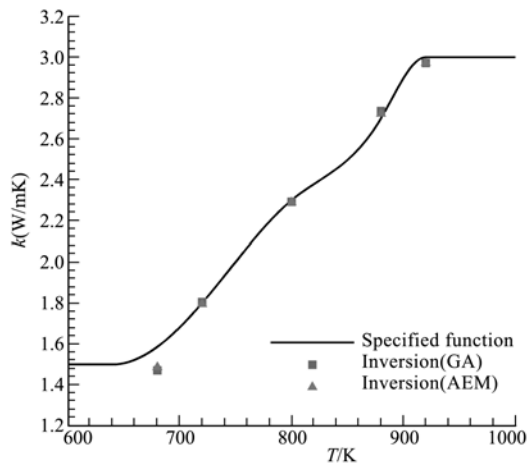


图5 热传导系数随温度变化的函数与反演结果比较
Fig. 5 Comparison of specified function and estimated values of thermal conductivity

明显,此时有必要加大 M ,对温度划分的区间进行加密。

6 结 语

本文建立了基于遗传算法和伴随方程法的材料热传导系数反演方法。尤其是针对材料热传导系数随温度变化的情况,将材料的热传导系数按温度区间分段离散,再通过材料边界点温度的测量结果来反演出各温度区间的材料热传导系数值。通过典型算例分析和考虑测量噪声、系统噪声的反演计算结果分析初步表明:本文所建立的反演算法是有效的,受测量随机噪声和系统噪声的影响较小,具有较好的鲁棒性。同时,从计算中看到,两种方法反演出的结果精度相当;遗传算法从理论上讲具有较强鲁棒性和全局优化能力,但其计算效率相对较低;伴随方程法虽然计算效率较高,但其算法中始终存在初值选取的问题,当反演参数较多时,初值选取不当的话可能会使优化计算陷入局部极值。因此,下一步可以考虑将遗传算法与伴随方程法结合,发挥二者各自的优势,形成混合遗传算法,来对材料热传导系数进行更为有效的反演。

参考文献(References):

[1] 薛齐文. 共轭梯度法求解非线性多宗量稳态传热反问题[J]. 计算力学学报, 2005, **22**(1): 51-54. (XUE Qi-wen. Solving non-linear inverse heat conduction problems with multi-variables in steady state via conjugate gradient method[J]. *Chinese Journal of Computa-*

tional Mechanics, 2005, **22**(1): 51-54. (in Chinese))

[2] Beck J V, Blackwell B, Jr Clair C R S. *Inverse Heat Conduction-Ill-Posed Problems* [M]. John Wiley & Sons. New York, 1985.

[3] 杨世铭,陶文铨. 传热学(第四版)[M]. 北京:高等教育出版社, 2006. (YANG Shi-ming, TAO Wen-quan. *Heat Transfer (The fourth edition)* [M]. Beijing: Higher Education Press, 2006. (in Chinese))

[4] 刘雄飞,薛健,傅友君. 闪光法测定半透光物质热扩散率[J]. 中南工业大学学报, 2000, **31**(6): 510-513. (LIU Xiong-fei, XUE Jian, FU You-jun. Thermal diffusivity measurement of semi-transparent materials with flash method[J]. *Journal of Central South University of Technology*, 2000, **32**(6): 510-513. (in Chinese))

[5] 钱炜祺,蔡金狮. 用灵敏度法辨识热传导系数和热流参数[J]. 空气动力学学报, 1998, **16**(2): 226-231. (QIAN Wei-qi, CAI Jin-shi. Parameter estimation of heat conduction coefficient and heat flux by sensitivity method[J]. *ACTA Aerodynamic Sinica*, 1998, **16**(2): 226-231. (in Chinese))

[6] Huang C H, Yan J Y. An inverse problem in simultaneously measuring temperature-dependent thermal conductivity and heat capacity[J]. *Int J Heat Mass Transfer*, 1995, **38**(18): 3433-3441.

[7] 周明,孙树栋. 遗传算法原理及应用[M]. 北京:国防工业出版社, 1999. (ZHOU Ming, SUN Shu-dong. *Principle and Application of Genetic Algorithms* [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1999. (in Chinese))

[8] 钱炜祺,汪清,王文正,等. 遗传算法在气动力参数辨识中的应用[J]. 空气动力学学报, 2003, **21**(2): 196-201. (QIAN Wei-qi, WANG Qing, WANG Wen-zheng, et al. Application of genetic algorithms for aerodynamic parameter estimation[J]. *ACTA Aerodynamic Sinica*, 2003, **21**(2): 196-201. (in Chinese))

[9] 钱炜祺,何开锋,汪清. 三维非稳态热传导逆问题反演算法研究[J]. 力学学报, 2008, **40**(5): 611-618. (QIAN Wei-qi, HE Kai-feng, WANG Qing. Inverse estimation of heat source term in three-dimensional transient heat conduction problem[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2008, **40**(5): 611-618. (in Chinese))

Estimation of temperature-dependent function of thermal conductivity for a material

TANG Zhong-hua^{*1}, QIAN Guo-hong², QIAN Wei-qi³

(1. School of Civil Engineering and Architecture, Southwest University of Science and Technology, Mianyang 621010, China;

2. Institute of Aviation Equipment, Naval Academy of Armament, Shanghai 200436, China;

3. China Aerodynamic Research & Development Center, Mianyang 621000, China)

Abstract: Estimation of thermal conductivity of a material is a typical Inverse Heat Conduction Problem (IHCP). Especially, when the thermal conductivity of a material is a function of temperature, the temperature range should be divided into several segments and let the thermal conductivity of the material to be a constant in every segment, and then these constants need to be estimated from the measurement information of boundary points. In this paper, two estimation methods, Genetic Algorithms(GA) and Adjoint Equation Method(AEM), are developed for the temperature-dependent thermal conductivity inversion problem. After applying these two inversion methods to some typical cases and analyzing the influence of measurement random noise and system noise, it is found that both inversion methods are feasible, effective, robust and not too sensitive to the measurement noise and system noise. Both methods are of bright prospect in engineering practice.

Key words: inverse heat conduction problem; thermal conductivity; inversion; Genetic Algorithms; Adjoint Equation Method

~~~~~  
(上接第 359 页)

## Configuration computation for one-dimensional continuum during deployment and retrieval

YU Ben-song, JIN Dong-ping

(Institute of Vibration Engineering Research, MOE Key Lab of Mechanics and Control for Aerospace Structures,

Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

**Abstract:** In this paper, the lumped mass finite element is proposed to describe the one-dimensional continuum during deployment/retrieval. The discrete dynamic model that is capable of describing the time-varying multi-degrees-of-freedom system is presented. Because of the time-varying properties, the local elements of the system need to be redivided when the number of degrees of freedom of the system changes, and accordingly the lumped mass, damping and stiffness matrices as well as the displacements and force vectors are to be updated at every step computation. A configuration computation scheme is developed for solving the time-varying dynamic systems, which is based on an improved finite difference method. A tethered-like pendulum is selected as case studies here to verify the effectiveness of the proposed computational method.

**Key words:** one-dimensional continuum; time-varying system; deployment and retrieval; configuration; finite difference method