

文章编号:1007-4708(2011)06-0844-07

# 基于 Copula 理论的模糊可靠度隶属函数 求解的自适应截断抽样法

王维虎\*, 吕震宙, 李倩

(西北工业大学 航空学院, 西安 710072)

**摘要:**针对工程中同时存在随机和模糊基本变量且随机概率信息不全的可靠性问题,利用 Copula 理论逼近随机基本变量的联合分布函数和联合概率密度函数,进而建立了 Copula 逼近基础上的模糊可靠度隶属函数求解的自适应截断抽样法。所建模型在 Copula 逼近基础上采用优化建模和迭代策略,交替考虑模糊不确定性和随机不确定性对功能函数的影响,求得使功能函数取极值的模糊基本变量取值及随机基本变量设计点,然后再运用自适应截断重要抽样法求得给定隶属度水平下结构可靠度的上、下界,进而得到模糊可靠度隶属函数。所建方法充分利用了 Copula 函数对概率信息不全的逼近能力和自适应截断抽样法的高效稳健性,使得概率信息不全时的模糊可靠性分析能够高效地完成。在详细给出建模原理和求解方法后,算例被用来说明模型的合理性和算法的可行性。

**关键词:**Copula 理论;模糊可靠度;隶属函数;自适应截断抽样

**中图分类号:**TB114.3;O213.2 **文献标志码:**A

## 1 引言

概率信息不全与多种不确定性因素的影响是目前结构系统可靠性分析中普遍存在却又难以解决的问题。其中,概率信息不全是指工程问题中往往只知道基本变量的边缘分布以及变量之间的相关系数,而不知道多维变量的联合概率分布,多种不确定性因素主要是指随机性和模糊性。针对概率信息不全的情况,可以将金融领域中广泛使用的 Copula 理论<sup>[1]</sup>引入到可靠性分析中来。Copula 理论在重建与分析概率信息不全的相关性模型时具有很多优点,利用该理论,可以精确地将模型中变量的联合分布分解成边缘分布和一个 Copula 函数,Copula 函数被用来描述变量间的相关性测度,它不像传统的相关系数那样具有局限性,可以更好地体现变量之间复杂的相关关系。当已知边缘分布与基本变量的相关关系时,则可以采用 Copula 理论来逼近联合分布<sup>[2]</sup>。对于含不确定因素的可靠

性分析问题,目前已有不少可用的分析方法,如 Monte Carlo 法、重要抽样法等针对随机不确定性的数值模拟方法<sup>[3]</sup>,以及顶点法、优化法等针对模糊不确定性的可靠性分析方法<sup>[4-6]</sup>。但这些方法仅仅针对可靠性模型中包含某种单一不确定性因素的情形提出了解决方案,而对于模糊不确定性和随机不确定性同时存在的情形,上述可靠性分析方法均未能很好解决。目前同时考虑两种不确定性的可靠性分析方法并不多,并且普遍存在一些局限性,如效率不高或对功能函数的形式有要求等。

为了解决上述问题,本文基于 Copula 理论建立了概率信息不全时模糊可靠度隶属函数求解的自适应截断抽样法。所建方法首先通过 Copula 函数及各变量的边缘分布逼近概率信息不全时的联合概率分布,在得到完整的概率分布信息之后,又在文献<sup>[7]</sup>建立的求解区间变量和随机变量共同作用时可靠性的一次二阶矩迭代法的基础上,建立起一种模糊可靠度隶属函数求解的自适应截断抽样法。自适应截断抽样法<sup>[8-10]</sup>与一次二阶矩法均是通过获得设计点与可靠度指标  $\beta$  来进行可靠性分析,但与一次二阶矩法相比,自适应截断抽样法可以反映非线性对可靠性的影响,因而其结果更加准确和稳健,具有较好的普遍适用性。在详细给出建模原理与分析流程之后,用算例对本文方法的优越性进行了验证。

收稿日期:2009-11-26;修改稿收到日期:2010-05-11.

基金项目:国家自然科学基金(10572117, 50875213);  
新世纪优秀人才支持计划(NCET-05-0868);  
航空基金(2007ZA53012);  
民口 863 计划课题(2007AA04Z401)资助项目.

作者简介:王维虎\*(1986-),男,硕士生  
(E-mail: wwh2286@163.com);  
吕震宙(1966-),女,教授,博士生导师.

## 2 概率信息不全时联合概率分布逼近的 Copula 函数

### 2.1 Copula 逼近的基本原理

由 Sklar 定理<sup>[11]</sup>可知,若  $n$  维随机变量  $\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_n)$  的边缘分布  $(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$  连续,则在已知  $\mathbf{x}$  的边缘分布及相关系数时, $\mathbf{x}$  的  $n$  维联合分布函数  $F(x_1, \dots, x_n)$  对应的联合概率密度函数  $f(\mathbf{x})$  可由下式逼近:

$$f(\mathbf{x}) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) \quad (1)$$

式中  $f_{X_i}(x_i)$  是  $x_i$  的边缘概率密度函数,  $c(v_1, \dots, v_n)$  为 Copula 分布函数  $C(v_1, \dots, v_n)$  的密度函数,当取正态型 Copula 函数时,二元情况下的  $C(v_1, v_2)$  如下所示:

$$C(v_1, v_2) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_c^2}} \exp\left[-\frac{s^2 - 2\rho_c st + t^2}{2(1-\rho_c^2)}\right] ds dt \quad (2)$$

式中  $v_1$  和  $v_2$  为基本变量的边缘分布函数,  $\Phi^{-1}$  为标准正态分布的逆累积分布函数,  $\rho_c$  是由  $x_1$  和  $x_2$  的 Spearman 相关系数  $\rho_s$ <sup>[2]</sup> 确定的 Copula 函数中的相关系数,且二者具有如下的计算关系。

$$\rho_c = 2\sin\left[\frac{\pi}{6}\rho_s(x_1, x_2)\right] \quad (3)$$

由上述理论可知,对于边缘分布  $f_{X_i}(x_i)$  和 Spearman 相关系数已知的概率信息不全情况,可由式(2)的正态 Copula 密度函数及各变量的边缘概率密度函数来逼近联合概率密度函数。

### 2.2 变量的空间变换

由于自适应截断抽样法需在标准正态空间中操作,因此需建立服从 Copula 函数逼近的联合分布函数的变量  $\mathbf{x}$  与标准正态变量  $\mathbf{u}$  的转换关系。依据 Cholesky 分解和等概率变换原理<sup>[12,13]</sup>(下述过程以二维变换为例进行说明,多于二维的情况可类推),当二维变量间的 Copula 相关系数为  $\rho_c$  时,可以组成相关系数矩阵  $\rho_0 = \begin{bmatrix} 1 & \rho_c \\ \rho_c & 1 \end{bmatrix}$ ,对  $\rho_0$  进行 Cholesky 分解,可得  $\rho_0 = \mathbf{L}_0 \mathbf{L}_0^T$ ,其中  $\mathbf{L}_0$  为下三角阵,利用  $\mathbf{L}_0$  可将独立标准正态变量  $\mathbf{u}$  转换为具有相关系数矩阵  $\rho_0$  的相关标准正态变量  $\mathbf{y} = \mathbf{L}_0 \mathbf{u}$ ,再利用等概率转换原则  $x_i = F_i^{-1}(\Phi(y_i))$ ,即可得到满足 Copula 概

率密度分布的向量  $\mathbf{x}$ 。

定义上述从独立标准正态变量  $\mathbf{u}$  到满足 Copula 逼近概率密度分布变量  $\mathbf{x}$  的变换为 Copula 正变换,并简记为

$$\mathbf{x} = T(\mathbf{u}) \quad (4)$$

而称包括过程  $y_i = \Phi^{-1}(F_i(x_i))$  和  $\mathbf{u} = \mathbf{L}_0^{-1} \mathbf{y}$  的  $\mathbf{x}$  到  $\mathbf{u}$  的变换为 Copula 逆变换,简记为

$$\mathbf{u} = T^{-1}(\mathbf{x}) \quad (5)$$

利用上述两小节中所提到的原理和方法,在已知各变量的边缘分布及 Spearman 相关系数的情形下,可以通过 Copula 函数逼近得到具有完整概率信息的联合概率分布。

## 3 基本变量的模糊不确定性向结构可靠度的传递

假设结构中有  $n_r$  个随机变量和  $n_f$  个模糊变量  $\mathbf{x}_R=(x_{R1}, x_{R2}, \dots, x_{Rn_r})$  与  $\mathbf{x}_F=(x_{F1}, x_{F2}, \dots, x_{Fn_f})$ ,其中  $x_{Ri}$  的概率密度函数为  $f_{x_{Ri}}(x_{Ri})(i=1, \dots, n_r)$ ,且各随机变量间具有相关性,模糊变量  $x_{Fj}$  的隶属度函数为  $\mu_{x_{Fj}}(x_{Fj})(j=1, 2, \dots, n_f)$ 。由于结构可靠度为  $P_r = P\{g(\mathbf{x}_R, \mathbf{x}_F) > 0\}$ ,且结构的功能函数  $g(\mathbf{x}_R, \mathbf{x}_F)$  中同时含有随机变量  $\mathbf{x}_R$  与模糊变量  $\mathbf{x}_F$ ,因此结构的可靠度为模糊可靠度,且可靠度的模糊性取决于模糊变量的模糊性。在给定的隶属度水平  $\lambda$  下,由  $\mathbf{x}_F$  的隶属函数可以确定其隶属区间  $\mathbf{x}_F \in (x_F^{(L)}(\lambda), x_F^{(U)}(\lambda))$ ,当  $\mathbf{x}_F$  在隶属区间内取值时,结构的功能函数也可以抽象为一个区间函数的形式,即  $g(\mathbf{x}_R, \mathbf{x}_F(\lambda)) \in (g_{\min}(\mathbf{x}_R, \mathbf{x}_F(\lambda)), g_{\max}(\mathbf{x}_R, \mathbf{x}_F(\lambda)))$ ,再由结构可靠度  $P_r$  与功能函数的关系  $P_r = P\{g(\mathbf{x}_R, \mathbf{x}_F) > 0\}$ ,可以将这种区间函数的形式传递到可靠度上去,使得结构的可靠度在给定的隶属

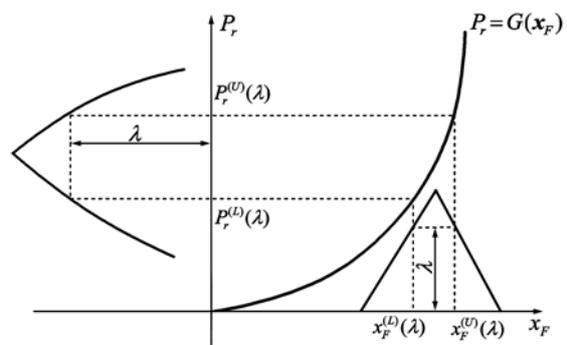


图1 基本变量模糊性向可靠度的传递  
Fig. 1 Fuzzy transformation from basic variables to reliability

度水平  $\lambda$  下也为一个区间变量,此过程即为基本变量的模糊性向可靠度模糊性的传递过程如图 1 所示。

根据此传递过程,可以确定在给定的隶属度水平  $\lambda$  下结构的可靠度以及  $P_r$  的上、下界  $P_r^{(U)}(\lambda)$  与  $P_r^{(L)}(\lambda)$  和  $P_r$  的隶属函数  $\mu_{P_r}$ 。

$$P_r^{(L)}(\lambda) = P\{g_{\min}(\mathbf{x}_R, \mathbf{x}_F(\lambda)) > 0\} \quad (6)$$

$$P_r^{(U)}(\lambda) = P\{g_{\max}(\mathbf{x}_R, \mathbf{x}_F(\lambda)) > 0\} \quad (7)$$

## 4 模糊可靠度隶属函数求解的自适应截断重要抽样法

在由 Copula 函数获得了完整的概率信息,并建立了模糊性由基本变量向可靠度传递的模型后,可以利用合理的方法来求解模糊可靠度隶属函数。本文在文献[7]的基础上,将自适应截断抽样法用于获取设计点信息以及可靠度指标,通过逐步迭代获得使功能函数  $g(\mathbf{x}_R, \mathbf{x}_F(\lambda))$  取极大(或极小)值的模糊变量的取值点  $\mathbf{x}_{F(\max)}^{*(k)}$ (或  $\mathbf{x}_{F(\min)}^{*(k)}$ )和收敛的设计点  $\mathbf{x}_{R(\max)}^{*(k+1)}$ (或  $\mathbf{x}_{R(\min)}^{*(k+1)}$ )( $k$  表示迭代次数),进而利用收敛的设计点  $\mathbf{x}_{R(\max)}^{*(k+1)}$ (或  $\mathbf{x}_{R(\min)}^{*(k+1)}$ )的信息求解模型的可靠度  $P_r^{(U)}(\lambda)$ (或  $P_r^{(L)}(\lambda)$ )。

### 4.1 模糊可靠度隶属函数求解的迭代法的基本原理和步骤

求解模糊可靠度隶属函数的迭代法的思想是:在每个给定的隶属度水平对应的模糊变量取值区间内,以功能函数取极值为目标,交替分析模糊变量与随机变量对功能函数的影响,通过迭代逐步得到收敛的设计点及其所对应的模糊变量取值点,利用上述信息,求得给定隶属度水平下可靠度的上、下界。由不同隶属度水平下可靠度的上、下界,确定模糊可靠度的隶属函数。具体步骤如下。

(1) 求解给定隶属度水平  $\lambda$  下,模糊变量的隶属区间。

(2) 在给定隶属度水平  $\lambda$  下,设定随机变量设计点初值  $\mathbf{x}_{R(\max)}^{*(k)}$ (或  $\mathbf{x}_{R(\min)}^{*(k)}$ )( $k=1$  时,取设计点为  $\mathbf{x}_R$  的均值  $\boldsymbol{\mu}_R$ )。

(3) 确定随机基本变量取值后,建立以模糊变量在隶属区间内取值为约束条件,以功能函数取极大(或极小)值为优化目标的优化模型,并对该优化模型进行求解,得到模糊变量最优解  $\mathbf{x}_{F(\max)}^{*(k)}$ (或  $\mathbf{x}_{F(\min)}^{*(k)}$ )。

(4) 将  $\mathbf{x}_F(\lambda) = \mathbf{x}_{F(\max)}^{*(k)}$ (或  $\mathbf{x}_F(\lambda) = \mathbf{x}_{F(\min)}^{*(k)}$ )代入功能函数后,在缩减了的随机变量空间中利用

(4.2) 节的基于 Copula 理论的自适应截断抽样法求得功能函数的设计点  $\mathbf{x}_{R(\max)}^{*(k+1)}$ (或  $\mathbf{x}_{R(\min)}^{*(k+1)}$ )。

(5) 如果第  $k+1$  次求得的设计点与第  $k$  次的设计点的差异小于允许值,则认为迭代收敛,取第  $k+1$  次的设计点做为最终的设计点,  $\mathbf{x}_{F(\max)}^{*(k)}$ (或  $\mathbf{x}_{F(\min)}^{*(k)}$ )为收敛的模糊变量取值点,否则在第  $k+1$  次求得的设计点基础上,回到步骤(2)继续进行迭代,直至算法收敛。

(6) 根据设计点信息,利用自适应截断重要抽样法求解模糊变量在其隶属区间内取值时对应于最大、最小功能函数的可靠度的上、下界。

(7) 根据不同隶属度水平下可靠度的上、下界,确定模糊可靠度隶属函数。

### 4.2 基于 Copula 理论的截断抽样的自适应策略

由(4.1)节所述的求解过程可知,在给定的隶属度水平  $\lambda$  下,利用自适应截断抽样法求解系统的设计点与可靠度是两个重要环节。自适应方法的基本思想是在独立标准正态空间里,引入以原点为球心并以设计点到原点的距离为半径的超球面,称之为  $\beta$  球。在抽样的过程中,利用落入  $\beta$  球外失效域中样本点的信息逐步修正超球半径,使得其稳健的收敛于最优半径,同时获得设计点的信息。由于本文的自适应策略是建立在 Copula 逼近联合概率分布基础上的,因此其实现流程和步骤与已有的方法[7]是不同的。具体流程如图 2 所示,实现步骤可简述如下。在求解随机变量设计点过程中,模糊变量已取值  $\mathbf{x}_F = \mathbf{x}_{F(\max)}^{*(k)}$ (或  $\mathbf{x}_{F(\min)}^{*(k)}$ ),因此可称之为在缩减的随机变量空间中求设计点。

(1) 在独立标准正态空间中设定两个初始半径分别为  $\beta_0$  和  $\beta_1$  ( $\beta_0 > \beta_1$ ) 的球。

(2) 在独立标准正态空间中产生  $M$  个样本点  $\mathbf{u}_i$  ( $i=1, 2, \dots, M$ ),通过计算  $\mathbf{u}_i$  对应的原变量空间点  $T(\mathbf{u}_i)$  的功能函数值  $g(T(\mathbf{u}_i), \mathbf{x}_F^*)$ ,筛选出处于初始的两个球之间的失效点  $\mathbf{u}_{F_j}$  ( $j=1, 2, \dots, J$ ),并确定这些失效点中概率密度函数值最大的点  $\mathbf{u}_F^{*(l)}$ ,以此点作为第  $l$  次迭代的临时设计点。

(3) 利用(2.2)节中的逆变换  $T^{-1}$ ,将独立标准正态空间中的原点  $o$  和临时设计点  $\mathbf{u}_F^{*(l)}$  转换到原始的基本变量空间,并通过线性搜索的方法,求出转换后的临时设计点  $T(\mathbf{u}_F^{*(l)})$  与转换后的原点  $T(o)$  的连线与失效边界的交点  $\mathbf{x}_{RF}^{*(l+1)}$ ,以  $\mathbf{x}_{RF}^{*(l+1)}$  作为第  $l+1$  次迭代的临时设计点。

(4) 将新求得的临时设计点  $\mathbf{x}_{RF}^{*(l+1)}$  通过

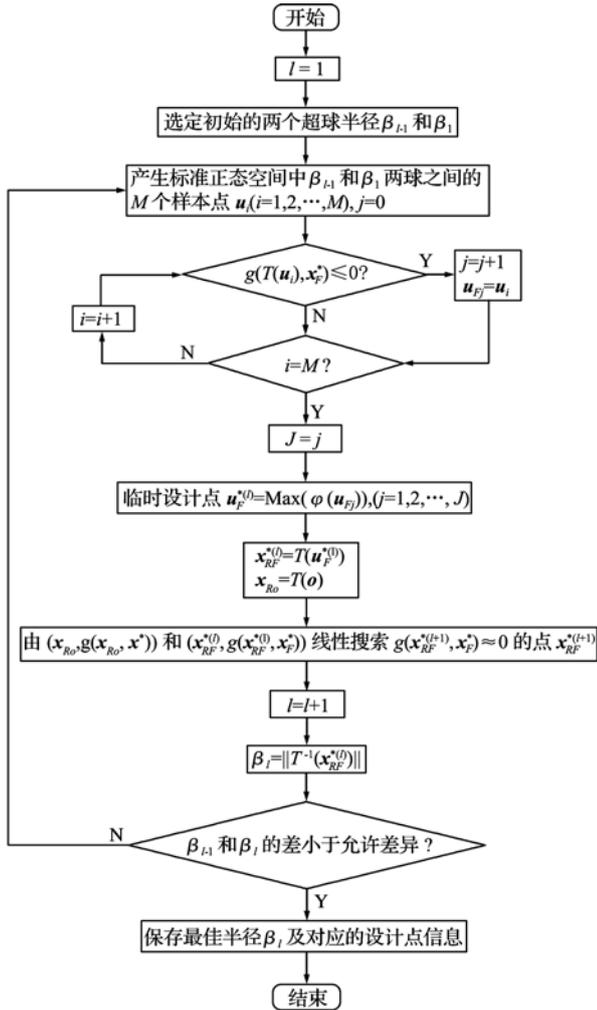


图2 自适应策略流程图( $\varphi$ 为标准正态概率密度函数,  $o$ 为独立标准正态空间中的原点坐标向量)

Fig. 2 Flow chart of adaptive strategy

( $\varphi$ : probability density function of standard normal variables,  $o$ : the coordinate of the origin point in independent standard space)

Copula 逆变换转换到独立标准正态空间中得  $u_F^{*(+1)} = T^{-1}(x_{RF}^{*(+1)})$ , 以转换后的临时设计点到原点的距离 ( $u_F^{*(+1)}$ ) 作为第  $l+1$  次迭代的超球半径  $\beta_{l+1}$ , 在独立标准正态空间中形成一个新的  $\beta$  球。

(5) 如果  $\beta_{l+1}$  与  $\beta_l$  的差异小于允许值, 则迭代停止, 此时的球即为所要求的  $\beta$  超球, 其半径就为最优半径  $\beta_{opt}$ ,  $u_F^{*(+1)}$  即为标准正态空间的设计点, 否则回到第(2)步, 继续进行迭代。

通过以上的自适应策略, 可以求得在给定隶属度水平下, 模糊变量取值  $x_F^*$  时系统的最优半径与设计点信息。

当获得设计点的信息后, 采用截断重要抽样法, 或利用寻找设计点过程中的信息采用截断抽样法来计算可靠度, 具体计算方法可参阅文献[14]。

## 5 算例

本节将采用几个算例对所建立的基于 Copula 逼近的模糊可靠度隶属函数求解方法进行验证。第一个算例中功能函数所含的随机变量由已知分布的独立变量做变换组合得到, 因此可以通过数学推导得到随机基本变量之间的联合分布, 在模糊基本变量的隶属度函数给定的情况下, 可通过 Monte Carlo 方法准确计算得到这两个算例的模糊可靠度隶属函数, 此结果可作为参照解, 以验证 Copula 函数逼近联合分布后, 分别用 Monte Carlo 法和自适应截断抽样法计算的模糊可靠度隶属函数。后两个工程算例由于缺乏随机变量联合分布, 因此没有参照解, 对这两个工程算例仅给出了 Copula 函数逼近联合分布后的 Monte Carlo 法的分析结果与自适应截断抽样法的分析结果的对比。

**算例 1** 由两个独立的 Gamma 分布随机变量  $x_1 \sim \Gamma(4, 1)$  与  $x_2 \sim \Gamma(10, 1)$  组合, 得到两个基本随机变量  $y_1 = 9x_1 + 4x_2$ ,  $y_2 = x_1 / (x_1 + x_2)$ , 利用概率论演绎法可知  $y_1 \sim \Gamma(76, 1)$ ,  $y_2 \sim \beta(4, 10)$ , 且  $y_1$  与  $y_2$  的联合分布也可精确推得。若包含  $y_1$  和  $y_2$  与模糊变量  $P$  的失效模式功能函数为  $g(y, P) = |\cos(y_1) - y_2| - P/5000$ , 且  $P$  的隶属函数为

$$\mu_p(P) = \begin{cases} (P - 25)/50, & 25 \leq P \leq 75 \\ (P - 125)/(-50), & 75 \leq P \leq 125 \end{cases}$$

则各种方法求得的模糊可靠度隶属函数曲线对比如图 3 所示。

图 3 中的两种 Monte Carlo 法是分别基于数学推导的联合分布模型 MCR(Monte Carlo Reference) 和 Copula 逼近的联合分布模型 CMC(Copula based Monte Carlo), 以遍历模糊基本变量隶属区间的方法来求解模糊可靠度隶属函数的, 在每个模糊变量的取值点处 Monte Carlo 方法需要抽样  $3 \times 10^6$  次。而基于 Copula 逼近联合分布的自适应截断重要抽样法 CATIS(Copula based Adaptive Truncated Importance Sampling), 可以通过几次模糊变量取值和随机变量设计点取值的交替迭代, 快速得到使功能函数取极大(或极小)值的设计点信息, 基于设计点的截断重要抽样可以用更少的抽样次数, 得到与 Monte Carlo 法几乎一致的可靠度分析结果。本算例中, 在不同隶属度水平下对于最大与最小功能函数状态, 计算可靠度所需的平均抽样次数与平均计算时间列入表 1。

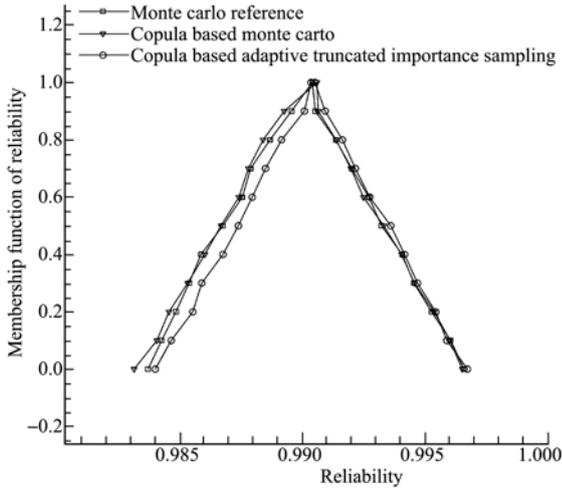


图3 模糊可靠度隶属函数分析结果对比

Fig. 3 The contrast of membership functions of fuzzy reliability

表1 平均抽样次数与平均计算时间

Tab. 1 The average sampling and runtime

平均抽样次数		平均计算时间(s)		
功能函数取极大值	功能函数取极小值	MCR	CMC	CATIS
485817	482298	1932	1902	145

由表1可以看出,在得到设计点信息后,采用自适应截断重要抽样法,在每个模糊变量取值点处,只需抽样大约  $4.8 \times 10^5$  次,即可得到与参照解几乎一致的计算结果,与 Monte Carlo 法中  $3 \times 10^6$  次相比,减少了抽样次数,同时计算时间也得到了极大的缩短,计算效率得到了提高。

**算例2** 机翼的九盒段结构由64个杆单元和42个板单元构成,材料为铝合金。现已知结构中某两个单元强度  $y_1 \sim N(90, 8)$  和  $y_2 \sim N(83, 4.2)$ , 且有  $y_1$  和  $y_2$  的样本信息,由这些样本信息可估计出  $y_1$  与  $y_2$  的 Spearman 相关系数  $\rho_s = 0.2490$ , 模糊外载荷  $P$  的隶属函数为

$$\mu_p(P) = \begin{cases} (P - 147)/3, & 147 \leq P \leq 150 \\ (P - 153)/(-3), & 150 \leq P \leq 153 \end{cases}$$

若结构失效模式的功能函数为  $g(y, P) = y_1 + y_2 - P$ , 则基于 Copula 逼近,分别由 Monte Carlo 法和自适应截断重要抽样法求得的模糊可靠度隶属函数曲线对比如图4所示,平均抽样次数与平均计算时间列入表2。

**算例3** 如图5所示一矩形截面悬臂梁受到均布载荷,以其自由端挠度不超过  $L/325$  为约束建立功能函数为

$$g(E, \omega, b, L) = L/325 - \omega b L^4 / (8EI)$$

式中  $\omega, b, L, E$  和  $I$  分别为单位载荷,截面尺寸,梁的长度,弹性模量和截面惯性矩。其中  $E$  和  $\omega$  为模

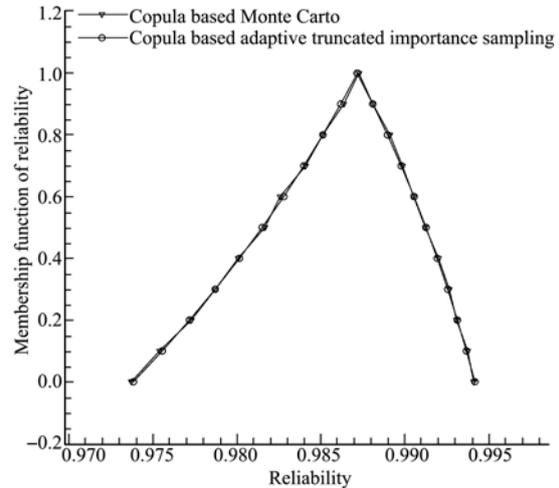


图4 模糊可靠度隶属函数分析结果对比

Fig. 4 The contrast of membership functions of fuzzy reliability

表2 平均抽样次数与平均计算时间

Tab. 2 The average sampling and runtime

平均抽样次数		平均计算时间(s)	
功能函数取极大值	功能函数取极小值	CMC	CATIS
202624	202966	1242	196

表3 基本变量边缘分布参数

Tab. 3 The marginal distribution parameters of basic variables

基本变量	均值	标准差
$L/m$	6	0.9
$b/mm$	250	37.5

糊变量,其各自的隶属度函数分别为

$$\mu_E(E) = \begin{cases} (E - 22)/4, & 22 \leq E \leq 26 \\ (E - 30)/(-4), & 26 \leq E \leq 30 \end{cases}$$

$$\mu_\omega(\omega) = \begin{cases} (\omega - 950)/50, & 950 \leq \omega \leq 1000 \\ (\omega - 1050)/(-50), & 1000 \leq \omega \leq 1050 \end{cases}$$

式中  $L$  和  $b$  为相关的正态分布随机变量,其分布参数见表3,已知  $L$  与  $b$  的一系列样本点信息,由这些样本信息可估计出  $L$  与  $b$  的 Spearman 相关系数为  $\rho_s = 0.3094$ ,  $I$  是  $b$  的函数,且  $I = b^4/12$ 。

基于 Copula 逼近,分别由 Monte Carlo 法和自适应截断重要抽样法求得的模糊可靠度隶属函数曲线对比如图6所示,平均抽样次数和平均计算时间列入表4。

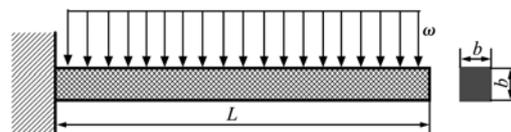


图5 矩形截面梁

Fig. 5 Rectangle section girder

表 4 平均抽样次数与平均计算时间

Tab. 4 The average sampling and runtime

平均抽样次数		平均计算时间(s)	
功能函数取极大值	功能函数取极小值	CMC	CATIS
17997	40034	9581	29

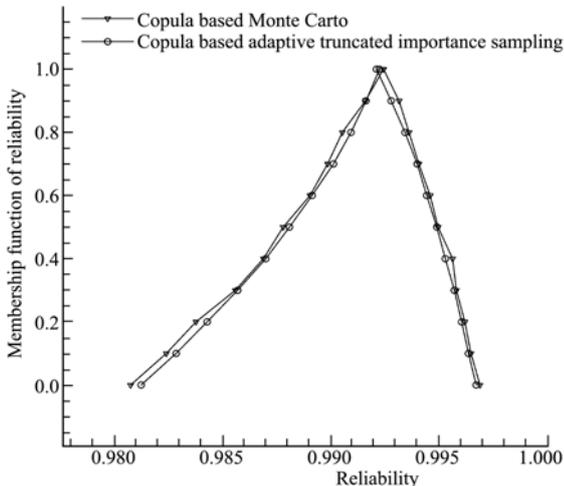


图 6 模糊可靠度隶属函数分析结果对比

Fig. 6 The contrast of membership functions of fuzzy reliability

由以上算例可以看出,利用本文所提方法获得的模糊可靠度隶属函数与利用 Monte Carlo 方法得到的结果非常近似,证明了本文中利用 Copula 理论逼近概率信息不全时的联合分布的方法是可行与合理的。同时,算例中多种类型的功能函数及不同分布形式的基本变量体现了本文方法的普适性。在计算效率方面, Monte Carlo 方法在每个隶属度水平下,在给定了模糊变量取值后,需要进行大量的抽样来计算可靠度,而自适应截断重要抽样法在确定了设计点与最优半径之后,只需做少量抽样,即可精确地分析出模型可靠度。通过各种方法在各个隶属度水平下平均计算时间的对比,证明了本文所提方法具有极高的计算效率。

## 6 结 论

本文利用 Copula 函数在概率信息不全情况下逼近基本变量联合分布时的优越性,并利用自适应截断重要抽样法在获取设计点和分析可靠度时的普适、高效性,建立了概率信息不全时可靠性模型模糊可靠度隶属函数求解的自适应截断重要抽样法,给出了方法的原理和实现过程,并利用算例对方法的合理性、可行性进行了验证。算例结果表明:本文所建方法可以有效解决概率信息不全时模糊可靠度隶属函数的求解问题。求解过程中用到

的自适应截断重要抽样方法综合了 Monte Carlo 方法的普适性、稳健性和自适应超球抽样法的高效性,在保证计算精度的同时大大提高了计算效率,为概率信息不全与多种不确定因素影响下的工程可靠性分析与设计提供了重要参考。

## 参考文献 (References):

- [1] NELSEN R B. *An Introduction to Copulas* [M]. Second ed. New York: Springer, 2006.
- [2] Régis Lebrun, Anne Dutfoy, An innovating analysis of the Nataf transformation from the copula viewpoint [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2009, **24**: 312-320.
- [3] 吕震宙, 宋述芳, 李洪双, 袁修开. 结构机构可靠性及可靠性灵敏度分析 [M]. 北京: 科学出版社, 2009. (LU Zhen-zhou, SONG Shu-fang, LI Hong-shuang, YUAN Xiu-kai. *Structure Reliability and Reliability Sensitivity Analysis* [M]. Beijing: Science Press, 2009. (in Chinese))
- [4] Don W M, Wong F S. Fuzzy weighted averages and implementation of the extension principle [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1987, **21**(2): 183-199.
- [5] Smith S A, Krishnamurthy T, Mason B H. Optimized vertex method and hybrid reliability [A]. Proceedings of 43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC. Structures, Structural Dynamics and Materials Conference [C]. Denver, CO, April 2002, AIAA-2002-1465.
- [6] Penmetsa R C, Grandhi R V. Uncertainty propagation using possibility theory and function approximations [J]. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 2003, **31**(2): 257-279.
- [7] Du X. Unified uncertainty analysis by the first order reliability method [J]. *Journal of Mechanical Design* (ASME), 2008, **130**(9): 091401-091410.
- [8] Frank Grooteman. Adaptive radial-based importance sampling method for structural reliability [J]. *Structural Safety*, 2008, **30**: 533-542.
- [9] Melchers R E. Radial importance sampling for structural reliability [J]. *J Eng Mech Div ASCE*, 1990, **116**(1): 189-203.
- [10] Au S K, Beck JL. A new adaptive importance sampling scheme for reliability calculations [J]. *Structural Safety*, 1999, **21**: 135-158.

- [11] Sklar A. Fonctions de repartition a n dimensions et leurs marges[J]. *Publications del' Institut de Statistique del' Universite de Paris*, 1959, **8**:229-231.
- [12] Der Kiureghian A, Liu P L. Structural reliability under incomplete probability information[J]. *J Eng Mech*, 1986, **112**:85-104.
- [13] Liu P L, Der Kiureghian A. Multivariate distribution models with prescribed marginals and covariances [J]. *Probab Eng Mech*, 1986, **1**(2):105-112.
- [14] 万 越. 结构可靠性及其相关问题的数值估算方法研究[D]. 西安:西北工业大学, 2009. (WAN Yue. Numerical Estimate Methods Study on Structure Reliability and Interrelated Problems[D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2009. (in Chinese))

## Membership function analysis of fuzzy reliability by adaptive truncated sampling on Copula theory

WANG Wei-hu\*, LÜ Zhen-zhou, LI Qian

(School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract:** For engineering reliability problem with fuzzy variables and random variables under incomplete probability information, Copula theory is employed to approximate joint distribution function and joint probability density function of the random variables, on which an adaptive truncated sampling method is established to obtain the membership function of fuzzy reliability. The established model on the Copula approximation can get the value of fuzzy variables and design point which make the performance function take extreme values by optimization and iterating strategy, on which an adaptive truncated sampling is employed to calculate the bounds of the reliability under each given membership level and to get the membership function of the reliability furthermore. In the established method, the advantage of the Copula approximation is combined with the efficiency and robustness of the adaptive truncated sampling, which makes the reliability analysis under incomplete probability information can be completed efficiently. After the model concepts and the solution are given for the established method, several examples are presented to demonstrate the rationality of the model and the feasibility of the solution.

**Key words:** Copula theory; fuzzy reliability; membership function; adaptive truncated sampling.