

卷积型 GD 半解析法及矩形薄板瞬态响应解

彭建设^{*1}, 罗光兵², 杨杰³

(1. 成都大学 工业制造学院, 成都 610106; 2. 西南交通大学 牵引动力国家重点实验室, 成都 610031;
3. 皇家墨尔本理工大学 航空机械制造工程学院, 澳大利亚墨尔本)

摘要:卷积型的 Gurtin 变分原理是目前在数学上唯一能和动力学初值问题完全等价的变分原理, 它完全反映了有关初值问题的全部特征。GD 法 (General Differential Method) 是从泰勒展开式出发, 推出的一种求解偏微分方程的数值方法, 本文系统地介绍了 GD 法的基本原理, 以及权系数的推导。本文通过卷积将矩形薄板原始控制方程构造包含初始条件的新的具有完整初值问题特征的控制方程。对新的控制方程在时间域取解析函数, 在空间域采用离散的 GD 法, 从而构造了卷积型 GD 半解析法。该方法既可以达到和 Gurtin 变分原理相同的效果, 又避开了 Gurtin 泛函的繁复。计算表明, 该方法是一种精度高效率高的求解动力响应问题的计算方法。

关键词:卷积; 瞬态响应; GD 法; 半解析法
中图分类号:O302 **文献标志码:**A

1 引言

在自然科学的研究中, 各学科领域对于实际问题的研究, 最终都将涉及到对大量偏微分方程的求解。在绝大多数情况下, 都不能求出其解析解。数值解成为求解这些偏微分方程的主要方法。微分求积法^[1-4]、有限差分法^[5]、有限元法^[6-8]及无网格法^[9,10]等都是很好的求解偏微分方程的数值方法。这些方法各有优缺点, 在不同的领域都有成功的应用。

本文针对偏微分方程的求解提出了 GD 法 (General Differential Method)。该方法从泰勒级数出发, 用全域内节点函数的加权和来表示该点的各阶导数值, 其权系数只取决于节点的分布而与具体问题无关。该方法可以很好的求解各类偏微分方程。

卷积型的 Gurtin 变分原理是目前在数学上唯一能和动力学初值问题完全等价的变分原理, 有着合理的数学内涵, 它完全反映了有关初值问题的全部特征, 为初值问题的变分法奠定了可靠的基础^[11-13]。但其泛函的形式较为复杂, 求解起来较为困难。

本文针对矩形薄板的瞬态动力响应问题, 通过卷积将原始控制方程构造包含初始条件的新的具有完整初值问题特征的控制方程。对新的控制方程在时间域取解析函数, 在空间域采用离散的 GD 法, 从而得到求解矩形薄板的瞬态动力响应场的卷积型 GD 半解析法计算列式。该方法既避免了卷积型 Gurtin 变分原理泛函和计算的繁复, 又可以取得 Gurtin 变分原理的计算效果。

2 GD 法基本原理

在域内的 x 方向取 N 个节点 $x_i (i = 1, 2, \dots, N)$, 将某连续函数 $f(x)$ 在基点 x_i 处做泰勒展开, 在此基础上, 将某节点的导数用全域内节点函数的加权和来表示, 从而将偏微分方程转化为由待求节点函数值表述的代数方程, 通过求解线性方程组, 而使原微分方程得解。

设 $f = f(x)$ 为弹性体内的某一连续函数, 该函数只随 x 坐标而变化。以第 i 个节点为基点, 第 $n (n \neq i)$ 节点的函数值为

$$f_n \approx \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(x_n - x_i)^j f_i^{(j)}}{j!} \quad (1)$$

式中 $f_i = f(x_i) (i = 1, 2, 3, \dots, N)$ 。各节点 $(n = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, N)$ 按式(1)展开, 整理为如下矩阵:

收稿日期:2010-02-02; 修改稿收到日期:2010-09-19.

基金项目:四川省科技厅应用基础项目; 四川省教育厅重点科研资助项目.

作者简介:彭建设^{*} (1957-), 男, 硕士, 教授

(E-mail: pengjianshe2005@163.com).

$$\begin{pmatrix} a_{i,1}^i & \cdots & a_{i,j}^i & \cdots & a_{i,N-1}^i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1}^i & \cdots & a_{i-1,j}^i & \cdots & a_{i-1,N-1}^i \\ a_{i+1,1}^i & \cdots & a_{i+1,j}^i & \cdots & a_{i+1,N-1}^i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{N,1}^i & \cdots & a_{N,j}^i & \cdots & a_{N,N-1}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_i^{(1)} \\ \vdots \\ f_i^{(j)} \\ \vdots \\ f_i^{(N-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 - f_i \\ \vdots \\ f_{i-1} - f_i \\ f_{i+1} - f_i \\ \vdots \\ f_N - f_i \end{pmatrix} \quad (2)$$

式中

$$a_{n,j}^i = \frac{(x_n - x_i)^j}{j!}$$

$$n = \begin{cases} 1, 2, \dots, i-1, n < i \\ i+1, i+2, \dots, N, n > i \end{cases} \quad (3)$$

采用 Gauss-Jordan 消元法可得式(2)中系数矩阵的逆阵,第 k 次消元后,增广矩阵各元素成为

$$a_{k,j}^{i(k+1)} = a_{k,j}^{i(k)} / a_{k,k}^{i(k)}, j = k, k+1, \dots, N-1 \quad (4)$$

$$b_{k,m}^{i(k+1)} = b_{k,m}^{i(k)} / a_{k,k}^{i(k)}, m = 1, 2, \dots, N-1 \quad (5)$$

$$a_{n,j}^{i(k+1)} = a_{n,j}^{i(k)} - a_{n,k}^{i(k)} a_{k,j}^{i(k+1)}, j = k+1, k+2, \dots, N-1$$

$$n = 1, 2, \dots, N-1 (n \neq k) \quad (6)$$

$$b_{n,m}^{i(k+1)} = b_{n,m}^{i(k)} - a_{n,k}^{i(k)} b_{k,m}^{i(k+1)}, n = 1, 2, \dots, N-1 (n \neq k)$$

$$m = 1, 2, \dots, N-1 \quad (7)$$

式中消元次数 $k = 1, 2, \dots, N-1$, $a_{k,j}^{i(k+1)}$ 表示由系数矩阵与单位阵所组成的增广矩阵中系数矩阵第 k 次消元后第 k 行 j 列的元素, $b_{n,m}^{i(k+1)}$ 表示单位矩阵第 k 次消元后第 n 行 m 列的元素。

经过 $N-1$ 次消元后,可得以基点 i 展开的系数矩阵的逆阵 $[B]$,式(2)的解即可整理为

$$\begin{pmatrix} f_i^{(1)} \\ \vdots \\ f_i^{(j)} \\ \vdots \\ f_i^{(N-1)} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} M_{1,1}^i & \cdots & M_{1,i-1}^i & -\sum_{j=1}^{N-1} M_{1,j}^i & M_{1,i}^i & \cdots & M_{1,N-1}^i \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{i,1}^i & \cdots & M_{i,i-1}^i & -\sum_{j=1}^{N-1} M_{i,j}^i & M_{i,i}^i & \cdots & M_{i,N-1}^i \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{N-1,1}^i & \cdots & M_{N-1,i-1}^i & -\sum_{j=1}^{N-1} M_{N-1,j}^i & M_{N-1,i}^i & \cdots & M_{N-1,N-1}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{i-1} \\ f_i \\ f_{i+1} \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} \quad (8)$$

其中 $M_{k,j}^i = b_{k,j}^{i(N)}$ (9)

式中 $M_{k,j}^i$ 表示按第 i 个节点为基点展开的系数逆阵对应 k 阶导数的第 j 列元素。

域内不同节点的同阶导数的系数列阵可按不同基点分别求逆,整理为如下形式:

$$\begin{pmatrix} f_1^{(k)} \\ f_2^{(k)} \\ \vdots \\ f_i^{(k)} \\ \vdots \\ f_N^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum_{j=1}^{N-1} M_{k,j}^1 & M_{k,1}^1 & \cdots & M_{k,N-1}^1 \\ M_{k,1}^2 & -\sum_{j=1}^{N-1} M_{k,j}^2 & M_{k,2}^2 & \cdots & M_{k,N-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{k,1}^i & \cdots & M_{k,i-1}^i & -\sum_{j=1}^{N-1} M_{k,j}^i & M_{k,i}^i & \cdots & M_{k,N-1}^i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{k,1}^N & \cdots & M_{k,N-1}^N & -\sum_{j=1}^{N-1} M_{k,j}^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} \quad (10)$$

将式(10)展开,即可将第 i 节点的 k 阶导数表述为

$$f_i^{(k)} = \sum_r C_{ir}^{(k)} f_r, i = 1, 2, \dots, N \quad (11)$$

比较式(10,11)即可知系数 C 为

$$C_{ir}^{(k)} = \begin{cases} M_{k,r}^i (r < i) \\ M_{k,r-1}^i (r > i) \\ -\sum_{r=1 (r \neq i)}^N C_{ir}^{(k)} (r = i) \end{cases} \quad (12)$$

二维问题的偏导数用 x 方向和 y 方向所有节点表示为

$$\frac{\partial f^k(x_i, y_j)}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} = \sum_{l_1=1}^{N_x} \sum_{l_2=1}^{N_y} C_{il_1}^{(k_1)} \overline{C_{jl_2}^{(k_2)}} f(x_{l_1}, y_{l_2})$$

$$i = 1, 2, \dots, N_x; j = 1, 2, \dots, N_y \quad (13)$$

式中 $C_{il_1}^{(k_1)}$ 为 x 方向节点权系数, $\overline{C_{jl_2}^{(k_2)}}$ 为 y 方向节点权系数,其表达式与式(12)相同。

3 卷积型控制方程推导

设函数 φ 和 Ψ 是定义在空间域 Ω 及时间域 T 上的连续函数,则其卷积可定义为

$$\varphi(x, t) * \Psi(x, t) = \int_0^t \varphi(x, \tau) \Psi(x, t - \tau) d\tau$$

矩形薄板的运动控制方程为^[10]

$$D \nabla^4 \tau w + \rho h w_u = f(x, y, t) \quad (14)$$

式中

$$\nabla^4 \omega(x, y, t) = \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4}$$

若取 $\xi = x/a, \eta = y/b$, a 和 b 分别为矩形板在 x 和 y 方向的长和宽。

其空间坐标无量纲化方程:

$$D \nabla^4 \omega + \rho h \omega_u = f(\xi, \eta, t) \quad (15)$$

式中

$$\nabla^4 \omega(\xi, \eta, t) = \frac{1}{a^4} \frac{\partial^4 \omega}{\partial \xi^4} + 2 \frac{1}{a^2 b^2} \frac{\partial^4 \omega}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{1}{b^4} \frac{\partial^4 \omega}{\partial \eta^4}$$

D 为板的抗弯刚度, ρ 为材料密度, h 为板的厚度, f 为作用在板上的分布载荷, ω 为板的动挠度。

设初始条件为

$$\omega(\xi, \eta, 0) = \omega_0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial t}(\xi, \eta, 0) = v_0 \quad (16)$$

将式(15) 两边对时间 t 作卷积并引入初始条件式(16), 有

$$D \nabla^4 \omega * t + \rho h \omega = f * t + \rho h \omega_0 + \rho h t v_0 \quad (17)$$

此即为将初始条件融为一体的具有完整初值问题特征的矩形薄板的卷积型动力控制方程。

4 时域函数选取

在板上沿 x 和 y 方向各取 N_x 和 N_y 个节点, 其节点时域函数可取为

$$\omega(\xi_i, \eta_j, t) = \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{n=1}^{N_n} T_{mn}(t) \cdot \delta_{mn}^{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, N_x; j = 1, 2, \dots, N_y) \quad (18)$$

式中 N_m 和 N_n 为级数项数, δ_{mn}^{ij} 为待定参数, $T_{mn}(t)$ 分别在自由振动(初始速度为 0、初始位移为 0)、恒力作用下的受迫振动、策动力下的受迫振动按下式选取:

$$T_{mn}(t) = \begin{cases} \cos P_{mn} t \\ \sin P_{mn} t \\ \frac{1}{P_{mn}^2} (1 - \cos P_{mn} t) \\ \frac{1}{P_{mn}^2 - \omega^2} \cdot \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{P_{mn}} \sin P_{mn} t \right) \end{cases} \quad (19)$$

$$P_{mn} = \frac{\lambda_{mn}^2}{a^2} \cdot \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots) \quad (20)$$

式中 P_{mn} 为板的自然频率, λ_{mn}^2 为频率系数, 与边界条件、 a/b 值有关, 有自由边界时, 还与泊松比有关, 具体数值参见文献[14-16]。

5 卷积型 GD 半解析法

将节点时域函数式(19,20) 代入将初始条件融为一体的具有完整初值问题特征的矩形薄板的卷积型动力控制方程(17), 在空间域上, x 方向取 N_x 个节点, y 方向取 N_y 个节点, 在时间域上取 $N_m \times N_n$ 个配点 $(t_1, t_2, \dots, t_{N_m \times N_n})$, 在全部时空域内构成 $N_x \times N_y \times N_m \times N_n$ 个配点, 对每一空间节点的每一时间配点都可由式(17) 得到其卷积型的 GD 方程:

$$\begin{aligned} & D \left\{ \frac{1}{a^4} \sum_{k=1}^{N_x} C_{ik}^{(4)} \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{n=1}^{N_n} T_{mn}(t_g) * t_g \cdot \delta_{mn}^{kj} + \right. \\ & 2 \frac{1}{a^2 b^2} \sum_{k=1}^{N_x} \sum_{l=1}^{N_y} C_{ik}^{(2)} \bar{C}_{jl}^{(2)} \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{n=1}^{N_n} T_{mn}(t_g) * t_g \cdot \delta_{mn}^{kl} + \\ & \left. \frac{1}{b^4} \sum_{l=1}^{N_y} \bar{C}_{jl}^{(4)} \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{n=1}^{N_n} T_{mn}(t_g) * t_g \cdot \delta_{mn}^{il} \right\} + \\ & \rho h \cdot \sum_{m=1}^{N_m} \sum_{n=1}^{N_n} T_{mn}(t_g) \cdot \delta_{mn}^{ij} = \\ & f(\xi_i, \eta_j, t_g) * t_g + \rho h \omega_0^{ij} + \rho h t v_0^{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, N_x, \\ & j = 1, 2, \dots, N_y; g = 1, 2, \dots, N_s) \quad (21) \end{aligned}$$

由此得到待定参数 δ_{mn}^{ij} 的可解线性 GD 方程组。

将式(21) 表达为矩阵形式:

$$[C] \cdot \{\delta\} = \{F\} \quad (22)$$

式中 $\{\delta\}$ 为待定参数列阵, $[C]$ 为权系数矩阵, 由式(21) 左端构成, $\{F\}$ 为等效载荷列阵, 由式(21) 右端构成。

每一种约束情况的矩形薄板都有四个边界的 8 个约束方程, 可将式(22) 中与节点 $i = 1, 2, (N_x - 1), N_x, j = 1, 2, (N_y - 1), N_y$ 相关的 $8N_m \times N_n$ 个 GD 方程分别用代表边界条件的约束方程取代^[13]。取代后的方程即成为融入边界条件的可解线性方程组, 由此即可求解式(22), 解出 $\{\delta\}$, 将其代入式(18) 即得各节点的位移响应。采用高阶 Lagrange 插值, 即可得到全域内的动力响应位移场为

$$\omega(\xi, \eta, t) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \omega(\xi_i, \eta_j, t) \cdot r_i(\xi) \cdot s_j(\eta)$$

6 算 例

算例 1 一四边简支矩形薄板, 长为 $a = 40$ cm, 宽为 $b = 40$ cm, 板厚为 $t = 1$ cm, 弹性模量 $E = 15000000$ N/cm², 泊松比 $\mu = 0.3333$, 质量密度 $\rho = 0.008$ kg/cm³, 初位移为 $\omega_0 = 0.1 \sin \pi x/a \cdot \sin \pi y/b$ cm, 初速度 $v = 0$, 求板中点的动挠度。

表 1 算例 1 $N_x = N_y = 11$, 不同时间配点下结果比较(单位:时刻 s, 挠度 10^{-2} cm, 误差 $\%$)Tab. 1 The result comparisons of different time node in example 1 $N_x = N_y = 11$
(unit: time (s), deflection (10^{-2} cm), error($\%$))

时刻	0.009	0.029	0.050	0.069	0.084
精确解	-9.99994478614	4.90698405277	-4.83927585542	-9.99675482489	9.995190640937
$N_n = 1, N_m = 1$	-9.9997633437	4.90703025734	-4.8391412314	-9.9965734114	9.9951906845
误差(1)	$1.814432e-2$	$9.41608e-4$	$2.78190e-3$	$1.814723e-3$	$4.365218e-5$
$N_n = 3, N_m = 1$	-9.9999447879	4.90698652188	-4.8392800832	-9.9967544821	9.99519012250
误差(2)	$1.759682e-7$	$5.03182e-4$	$8.736461e-4$	$3.429066e-5$	$5.186842e-5$

表 2 算例 1 $N_m = 3, N_n = 1$, 不同空间节点下结果比较(单位:时刻 s, 挠度 10^{-2} cm, 误差 $\%$)Tab. 2 The result comparisons of different space node in example 1 $N_m = 3, N_n = 1$
(unit: time (s), deflection (10^{-2} cm), error ($\%$))

时刻	0.006	0.013	0.022	0.030	0.035
精确解	9.99997546049	5.04151134867	-5.0701819882	9.99938651843	4.88766877944
$N_x = N_y = 9$	9.99997546049	5.0415113486	-5.0701819882	9.99938651843	4.8876687794
误差(1)	$1.219745e-6$	$4.888672e-1$	$1.47739e-0$	$3.049513e-5$	$5.198997e-1$
$N_x = N_y = 11$	9.99997546049	5.0415113486	-5.0701819882	9.99938651843	4.88766877944
误差(2)	$2.226262e-8$	$8.922744e-3$	$2.696527e-2$	$5.5659350e-7$	$9.4891449e-3$
$N_x = N_y = 13$	9.99997546049	5.04151134867	-5.07018198823	9.99938651843	4.88766877944
误差(3)	$2.877479e-10$	$1.153164e-4$	$3.484959e-4$	$7.1932553e-9$	$1.2263656e-4$

算例 2 一四边简支矩形薄板, 长为 $a = 60$ cm, 宽为 $b = 40$ cm, 在矩形薄板上作用均布交变载荷 $q = 0.3 \sin(2500t)$ N/cm。初位移和初速度为零, 其物理参数同算例 1, 求矩形薄板中点的动挠度。

算例 3 一四边固支矩形薄板, 在矩形薄板上作用 $q = 1$ N/cm² 的突加均布载荷, 初位移和初速度均为零, 其几何物理参数同算例 2, 求矩形薄板中点的动挠度。

对算例 2 和算例 3, 取空间节点数 $N_x = N_y = 11$, 级数项 $N_m = 3, N_n = 1$, 作图表示出板中点挠度随时间的瞬态响应的具体情况如图 1 所示。

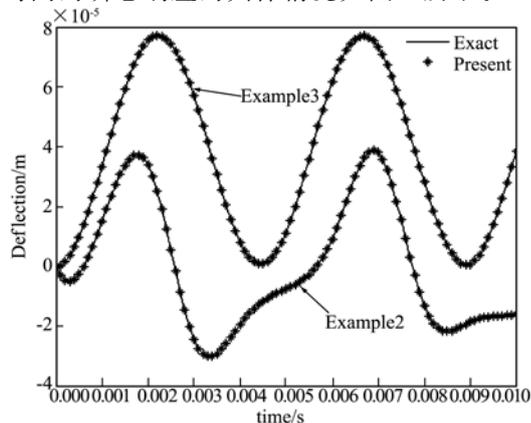


图 1 算例 2 和 3 计算结果
Fig. 1 The results of example 2 and 3

7 结 语

本文通过卷积将矩形薄板的瞬态动力响应问题的原始控制方程构造包含初始条件新的具有完整初值问题特征的控制方程。将卷积型的控制微分方程式(17)与文献[12,13]中卷积型的 Gurtin 泛函相比, 其形式简单得多。但与卷积型变分原理一样, 在数学上和动力学初值问题完全等价, 有着合理的数学内涵, 它完全反映了有关初值问题的全部特征, 而且又避免了卷积型变分原理泛函的繁复, 可以取得 Gurtin 变分原理同样的计算效果。本文直接从矩形薄板的卷积型控制微分方程出发, 在时间域上取解析函数, 在空间域上用 GD 法离散, 成功地避免了传统时域差分方法的误差积累和解的稳定性等问题。所以该方法既有很好的精确度和稳定性, 又有较好的空间适应性。

从表 2 可以看出, 本方法随着空间节点数的增加, 结果逐渐趋近于真解, 且在划分很少的空间网格数目和取很少的时间配点数情况下(根据大量实际计算与对比, 一般空间网格点数目每维取 17 个以内, 时间配点数取 3 个以内), 就能得到工程应用中要求的足够精确的计算结果, 从而在保证较高精度的前提下, 大大节省了计算时间, 提高了计算效率。

该方法数学原理简单,具有良好的精度和稳定性,易于在计算机中实施,且编出的程序通用性好,在工程结构分析中有良好的应用前景,值得研究和推广。

参考文献(References):

- [1] Bellman R, Casti J. Differential quadrature and long-term integration[J]. *Journal of Math Analysis and Applications*, 1971, **34**: 235-238.
- [2] Hsu Ming-hung. Vibration analysis of edge-cracked beam on elastic foundation with axial loading using the differential quadrature method [J]. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 2005, **194**: 1-17.
- [3] 彭建设, 杨杰. 策动力下动力学初-边值问题的时域配点DQ空-时半解析法[J]. *计算物理*, 2000, **17**: 54-58 (PENG Jian-she, ZHANG Ying. DQ Space-time semi-analytic method of dynamics initial-boundary value problems under alternate force [J]. *Chinese Journal of Computation Physics*, 2000, **17**: 54-58. (in Chinese))
- [4] Claudio Franciosi, Stefania Tomasiello Static analysis of a Bickford beam by means of the DQEM[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2007, **49**: 122-128.
- [5] Shu C, Wu W X, Ding H, et al. Free vibration analysis of plates using least-square-based finite difference method[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering*, 2007, **10**: 128-137.
- [6] 石东洋, 张步英. 非线性抛物积分微分方程的各向异性有限元高精度分析[J]. *应用数学*, 2008, **21**: 436-442. (SHI Dong-yang, ZHANG Bu-ying. High accuracy analysis of anisotropic finite element method for nonlinear parabolic integrodifferential equations[J]. *Mathematica Applicata*, 2008, **21**: 436-442. (in Chinese))
- [7] 孙雁, 钟万勰. 有限元表面应力计算[J]. *计算力学学报*, 2010, **27**: 177-181. (SUN Yan, ZHONG Wan-xie. Finite element surface stress calculation[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2010, **27**: 177-181. (in Chinese))
- [8] 魏高峰, 冯伟, 高洪芬. 基于位移插值的Voronoi单元有限元方法[J]. *应用力学学报*, 2008, **25**: 185-191. (WEI Gao-feng, FENG Wei, GAO Hong-fen. Voronoi cell finite element method based on displacement interpolation[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2008, **25**: 185-191. (in Chinese))
- [9] 李卧东, 王元汉, 谭国煊. 无网格法在弹塑性问题中的应用[J]. *固体力学学报*, 2001, **22**: 486-492. (LI Wodong, WANG Yuan-han, TAN Guo-huan. Application of meshless method to elasto-plastic problems [J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2001, **22**: 486-492. (in Chinese))
- [10] 王砚, 王忠民, 阮苗. 无网格法在点弹性支承矩形薄板横向振动中的应用[J]. *计算力学学报*, 2010, **27**: 238-243. (WANG Yan, WANG Zhong-min, RUAN Miao. Application of meshless method in the transverse vibration of rectangular thin plate with elastic point supports[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2010, **27**: 238-243. (in Chinese))
- [11] Gurtin M E. Variation principles for linear initial-value problem[J]. *Quarterly Applied Mechanics*, 1964, **22**: 252-266.
- [12] 罗恩. 关于线弹性动力学中各种Gurtin型变分原理[J]. *中国科学(A辑)*, 1987, **9**: 936-948. (LUO En. The variational principle of gurtin for linear elasticity dynamics[J]. *Science in China, Ser. A*, 1987, **9**: 936-948. (in Chinese))
- [13] Peng J S, Zhang J Y, Lewis R W. A semi-analytical approach for solving forced vibration problems based on convolution-type variational principle[J]. *Computers and Structures*, 1996, **59**: 167-182.
- [14] 曹国雄. 弹性矩形薄板振动[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1983. (CHAO Guo-xiong. *Vibration of Rectangular Elasticity Plate*[M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 1983. (in Chinese))
- [15] 曹志远. 板壳振动理论[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1989. (CHAO Zhi-yuan. *The Vibration Theory of Plate Shell*[M]. Beijing: China Railway Publishing House, 1989. (in Chinese))
- [16] Szilard(美). 板的理论和分析——经典法和数值法[M]. 陈太平, 等, 译, 北京: 中国铁道出版社, 1984. (R. Szilard. *Theory and Analysis of Plates Classical and Numerical Methods*[M]. Beijing: China Railway Publishing house, 1984. (in Chinese))

(下转第 589 页)

The stability of visco-elastic pipes conveying fluid based on the WDQ method

ZHAO Feng-qun^{*}, WANG Zhong-min, ZHANG Ju-mei

(School of Sciences, Xi'an University of Technology, Xi'an 710054, China)

Abstract: Based on Differential Quadrature Method (DQM) and multi-resolution analysis theory, the Wavelet Differential Quadrature Method (WDQM) is proposed in this paper, in which the interpolation basic function is formed by using scaling function. The stability of simply supported Kelvin viscoelastic pipes conveying fluid is investigated by the method. The variation of complex frequencies of the pipe with the internal fluid speed under different parameters are given, and the effects of external fluid speed on vibration behaviors and stability of Kelvin visco-elastic fluid-conveying pipes with different delay time of the visco-elastic material are analyzed.

Key words: pipes conveying fluid; stability; multi-resolution analysis; DQ method

(上接第 539 页)

A convolution type GD semi-analytic approach for the transient response analysis of rectangular plates

PENG Jian-she^{*1}, LUO Guang-bing², YANG Jie³

(1. School of Industrial Manufacturing, Chengdu University, Chengdu 610106, China;

2. Traction Power State Key Laboratory of Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China;

3. School of Aerospace, Mechanical and Manufacturing Engineering, RMIT University,

PO Box 71, Bundoora, VIC 3083 Australia)

Abstract: The Gurtin variation principles of convolution type is the only variation principles which can makes the initial values of dynamics equivalent completely in math, it contains all the characters of initial values. The GDM (General Differential Method) is a numerical method solving partial differential equations based on Taylor series. The principle and coefficients are reduced in this paper. The equations of motion of thin rectangular plates are blended with initial conditions by the method of convolution calculation and form new equations, whose solutions are then sought through the use of GDM approximation in space domain and an analytical series expansion in time domain. This approach obtains the same effects with Gurtin variation principles, at the same time, it avoids the complexity of Gurtin functional. The results of the examples show that the method has excellent accuracy and efficiency for the resolution of dynamic response analysis.

Key words: convolution; transient response; general differential method; semi-analytic method