

文章编号:1007-4708(2011)06-0839-05

# 基于响应面法的五心底结构形状优化

杜家政<sup>1</sup>, 隋允康<sup>\*1</sup>, 阳志光<sup>2</sup>, 龙连春<sup>1</sup>

(1.北京工业大学 机械工程与应用电子技术学院,北京 100124;2.北京宇航系统工程研究所,北京 100076)

**摘要:**三心底结构是国防、航空及航天等领域经常采用的结构,其旋转母线是由三段弧线组成的,对应着三个圆心,故得名三心底。三心底结构可调整的参数变量少,优化潜力小。根据三心底的形状推广出五心底结构,增加可调整的参数变量,然后对其进行优化。将响应面方法与模型参数化相结合,建立了以结构重量为目标及以结构强度为约束的形状优化模型。根据结构形状选取独立的设计变量,推导结构重量的解析表达式和结构重量对设计变量的一阶导数,将结构重量进行一阶泰勒展开,采用响应面方法将结构最大应力拟合为设计变量的一次函数表达式,建立形状优化的线性规划模型。通过 PCL(Patran Command Language)语言编写函数,用于建立分析模型,并将跟设计变量有关的数值参数化,在迭代过程中不断对结构进行调整,最后得到最优设计。数值结果表明,该方法具有很强的灵活性,适用范围较广,优化结果具有一定的稳定性和准确性。

**关键词:**响应面法;五心底结构;形状优化;二次开发

**中图分类号:**O34 **文献标志码:**A

## 1 引言

在国防、航空及航天等领域,推进剂贮箱的基本结构均是由圆筒段与箱底等组成,箱底的底形可分为:半球形底、三心底、半椭球形底、锥形底以及由这些底形曲线组合的底<sup>[1]</sup>。三心底是最常用的箱底结构之一,其旋转母线是由三段弧线组成的,对应着三个圆心,故得名三心底,如图 1 所示。在对三心底优化的过程中<sup>[2]</sup>,发现三心底结构可调整的参数变量少,优化的潜力小,根据三心底的形状推广出了五心底,其旋转母线由五段弧线组成,如图 2 所示,增加了可调整的参数变量,然后对其进行优化。常见的壳体结构形状优化算法<sup>[3-6]</sup>可以使节点在初始设计面内移动以达到改变形状的目的,其中通过二级控制建立自然设计变量跟节点坐标之间的函数关系,从而借助设计变量驱动节点改变边界或者内部圆孔的形状,二级控制的中间变量及其形状函数的确定是至关重要的,而且对于不规则

边界无法确定,从而不能使节点离开结构的初始设计面,无法改变五心底结构的深浅以及旋转母线的半径,也就不能得到五心底结构的最佳形状。同时,还有一个很复杂的敏度分析公式推导和相应计算量非常繁重的问题。

响应面法<sup>[7]</sup>可以采用一次或二次多项式代替难于显式化的状态函数,通过多次迭代调整,一般都能满足实际工程精度,具有较高的效率,很有使用价值,是一个很有发展前景的计算方法,也是处理形状优化的应力约束时常用的方法之一。目前,国内外很多研究者已经将响应面方法应用于形状优化<sup>[8-11]</sup>,使形状优化的应用范围得到扩展。

在 Patran 中,分析模型的建立可以通过界面操作完成,也可以通过 PCL(Patran Command Language)语言来实现。采用 PCL 语言编写建立分析模型的程序,将跟设计变量有关的数值参数化,输入不同的参数可以得到不同的结构形状,只要能参数化的量都能作为设计变量。

将响应面法与模型参数化相结合,建立了以结构重量为目标结构强度为约束的形状优化模型,实

收稿日期:2009-10-15;修改稿收到日期:2010-10-02.

基金项目:国家自然科学基金(10872012);大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室基金(GZ0819);湖南大学汽车车身先进设计制造国家重点实验室开放基金(30715002);高校博士点基金(20060005010);北京市教委(KM201110005014)资助项目.

作者简介:杜家政(1975-),男,副教授;  
隋允康\*(1943-),男,教授,博士生导师  
(E-mail: ysui@bjut.edu.cn).

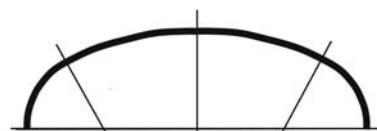


图 1 三心底结构的旋转母线  
Fig. 1 Generatrix of three-center shell structure

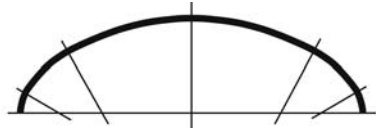


图2 五心底结构的旋转母线  
Fig. 2 Generatrix of five-center shell structure

现了五心底结构的形状优化。针对五心底结构的形状选取独立的设计变量,推导结构重量的解析表达式和结构重量对设计变量的一阶导数,获得结构重量对设计变量的一阶 Taylor 展式,采用响应面方法将结构最大应力拟合为设计变量的一次函数,得到了形状优化的线性规划模型,采用线性规划程序求解。优化模型中的设计变量独立于有限元模型,可以对五心底结构的半径、高度等参数进行控制,突破了以往形状优化只改变边界和内部圆孔的局限,扩大了形状优化的应用范围。

## 2 五心底结构的形状优化模型

五心底结构一般与其他结构连接在一起,连接部分会对五心底的形状发生影响。为了使问题具有一般性,在结构上增加一个高为  $h$  直筒柱,如图 3 所示。五心底母线的形状对结构的性能和承载能力有很大的影响,为了使结构能应用在实际工程中,在保证结构还是五心底的基础上,对结构的参数进行优化,从而降低结构的重量和改善结构性能和提高结构承载能力。

五心底的母线及主要尺寸如图 3 所示,根据边界条件和光滑连续条件,五心底的独立设计变量数为 5 个,从便于建立模型和推导公式方面考虑,取  $h_1, R_1, \theta_1, R_2, \theta_2$  为设计变量,以五心底的面积(面积与结构重量成正比,相当于结构重量)最小作为目标,以结构最大应力作为约束,建立优化模型如下:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{求} \quad h_1, R_1, \theta_1, R_2, \theta_2 \\ \text{使} \quad S(h_1, R_1, \theta_1, R_2, \theta_2) \rightarrow \min \\ \text{s. t.} \quad \sigma_{\max} \leq \bar{\sigma} \\ \quad \quad h_{10}(1 - \mu_1) \leq h_1 \leq h_{10}(1 + \mu_1) \\ \quad \quad R_{10}(1 - \mu_2) \leq R_1 \leq R_{10}(1 + \mu_2) \\ \quad \quad \theta_{10}(1 - \mu_3) \leq \theta_1 \leq \theta_{10}(1 + \mu_3) \\ \quad \quad R_{20}(1 - \mu_4) \leq R_2 \leq R_{20}(1 + \mu_4) \\ \quad \quad \theta_{20}(1 - \mu_5) \leq \theta_2 \leq \theta_{20}(1 + \mu_5) \end{array} \right. \quad (1)$$

式中  $\mu_1 \sim \mu_5$  分别为区间因子,是限制优化每一步迭代的运动极限而设置的参数,以防止目标函数和约束的近似造成的迭代震荡,这里均取 0.1。

为了将上述模型转化为可以求解的模型,必须将模型中的结构面积(目标函数)和结构最大应力显式化。根据模型推导五心底的面积对设计变量的函数,求面积对设计变量的一阶导数,将目标函数做一阶泰勒展开。采用响应面方法(RSM)将结构最大应力拟合为设计变量的一次函数,则模型转化为标准的线性规划形式,用线性规划求解器求解。

## 3 目标函数的显式化

由图 3 所示的几何关系,可得

$$\theta_3 = \frac{\pi}{2} - (\theta_1 + \theta_2)$$

$$R_3 = \frac{900 - R_1 - (R_2 - R_1)\cos(\theta_1)}{\cos(\theta_1 + \theta_2)} + R_2$$

五心底部分面积的计算如下:

(1) 球冠部分

$$S = 2\pi R h$$

式中  $R$  为球冠的半径,  $h$  为球冠的高度。

(2) 球带部分

如图 4 所示,任取球带的一小部分,其面积为

$$S_i = \int_{\theta_a}^{\theta_a + \theta_b} 2\pi \Delta_i R_a d\theta = \int_{\theta_a}^{\theta_a + \theta_b} 2\pi (X_{O_i} + R_a \cos\theta) R_a d\theta$$

式中  $X_{O_i}$  为圆心坐标,  $R_a$  为母线的半径。

对于下部的球带  $S_2$  为

$$R_a = R_1, \theta_a = 0, \theta_b = \theta_1, X_{O_1} = 900 - R_1$$

对于上部的球带  $S_3$  为

$$R_a = R_2, \theta_a = \theta_1, \theta_b = \theta_1 + \theta_2$$

$$X_{O_2} = 900 - R_1 - (R_2 - R_1)\cos\theta_1$$

(3) 整个五心底的面积为

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

式中

$$S_1 = 1800\pi h_1$$

$$S_2 = 1800\pi R_1 \theta_1 - 2\pi R_1^2 \theta_1 + 2\pi R_1^2 \sin\theta_1$$

$$S_3 = 1800\pi R_2 \theta_2 - 2\pi R_1 R_2 \theta_2 -$$

$$\pi R_2^2 \theta_2 \cos\theta_1 + 2\pi R_1 R_2 \theta_2 \cos\theta_1 +$$

$$2\pi R_2^2 \sin(\theta_1 + \theta_2) - 2\pi R_2^2 \sin\theta_1$$

$$S_4 = 2\pi \left[ \frac{900 - R_1 - (R_2 - R_1)\cos\theta_1}{\cos(\theta_1 + \theta_2)} + R_2 \right]^2 [1 - \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

五心底总面积为

$$S = 1800\pi h_1 + 1800\pi R_1 \theta_1 - 2\pi R_1^2 \theta_1 + 2\pi R_1^2 \sin\theta_1 +$$

$$1800\pi R_2 \theta_2 - 2\pi R_1 R_2 \theta_2 - 2\pi R_2^2 \theta_2 \cos\theta_1 +$$

$$2\pi R_1 R_2 \theta_2 \cos\theta_1 + 2\pi R_2^2 \sin(\theta_1 + \theta_2) - 2\pi R_2^2 \sin\theta_1 +$$

$$2\pi \left[ \frac{900 - R_1 - (R_2 - R_1)\cos\theta_1}{\cos(\theta_1 + \theta_2)} + R_2 \right]^2 [1 - \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

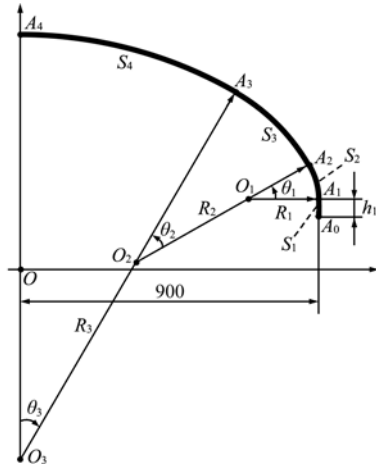


图3 五心底结构设计变量示意图  
Fig.3 Design variables of five-center shell structure  
五心底的面积对设计变量的一阶导数为

$$\frac{\partial S}{\partial h_1} = 1800\pi$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \theta_1} = & 1800\pi R_1 - 2\pi R_1^2 + 2\pi R_1^2 \cos \theta_1 + 2\pi R_2^2 \theta_2 \sin \theta_1 - \\ & 2\pi R_1 R_2 \theta_2 \sin \theta_1 + 2\pi R_2^2 \cos(\theta_1 + \theta_2) - 2\pi R_2^2 \cos \theta_1 + \\ & 4\pi \left[ \frac{900 - R_1 - (R_2 - R_1) \cos \theta_1}{\cos(\theta_1 + \theta_2)} + R_2 \right] [1 - \sin(\theta_1 + \theta_2)] \\ & \{ (R_2 - R_1) \sin \theta_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) + [900 - R_1 - (R_2 - \\ & R_1) \cos \theta_1] \sin(\theta_1 + \theta_2) \} / \cos^2(\theta_1 + \theta_2) - 2\pi \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ & \left[ \frac{900 - R_1 - (R_2 - R_1) \cos \theta_1}{\cos(\theta_1 + \theta_2)} + R_2 \right]^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial R_1} = & 1800\pi \theta_1 - 4\pi R_1 \theta_1 + 4\pi R_1 \sin \theta_1 - 2\pi R_2 \theta_2 + \\ & 2\pi R_2 \theta_2 \cos \theta_1 + 4\pi \left[ \frac{900 - R_1 - (R_2 - R_1) \cos \theta_1}{\cos(\theta_1 + \theta_2)} + \right. \\ & \left. R_2 \right] \frac{[1 - \sin(\theta_1 + \theta_2)](\cos \theta_1 - 1)}{\cos(\theta_1 + \theta_2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \theta_2} = & 1800\pi R_2 - 2\pi R_1 R_2 - 2\pi R_2^2 \cos \theta_1 + 2\pi R_1 R_2 \cos \theta_1 + \\ & 2\pi R_2^2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + 4\pi \left[ \frac{900 - R_1 - (R_2 - R_1) \cos \theta_1}{\cos(\theta_1 + \theta_2)} + \right. \\ & \left. R_2 \right] [1 - \sin(\theta_1 + \theta_2)] \times \\ & \left[ \frac{(900 - R_1 - (R_2 - R_1) \cos \theta_1) \sin(\theta_1 + \theta_2)}{\cos^2(\theta_1 + \theta_2)} \right] - \\ & 2\pi \left[ \frac{900 - R_1 - (R_2 - R_1) \cos \theta_1}{\cos(\theta_1 + \theta_2)} + R_2 \right]^2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial R_2} = & 1800\pi \theta_2 - 2\pi R_1 \theta_2 - 4\pi R_2 \theta_2 \cos \theta_1 + 2\pi R_1 \theta_2 \cos \theta_1 + \\ & 4\pi R_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) - 4\pi R_2 \sin \theta_1 + \\ & 4\pi \left[ \frac{900 - R_1 - (R_2 - R_1) \cos \theta_1}{\cos(\theta_1 + \theta_2)} + R_2 \right] \times \\ & \left[ 1 - \sin(\theta_1 + \theta_2) \right] \left[ 1 - \frac{\cos \theta_1}{\cos(\theta_1 + \theta_2)} \right] \end{aligned}$$

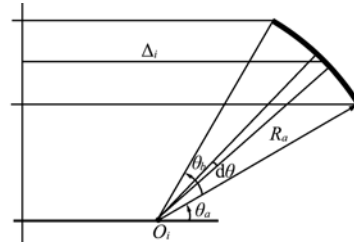


图4 球带部分积分示意图  
Fig.4 Integral of partial spherical shell

目标函数一阶泰勒展开,并去掉常数项的表达式得

$$\tilde{S} = \frac{\partial S}{\partial h_1} h_1 + \frac{\partial S}{\partial R_1} R_1 + \frac{\partial S}{\partial \theta_1} \theta_1 + \frac{\partial S}{\partial R_2} R_2 + \frac{\partial S}{\partial \theta_2} \theta_2$$

#### 4 用响应面方法(RSM)拟合结构最大应力

响应面方法是将隐式函数显式化的一种有效途径,其基本思想是构造一个具有明确表达形式的多项式来近似隐式函数,然后根据多组变量及相应函数值来确定多项式的系数。

本文采用最简单的小二乘法构造响应面,响应面取一次。首先取初始设计点 $[h_1, R_1, \theta_1, R_2, \theta_2]$ ,将初始设计点在不同变量上摄动得到10个试验点 $[h_1(1-\epsilon), R_1, \theta_1, R_2, \theta_2], [h_1(1+\epsilon), R_1, \theta_1, R_2, \theta_2], [h_1, R_1(1-\epsilon), \theta_1, R_2, \theta_2], [h_1, R_1(1+\epsilon), \theta_1, R_2, \theta_2], [h_1, R_1, \theta_1(1-\epsilon), R_2, \theta_2], [h_1, R_1, \theta_1(1+\epsilon), R_2, \theta_2], [h_1, R_1, \theta_1, R_2(1-\epsilon), \theta_2], [h_1, R_1, \theta_1, R_2(1+\epsilon), \theta_2], [h_1, R_1, \theta_1, R_2, \theta_2(1-\epsilon)], [h_1, R_1, \theta_1, R_2, \theta_2(1+\epsilon)]$ ,其中 $\epsilon$ 为设计变量的摄动因子,取为0.02。

对初始点和试验点进行结构分析,然后根据设计变量和响应值(结构最大应力)用最小二乘法拟合响应面,得到结构最大应力对设计变量的一次函数为

$$\sigma = a_0 + a_1 h_1 + a_2 R_1 + a_3 \theta_1 + a_4 R_2 + a_5 \theta_2$$

则应力约束的表达式为

$$a_1 h_1 + a_2 R_1 + a_3 \theta_1 + a_4 R_2 + a_5 \theta_2 \leq \bar{\sigma} - a_0$$

如果目标函数过于复杂不能显式化,可以采用响应面方法进行处理,如果需要考虑结构的刚度问题,也可以用同样的方法处理。响应面的表达式和实验点的选取都非常的灵活,本文只是探讨了响应面的一个应用,关于响应面的进一步探讨将不再涉及。

#### 5 优化结果

根据上述理论,将五心底结构有限元模型的建立过程参数化,利用PCL语言编写优化程序,对五心

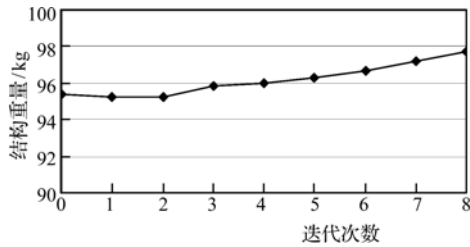


图5 结构重量随迭代次数的变化曲线  
Fig. 5 History curve of structural weight

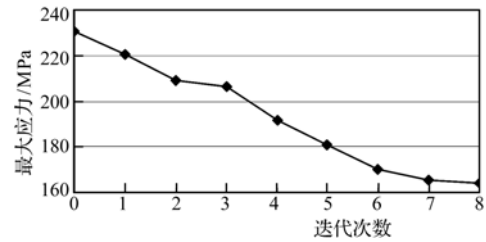


图6 结构最大应力随迭代次数的变化曲线  
Fig. 6 History curve of structural maximal stress

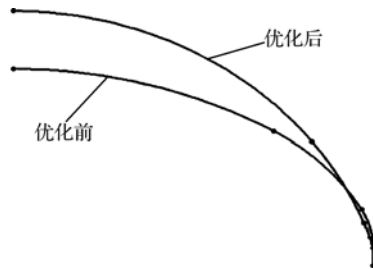


图7 五心底结构旋转母线的比较

Fig. 7 Comparison of generatrix of five-center shell structure

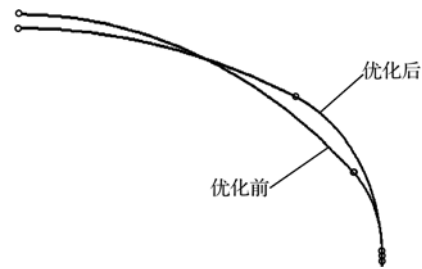


图8 三心底结构旋转母线的比较

Fig. 8 Comparison of generatrix of three-center shell structure

底结构进行形状优化。五心底结构初始设计尺寸： $h_1 = 50 \text{ mm}$ ,  $R_1 = 213 \text{ mm}$ ,  $\theta_1 = 30^\circ$ ,  $R_2 = 600 \text{ mm}$ ,  $\theta_2 = 30^\circ$ , 厚度为  $5.5 \text{ mm}$ 。材料参数：弹性模量  $E = 206 \text{ GPa}$ , 泊松比  $\nu = 0.3$ , 许用应力  $\bar{\sigma} = 160 \text{ MPa}$ 。

经过 8 次迭代得到最优设计, 结构重量随迭代次数的变化曲线如图 5 所示, 从  $95.4 \text{ kg}$  变为  $97.7 \text{ kg}$ , 增大  $2.4\%$ 。结构最大应力随迭代次数的变化曲线如图 6 所示, 从  $230.5 \text{ MPa}$  减小到  $154.6 \text{ MPa}$ , 降低了  $32.9\%$ 。五心底结构优化前后的旋转母线的形状如图 7 所示, 优化后结构更趋于一个球面, 从直观判断这种设计更加合理。

三心底结构形状优化使结构重量从  $84.1 \text{ kg}$  增大为  $84.2 \text{ kg}$ , 结构最大应力从  $423.0 \text{ MPa}$  降低为  $297.7 \text{ MPa}$ , 三心底结构优化前后的旋转母线的形状如图 8 所示, 由于受尺寸的限制, 结构强度不能满足要求<sup>[2]</sup>; 与三心底结构形状优化相比, 五心底结构能更最大限度的提高结构强度。

## 6 结论

将响应面方法与模型参数化相结合, 免去了敏感度分析复杂的公式推导和繁重的计算量。本文将其应用于五心底的形状优化, 建立了以结构重量为目标、以结构强度为约束的形状优化模型, 进行了求解, 解决了常用形状优化方法不能解决的问题。数值算例表明, 优化结果具有稳定性和准确性以及很强的灵活性, 适用范围相当广泛。

## 参考文献 (References):

- [1] 熊 焯. 低温贮箱及铝锂合金的应用[J]. 导弹与航天运载技术, 2001, **254**(6): 33-46. (XIONG Huan, Cryogenic Tank and applicatoin of aluminium-lithium alloy [J]. *Missiles and Space Vehicles*, 2001, **254**(6): 33-46. (in Chinese))
- [2] 杜家政, 隋允康, 龙连春, 等. 基于 MSC/PCL 的三心底结构形状优化[J]. 计算机辅助工程, 2006, **15**(增刊): 450-451. (DU Jia-zheng, SUI Yun-kang, LONG Lian-chun, et al. Shape optimization of three-center shell structures based on MSC/PCL [J]. *Computer Aided Engineering*, 2006, **15**(supp.): 450-451. (in Chinese))
- [3] 隋允康. 建模·变换·优化——结构综合方法新进展[M]. 大连理工大学出版社, 1996. (SUI Yun-kang. *Modelling, Transformation and Optimization-New Developments of Structural Synthesis Method* [M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1996. (in Chinese))
- [4] Belegundu A D, Rajan S D. Shape optimization approach based on natural design variables and shape functions[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1986, **66**(1): 87-106.
- [5] Uysal H, Gul R, Uzman U. Optimum shape design of shell structures[J]. *Engineering Structures*, 2007, **29**(1): 80-87.
- [6] 隋允康, 李 栋, 杜家政, 等. 用二级控制法对二维连续体进行形状优化[J]. 计算力学学报, 2007, **24**(2):

- 135-141. (SUI Yun-kang, LI Dong, DU Jia-zheng, et al. Shape optimization for two-dimensional continuum based on two-phase control strategy [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2007, **24**(2): 135-141. (in Chinese))
- [7] Myers R H, Montgomery D C. *Response Surface Methodology*[M]. New York: Wiley and Sons, 1995.
- [8] Roux W J, Stander N, Haftka R T. Response surface approximations for structural optimization[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1998, **42**(3): 517-534.
- [9] Ogawa T, Ohsaki M, Miyamura T, et al. Shape optimization of shell roofs subjected to strong wind by using a variable complexity model[J]. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, 2005, **45**(148): 108-115.
- [10] 隋允康, 李善坡. 改进的响应面方法在二维连续体形状优化中的应用[J]. *工程力学*, 2006, **23**(10): 1-6. (SUI Yun-kang, LI Shan-po. The application of improved RSM in shape optimization of two-dimension continuum[J]. *Engineering Mechanics*, 2006, **23**(10): 1-6. (in Chinese))
- [11] Gustafsson E, Stromberg N. Shape optimization of castings by using successive response surface methodology[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2008, **35**(1): 11-28.

## Shape optimization of five-center shell structure based on response surface method

DU Jia-zheng<sup>1</sup>, SUI Yun-kang<sup>\*1</sup>, YANG Zhi-guang<sup>2</sup>, LONG Lian-chun<sup>1</sup>

(1. College of Mechanical Engineering and Applied Electronics Technology,

Beijing University of Technology, Beijing 100124, China;

2. Beijing Institute of Astronautical Systems Engineering, Beijing 100076, China)

**Abstract:** Three-center shell structure is often adopted in the domain of national defense, aviation and spaceflight, and so on. The generatrix of three-center shell structure is composed of three arcs with three centers, so the name is called. The three-center shell structure has few adjustable parameter variables and less potential of optimization. The three-center shell structure is developed to five-center shell structure to increase the adjustable parameter variables, and then to optimize the structure. Combining the response surface method and the parameterized model, the model with structural weight as object function and structural strength as constraint is built. According to the structural shape, the independent design variables are selected. The analytical expression of the structural weight and the first derivative of the structural weight to the design variables are deduced to get the one-order Taylor expression. Adopting the response surface method to obtain the one-order expression of the maximal stress to the design variables, the shape optimization model in linear programming form is built. The analysis model is built by programming with MSC/PCL (Patran Command Language), and the parameters about design variables are parameterized. The structure is continually modified in the process of iteration, and the optimal design is obtained at last. The numerical examples show that the method is very flexible and can be used widely, and the optimization results are stable and exact.

**Key words:** response surface method; five-center shell structure; shape optimization; secondly development