

文章编号:1007-4708(2011)04-0590-06

模拟微可压粘弹性流体的 WCCBS_SU 方法

栗雪娟¹, 欧阳洁^{*1}, 蒋涛¹, 张小华²

(1. 西北工业大学 应用数学系, 西安 710129; 2. 三峡大学 理学院, 宜昌 443002)

摘要:针对微可压缩粘弹性流动问题,发展了微可压缩流的 WCCBS 方法,详细推导了基于 Oldroyd-B 本构模型的 WCCBS_SU 方法的求解过程。在流场微可压的条件下,分别对平面 Poiseuille 流和 4:1 粘弹性收缩流进行了数值模拟。Poiseuille 流在不同 We 数下数值结果与解析解的比较,验证了本文方法具有较高的精度和较好的稳定性。在 4:1 粘弹性收缩流的数值模拟中,讨论了不同 We 数下流场中流线、应力的变化情况,以及唇涡和凸角涡的生长情况。所有数值结果表明,对于微可压缩粘弹性流的数值模拟,WCCBS_SU 方法是一种行之有效的方法。

关键词:微可压缩;CBS;粘弹性;Weissenberg 数;Oldroyd-B

中图分类号:O368 **文献标志码:**A

1 引言

水力喷射切割、石油探测、聚合物熔体的注塑成型和挤出成型等^[1-3]都是微可压缩流动的例子。表征微可压缩性的一个重要参数是 Mach 数,它是流体速度(u)和当地音速(c)的比值($Ma = u/c$)。在流动问题数值模拟方面,目前主要沿袭两种策略:一种是求解不可压缩 N-S(Navier-Stokes)方程;另一种是求解可压缩 N-S 方程。不可压缩 N-S 方程的求解由于需要求解椭圆型方程,速度散度很难收敛到令人满意的程度,因此,计算的压力会产生较大误差。可压缩 N-S 方程组求解的优点在于不需要满足 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ 的条件,在时间推进求解过程中通过状态方程直接耦合求解密度和压力场即可。但是,当 Ma 趋近于 0 时,如何准确地表示压力变化,并由其合理地求解速度的变化是数值求解可压缩 N-S 方程的最大困难;其次,在 Ma 趋近于 0 的过程中,可压缩 N-S 方程将由双曲型逐渐退化为双曲-椭圆混合型,控制方程刚性过大。此时,如果不对控制方程进行诸如预条件这类的处理,会导致求解过程难以收敛。因此,一些成功求解可压缩流动问题的数值方法,在求解 $Ma < 0.3$ 的流动问题时其求解效率和数值精度大大降低^[4,5]。鉴于

此,发展精确高效的模拟微可压缩流动问题的数值方法应该引起关注。

CG(Characteristic Galerkin)方法是一种处理对流占优问题的有效方法。该方法沿着特征线进行时间离散,动量方程中非对称的对流项会自动消失,于是方程具有自伴随性质,此时对空间采用 Galerkin 离散最优。Zienkiewicz 等^[6]根据 CG 原理,结合分步有限元方法提出了 CBS(Characteristic-Based Split)方法。目前 CBS 有限元方法已广泛应用于求解不可压缩流动、多孔介质流动、湍流等流体力学问题^[7,8],并被验证该方法的求解效率和精度非常高,但用其模拟微可压缩粘弹性流动问题尚未见报道。鉴于 CBS 有限元方法求解流体力学问题的优点,结合文献[9]中求解微可压缩流场的思想,本文将 CBS 格式进行改进并应用于微可压缩流场的数值模拟。

2 微可压缩粘弹性流控制方程

2.1 守恒方程和本构模型

等温粘弹性微可压缩流的控制方程包括质量、动量守恒方程和以应力为主要变量的本构方程。由于微可压缩流压缩率较小,采用以压力为主要变量的分步求解格式,不需要对密度进行空间离散,此时微可压缩 N-S 方程可简写为

$$\partial \rho / \partial t = -\rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (1)$$

$$\rho(\partial \mathbf{u} / \partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (2)$$

式中 ρ 为密度, $\mathbf{u} = (u, v)$ 为速度矢量, p 为压力, \mathbf{T} 为偏应力张量。偏应力张量 \mathbf{T} 采用 Oldroyd-B 本构

收稿日期:2009-08-22;修改稿收到日期:2010-05-04。
基金项目:国家自然科学基金(10871159);国家重点基础研究 973 计划(2005CB321704)资助项目。
作者简介:栗雪娟(1980-),女,博士生;
欧阳洁*(1957-),女,教授,博士生导师
(E-mail: jieouyang@nwpu.edu.cn).

模型: $\mathbf{T} + \lambda_1 \overset{\nabla}{\mathbf{T}} = 2\mu(\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda_2 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\varepsilon}})$, 其可以分解为聚合物弹性应力 \mathbf{T}^1 和 Newton 应力 \mathbf{T}^2 之和: $\mathbf{T} = \mathbf{T}^1 + \mathbf{T}^2$ 。其中, μ 为总粘度, 包括 Newton(溶剂)粘度 μ_s 与弹性(聚合物)粘度 μ_e 之和, 即 $\mu = \mu_e + \mu_s$ 。弹性应力和 Newton 应力表达式为

$$\mathbf{T}^1 + \lambda_1 \overset{\nabla}{\mathbf{T}}^1 = 2\mu_e \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{T}^2 = 2\mu_s \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3,4)$$

式中 $\varepsilon_{ij} = (1/2)((\nabla \mathbf{u})_{ij} + ((\nabla \mathbf{u})^T)_{ij} - (2/3)\delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u})$ 为应变率张量分量, $\overset{\nabla}{\mathbf{T}} = \partial \mathbf{T} / \partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{T} - \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T$ 为上随体导数, λ_1 和 λ_2 分别为松弛和延迟时间。

2.2 状态方程

方程(1~4)并不是封闭的方程组, 因此需要引入反映密度与压力关系的状态方程。文献[1]中采用的状态方程 $\rho = \rho_0 [1 + \beta(p - p_0)]$ 只能描述压力密度的线性关系。文献[10]给出了一种指数形式的状态方程 $\rho = \rho_0 e^{\beta(p - p_0)}$, 当 β 足够小和压力小的时候, 其等价于线性关系, 不足之处是当 β 稍大时, 密度会迅速增长。上述状态方程中, β 是等温压缩率, p_0 和 ρ_0 是压力和密度的参考尺度。文献[9]采用幂率关系的状态方程, 它是目前评价较好的状态方程, 其具体形式为

$$(\tilde{p} + B) / (P_0 + B) = (\rho / \rho_0)^m \quad (5)$$

式中 $\tilde{p} = p - (1/3)tr(\mathbf{T})$, B 和 m 是常数。根据等熵原理, 对式(5)取自然对数, 并运用链式求导准则, 有

$$\partial \rho / \partial t = (1/c^2(x, t)) \partial \tilde{p} / \partial t \quad (6)$$

式中 $c^2(x, t) = m(\tilde{p} + B) / \rho$ 相当于当地声速。不同的 B 和 m 取值, 流体会体现出不同的压缩率, 并且 $m = 1$ 时, 表示线性的状态方程。

2.3 无量纲化

引入无量纲参数 Reynolds 数 $Re = \rho_0 U_0 L / \mu$, Weissenberg 数 $We = \lambda_1 U_0 / L$ 对控制方程(1~4, 6)进行无量纲化。其中, U_0, ρ_0, L 和 μ 分别为特征速度、特征密度、特征长度和总粘度。定义 $\beta = \mu_s / \mu$, 无量纲化后的控制方程为

$$\partial \rho / \partial t = -\rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (7)$$

$$Re \rho(\partial \mathbf{u} / \partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (8)$$

$$\mathbf{T}^2 = 2\beta \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{T}^1 + We \overset{\nabla}{\mathbf{T}}^1 = 2(1 - \beta) \boldsymbol{\varepsilon} \quad (9,10)$$

$$\partial \rho / \partial t = (1/c^2(x, t)) \partial \tilde{p} / \partial t \quad (11)$$

至此, 方程(7~11)构成了粘弹性微可压缩流动问

题的封闭方程组。

3 微可压缩粘弹性流的数值方法

3.1 CBS 方法

CBS 方法用特征线方法进行时间离散, 用标准 Galerkin 方法进行空间离散。不可压缩粘性流体的 CBS 格式共分为三步: 即求解中间速度、压力和修正速度。第一步, 从去掉压力项的动量方程中求解速度, 此时的速度不满足连续性方程, 需要进行修正, 称为中间速度; 第二步, 由中间速度求解压力; 第三步, 由第二步求出的压力来修正速度。

3.2 WCCBS_SU 方法

对于微可压缩流, 引入状态方程对不可压缩流的 CBS 格式进行改进, 称为 WCCBS(Weakly Compressible CBS) 方法; 另外, 在粘弹性流的求解过程中, 需要求解本构方程。其具体步骤如下。

Step1 求解中间速度, 即

$$\rho(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n) / \Delta t = -\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^n + 1/Re(\nabla \cdot \mathbf{T}^1 + \nabla \cdot \mathbf{T}^2)^n + \Delta t / 2 \mathbf{u} \cdot \nabla (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - 1/Re \nabla \cdot \mathbf{T}^1)^n \quad (12)$$

Step2 结合式(7,11)求解压力, 有

$$(\rho^{n+1} - \rho^n) / \Delta t = \left[\frac{1}{c^2} \right]^n (\rho^{n+1} - \rho^n) / \Delta t - \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}^*) + \Delta t \frac{1}{Re} \Delta p^n \quad (13)$$

Step3 用压力修正速度得

$$\rho(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*) / \Delta t = -\frac{1}{Re} \nabla p^{n+1} + \Delta t / 2 \mathbf{u} \cdot \nabla \rho^{n+1} \quad (14)$$

Step4 对弹性应力方程进行时间离散, 有

$$(\mathbf{T}^{1, n+1} - \mathbf{T}^{1, n}) / \Delta t = -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{T}^{1, n} + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{T}^{1, n} + \mathbf{T}^{1, n} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T - \frac{1}{We} \mathbf{T}^{1, n} + \frac{1 - \beta}{We} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)^n \quad (15)$$

至此, 式(12~15)作为求解微可压缩粘弹性流的时间半离散格式。对于空间离散, 除了式(15)的对流项之外, 其他项均采用标准的 Galerkin 方法离散。这是因为, 随着 We 数的增加, 式(15)对流项作用越加明显。采用标准 Galerkin 方法进行空间离散会产生数值伪振荡。文献[11]总结了一些常用的稳定化方法, SU(Streamline Upwind) 方法被一些学者^[12] 认为在保持计算稳定的前提下, 计算能

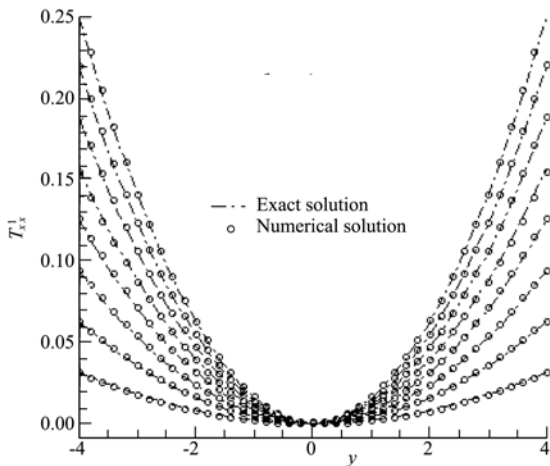
达到的最大 We 数大于其他方法;并且 SU 方法能更好地绕开边界层和奇异点附近易出现的应力场振荡现象^[13]。基于此,本文采用 SU 方法空间离散式(15)的对流项,SU 方法离散使用的权函数为 $W = N + \theta u \cdot \nabla N$,其中 N 为 Galerkin 离散的权函数, $\theta = h/2U$, h 为沿流线方向的单元特征长度, U 为特征速度。综上所述,称改进的 CBS 方法为 WCCBS_SU 方法。

4 数值算例

为了验证 WCCBS_SU 方法的有效性,下面基于 Oldroyd-B 本构模型,对平面微可压缩 Poiseuille 流和 4:1 收缩流进行数值模拟。平面 Poiseuille 流在 $Re = 0.0$ 有解析解,可以定量检查 WCCBS_SU 方法的计算精度和稳定性。4:1 收缩流具有旋转、拉伸和剪切的流动特征,因此,该算例可以进一步验证算法的可行性。

4.1 平面 Poiseuille 流

微可压缩平面 Poiseuille 流的流动区域 y 方向



取 8 个特征长度, x 方向取 18 的特征长度。入口处 ($x = 0$) 施加充分发展的边界条件 $u = 3/128(16 - y^2)$, $v = 0$; 固壁面 ($y = -4, y = 4$) 采用无滑移边界条件 $u = v = 0$; 出口处 ($x = 18$) 施加压力边界条件 $p = 0$ ^[14]。基于 Oldroyd-B 本构模型的不可压缩 Poiseuille 流弹性应力的精确解为^[13]: $T^1_{xx} = 2We(1 - \beta)(\partial u/\partial y)^2$, $T^1_{xy} = (1 - \beta)\partial u/\partial y$ 。该解可作为小 Ma 数时微可压缩流的参考解。

图 1 给出了不同 We 数下第一法向应力和剪切应力在 $x = 5$ 时数值解与解析解的比较,其中 $\beta = 1/9$, We 数的变化范围为 $[0.5, 4.0]$ 。对于第一法向应力,图 1 曲线和点从下到上分别表示 We 数为 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5 和 4.0 时的精确解与数值解。从图 1 中可以看出,第一法向应力和剪切应力的数值解和精确解吻合很好,并且 $We = 4.0$ 时,仍可得到满意的数值解,从而说明了 WCCBS_SU 方法在高 We 数下仍具有很好地稳定性和计算精度。

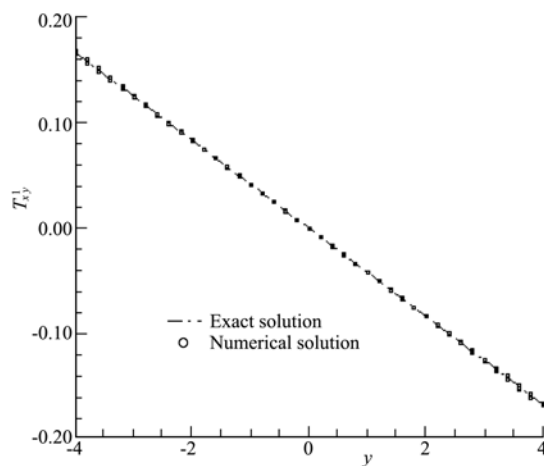


图 1 不同 We 数下第一法向应力 T^1_{xx} 和剪切应力 T^1_{xy} 在 $x = 5$ 时的数值解与解析解
Fig. 1 The exact solutions and numerical solutions of T^1_{xx} and T^1_{xy} at $x = 5$ for different We numbers

4.2 平面 4:1 收缩流

图 2 给出了 4:1 收缩流计算区域上网格剖分示意图,其中收缩口附近进行了网格加密,各个边壁的长度见图 2。边界条件为:入口处 ($x = 0$) $u = \frac{3}{128}(16 - y^2)$, $v = 0$, $T^1_{xx} = 2We(1 - \beta)(\partial u/\partial y)^2$, $T^1_{xy} = (1 - \beta)\partial u/\partial y$, $T^1_{yy} = 0$; 固壁边界处 $u = v = 0$, $\partial T^1_{xx}/\partial x = \partial T^1_{xy}/\partial x = \partial T^1_{yy}/\partial x = 0$; 对称轴上 ($y = 0$) $v = 0$, $T^1_{xy} = 0$; 出口处 ($x = 32$) $v = 0$, $p = 0$ 。

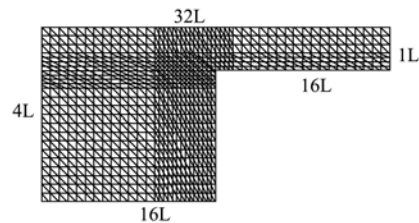


图 2 4:1 平面收缩流网格剖分示意图
Fig. 2 The 4:1 planar contraction flow mesh

为了与文献中的结果进行对比,状态方程中的参数取值为 $m = 4$, $B = 100$,此时密度和 Mach 数

的最大值为 1.3 和 0.1^[15];Oldroyd-B 本构中参数 $\beta = 1/9$, Reynolds 数取为 1.0。图 3 分别给出了密度和 Mach 数的等值线。其 Mach 数的结果与文献[9, 15] 中的结果一致,密度稍有差别,这是因为本文

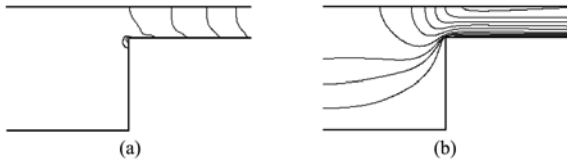


图 3 收缩口附近(a)密度和(b)Mach 数等值线
Fig. 3 The (a) density and (b) Mach number contours near to the sharp corner

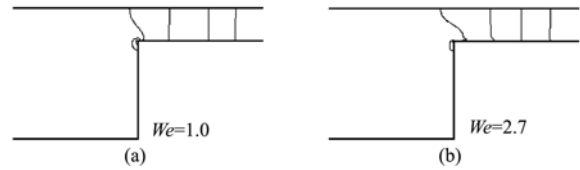


图 4 收缩口附近压力等值线
Fig. 4 The pressure contours near to the sharp corner

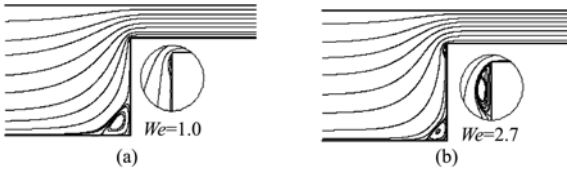


图 5 收缩口附近的流线
Fig. 5 The streamlines near to sharp corner

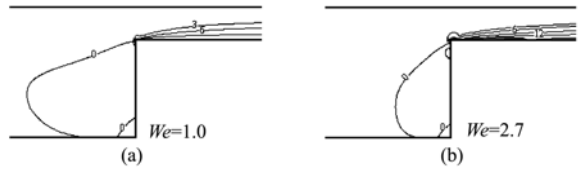


图 6 收缩口附近 T_{xx}^1 等值线
Fig. 6 The T_{xx}^1 contours near to sharp corner



图 7 收缩口附近 T_{xy}^1 等值线
Fig. 7 The T_{xy}^1 contours near to sharp corner

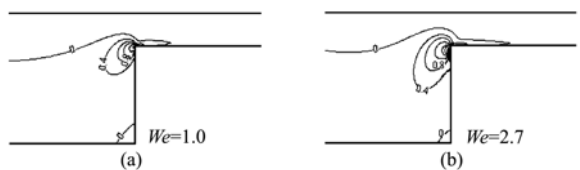


图 8 收缩口附近 T_{yy}^1 等值线
Fig. 8 The T_{yy}^1 contours near to sharp corner

采用的密度增量与压力直接相关,而文献[9,15]中的密度增量与修正压力直接相关。

图 4 给出了收缩口附近的压力等值线分布情况。从图 4 可以看出,在 We 数较小和等于临界值时,压力等值线均未出现振荡,从而说明此方法模拟效果较好。

在 4:1 收缩粘弹性流体的模拟中,角涡和唇涡的模拟被作为评价数值方法有效性的标准。图 5 给出了不同 We 数下收缩口附近的流线,图中放大部分系凸角处的唇涡。由图 5 可见,在 $We = 1.0$ 时,微可压缩流场就出现了唇涡,并且唇涡大小随 We 数的增加逐渐变大,这与文献[14]结果一致。对于角涡的变化,从图 5 可看出,其长度随着 We 数的增加而逐渐变小,这也与文献[14]结果一致。

图 6 给出了收缩口附近的第一法向应力在不同 We 数下的等值线。从图 6 可以看出,随着 We 数的增大,收缩口下游附近应力梯度变得越来越大。文献[15]给出了 $Re = 0.0$ 时微可压缩流与不可压缩流的第一法向应力的比较,等值线分布图非常相似,但没有给出 $Re = 1.0$ 的应力等值线分布。根据两种流场的相似性,将本文的结果与文献[16]中给出的不可压缩流在 $Re = 1.0$ 时的结果进行比较,可知其结果一致。

图 7 给出了收缩口附近的剪切应力在不同 We

数下的等值线。从图 7 可以看出,随着 We 数的增大,收缩口拐角处剪切应力变得越来越大,这与文献[16]给出的不可压缩流在 $Re = 1.0$ 时的应力分布一致。

图 8 给出了收缩口附近的第二法向应力在不同 We 数下的等值线。从图 8 可以看出,随着 We 数的变化,第二法向应力的变化并不是很大,但均在收缩口拐角处达到最大值,这与文献[16]中给出的应力分布一致。

图 9 给出了应力分量 T_{xx}^1 , T_{xy}^1 和 T_{yy}^1 在收缩口附近沿水平线 $y = -1$ 的分布情况。从图 9 可以看出,在不同的 We 数下,各个应力分量均在收缩口附近达到最大值,并且随着 We 数的增加峰值逐渐增大,这与文献中[16]的结果一致,只是峰值大小略有差别;另外,应力分量 T_{xx}^1 和 T_{xy}^1 即使在临界 We 数时,分布仍然光滑,但 T_{yy}^1 在 $We = 2.5$ 时出现了振荡现象,从而导致本文的 WCCBS_SU 方法模拟 4:1 收缩流的最大 We 数只能达到 2.7。文献[15]在 $Re = 0.0$ 时,给出的临界 We 数是 3.1;在 $Re = 1.0$ 时,只给出了最大 We 数是 2.0 的结果。文献[17]指出:对于很多数值方法,在 $Re = 0.0$ 或 Re 非常小时,其计算所达到的最大 We 数大于 $Re = 1.0$ 时的情况。在 $Re = 1.0$ 时,本文的 WCCBS_SU 方法超过了文献[15]中的最大 We 数,因此本文方法在求解高 We 数问题行之有效。

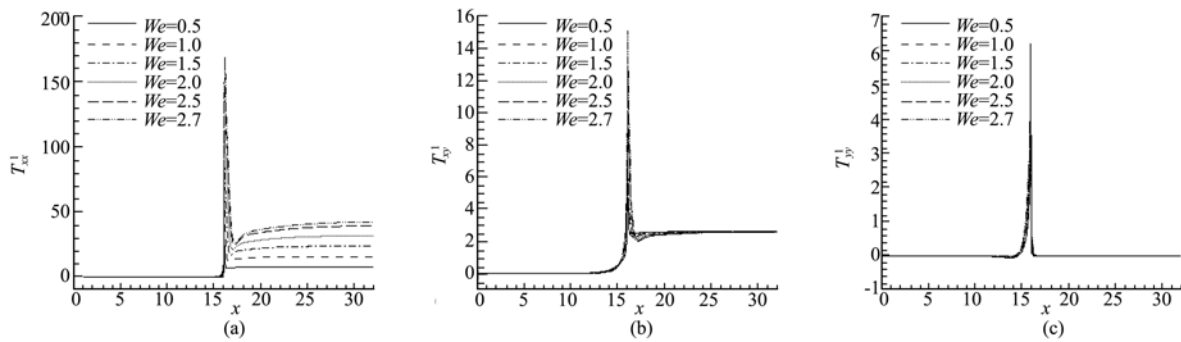


图 9 收缩口附近沿水平线 $y=-1$ 的应力 T_{xx}^1 , T_{xy}^1 和 T_{yy}^1 分布图

Fig. 9 The stress T_{xx}^1 , T_{xy}^1 and T_{yy}^1 distributions near to the sharp corner along a horizontal line at $y=-1$

5 结 论

本文针对微可压缩粘弹性流动问题,提出了 WCCBS_SU 方法。该方法对微可压缩的连续性方程和动量方程采用 CBS 方法离散,本构方程弹性应力部分采用稳定性的 SU 方法离散。文中基于 Oldroyd-B 本构模型,求解了微可压缩条件下的平面 Poiseuille 流和平面 4:1 收缩流问题。数值结果表明:① 在模拟平面 Poiseuille 流时,计算结果能在 $We=4.0$ 时与精确解吻合很好,从而说明此方法具有很好的稳定性和计算精度;② 模拟微可压缩 4:1 粘弹性流动问题时,在 $Re=1.0$ 时得到了与文献一致的结果,并且达到了比较大的 We 数;③ 随着 We 数的增大,微可压 4:1 粘弹性流动中的唇涡比不可压缩流的唇涡出现得更早(微可压缩流在 $We=1.0$ 时可以观察到唇涡,不可压缩流要在 $We>1.0$ 以后才可观察到唇涡);并且角涡随着 We 数的增大而减小,唇涡随着 We 数的增大而增大。

参考文献(References):

- [1] Taliadorou E, Georgiou G C, Alexandrou A N. A two-dimensional numerical study of the stick-slip extrusion instability[J]. *J Non-Newtonian Fluid Mech*, 2007, **146**(1-3): 30-44.
- [2] 申长雨,王利霞,等.注塑成型充填/后充填过程统一的可压缩流动分析[J]. *计算力学学报*, 2007, **24**(2): 159-165. (SHEN Chang-yu, WANG Li-xia, et al. A unified compressible flow analysis of filling and post-filling in injection molding[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2007, **24**(2): 159-165. (in Chinese))
- [3] Kang S Y, Kim S K, Woo Il Lee. Penalty formula-
tion for postfilling analysis during injection molding [J]. *Int J Numer Meth Fl*, 2008, **57**(2): 139-155.
- [4] Wong J S, Darmofal D L, Peraire J. The solution of the compressible Euler equations at low Mach numbers using a stabilized finite element algorithm[J]. *Comput Method Appl Mech*, 2001, **190**(43-44): 5719-5737.
- [5] 潘宏禄,史可天,等.可压缩自由剪切流混合转捩大涡模拟[J]. *计算力学学报*, 2009, **26**(5): 745-750. (PAN Hong-lu, SHI Ke-tian, et al. An analysis of transition coherent structures in convective Mach Number 0.4 compressible free shear flow[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2009, **26**(5): 745-750. (in Chinese))
- [6] Zienkiewicz O C, Nithiarasu P, Codina R, et al. The characteristic-based-split procedure: an efficient and accurate algorithm for fluid problems[J]. *Int J Numer Meth Fl*, 1999, **31**(1): 359-392.
- [7] Nithiarasu P, Codina R, Zienkiewicz O C. The characteristic-based split (CBS) scheme—a unified approach to fluid dynamics[J]. *Int J Numer Meth Eng*, 2006, **66**(10): 1514-1546.
- [8] Liu C B, Nithiarasu P. The characteristic-based-split scheme for viscoelastic flow past a circular cylinder [J]. *Int J Numer Meth Fl*, 2008, **57**(2): 157-176.
- [9] Keshtiban I J, Belblidia F, M F Webster Numerical simulation of compressible viscoelastic liquids[J]. *J Non-Newtonian Fluid Mech*, 2004, **122**(1-3): 131-146.
- [10] Taliadorou E, Georgiou G C, Moulitsas I. Weakly compressible Poiseuille flows of a Herschel-Bulkley fluid[J]. *J Non-Newtonian Fluid Mech*, 2008, **158**(1-3): 162-169.
- [11] 欧阳洁,张林,等.流动问题无网格 Galerkin 方法的稳定化方案研究[J]. *计算力学学报*, 2008, **25**(6): 855-862. (OUYANG Jie, ZHANG Lin, et al. Stabil-

- ization techniques based Element Free Galerkin method for flow problems[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2008, **25**(6): 855-862. (in Chinese))
- [12] Luo X L, Tanner R I. Decoupled finite element streamline-upwind scheme for viscoelastic flow problems [J]. *J Non-Newtonian Fluid Mech*, 1989, **31**(2): 143-162.
- [13] Baaijens F P T. Mixed finite element methods for viscoelastic flow analysis: a review[J]. *J Non-Newtonian Fluid Mech*, 1998, **79**(4): 361-385.
- [14] Edussuriya S S, Williams A J, Bailey C. A cellcentred finite volume method for modeling viscoelastic flow [J]. *J Non-Newtonian Fluid Mech*, 2004, **117**(1): 47-61.
- [15] Keshitiban I J, Belblidia F, Webster M F. Computation of incompressible and weakly-compressible viscoelastic liquids flow: finite element/volume schemes [J]. *J Non-Newtonian Fluid Mech*, 2005, **126**(2-3): 123-143.
- [16] Aboubacar M, Webster M F. A cell-vertex finite volume/element method on triangles for abrupt contraction viscoelastic flows [J]. *J Non-Newtonian Fluid Mech*, 2001, **98**(2-3): 83-106.
- [17] 段庆林. 成型充填过程中非等温非牛顿粘性流动的 ALE 有限元于无网格自适应耦合模拟[D]. 大连理工大学, 2007. (DUAN Qing-lin. Adaptive Coupled ALE Finite Element and Meshfree Method for Non-Isothermal Non-Newtonian Viscous Flow in Mould Filling Process[D]. Dalian University of Technology, 2007. (in Chinese))

A WCCBS_SU method for solving weakly compressible visco-elastic flow problems

LI Xue-juan¹, OUYANG Jie^{*1}, JIANG Tao¹, ZHANG Xiao-hua²

(1. Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China;

2. School of Science, China Three Gorges University, Yichang 443002, China)

Abstract: A WCCBS_SU method based on Oldroyd-B constitutive model is developed for solving the weakly compressible visco-elastic flow problems. The planar Poiseuille visco-elastic flow and the 4:1 contraction visco-elastic flow are simulated by WCCBS_SU method under weakly compressible condition. Comparisons between the numerical and analytic solutions for the Poiseuille flow show high accuracy and better stability of the method. In the simulation of the 4:1 contraction visco-elastic flow, the changes of the stream lines and stresses and growing of the lip vortex and salient corner vortex versus the Weissenberg numbers are discussed. All the numerical results show that WCCBS_SU method developed in this paper is valid for the weakly compressible visco-elastic flow problems.

Key words: weakly compressible; CBS; visco-elasticity; Weissenberg number; Oldroyd-B