

文章编号:1007-4708(2011)04-0510-07

# 基于 Hamilton 体系的弹性力学问题的 比例边界有限元方法

胡志强\*, 林 皋, 王 毅, 刘 俊

(大连理工大学 建设工程学部 水利工程学院, 大连 116024)

**摘 要:**比例边界有限元方法是求解偏微分方程的一种半解析半数值解法。对于弹性力学问题,可采用基于力学相似性、基于比例坐标相似变换的加权余量法和虚功原理得到以位移为未知量的系统控制方程,属于 Lagrange 体系。但在求解时,又引入了表面力为未知量,控制方程属于 Hamilton 体系。因而,本文提出在比例边界有限元离散方法的基础上,利用钟万勰教授提出的弹性力学对偶(辛)体系求解方法,通过引入对偶变量,直接在 Hamilton 体系框架内建立控制方程。再利用区段混合能和对偶方程得到了有限域、无限域边界静力刚度所满足的代数 Riccati 方程,该方程可采用特征向量展开方法和精细积分方法进行求解。

**关键词:**Hamilton 体系;比例边界有限元;弹性力学;边界刚度矩阵

**中图分类号:**O241      **文献标志码:**A

## 1 引 言

钟万勰教授<sup>[1]</sup>根据结构力学和控制理论的模拟关系,在 Hamilton 变分原理基础上,发展了求解弹性力学问题的对偶(辛)求解体系。在该体系框架内,也可采用数值方法进行求解,如钟万勰<sup>[2]</sup>、周建方等<sup>[3]</sup>提出的半解析半数值方法,选择某一坐标方向进行解析求解,其余方向则采用有限元进行离散,但求解域的形状受到限制,大多为条形区域、轴对称区域或球对称区域。

由 John P. Wolf 和 Chongmin Song 两位教授<sup>[4-6]</sup>提出的比例边界有限元方法 SBFEM(Scaled Boundary Finite Element Method),仅求解区域的环向边界需要离散,适用于复杂形状的求解域,无需基本解,且径向为解析解,特别适合于求解含有无限域<sup>[4]</sup>、裂纹尖端应力奇异<sup>[7]</sup>的问题。其控制方程可由基于力学相似性<sup>[6]</sup>,基于比例边界变换的加权余量法<sup>[6]</sup>和虚功原理<sup>[8]</sup>等方法得到,未知量为位移,属于 Lagrange 体系框架。但在求解时,引入了边界表面力作为未知量,使得控制方程由以位移为未知量的二阶线性常微分方程组变为以位移和

表面力为未知量、系数矩阵是 Hamilton 矩阵的一阶线性常微分方程组,最后在状态空间中进行求解。这一求解方法与对偶体系所采用的方法相同,而且对偶体系在求解含无限域<sup>[1]</sup>和裂纹尖端应力奇异<sup>[9]</sup>问题也有很大的优势。因此基于这些相似性,本文拟采用弹性力学的对偶体系求解框架推导 SBFEM 的控制方程,揭示二者之间的内在联系,并为采用 SBFEM 求解偏微分方程提供一种更为统一的求解框架,同时,由于利用 SBFEM 可适用于复杂求解域形状的优点,拓宽了对偶体系的半解析半数值方法的应用范围。

另外,在采用 SBFEM 求解无限域和有限域静力问题时,边界刚度矩阵满足代数 Riccati 方程,常采用特征向量展开的方法来求解<sup>[4]</sup>。但是 Deeks et al.<sup>[10]</sup>和 Song<sup>[11]</sup>均指出,在二维无限域问题中,如果在某一方向上外荷载不是自平衡的,则位移的解析解中含有对数项,从而使得特征向量中出现约当型,导致特征向量不完备,无法准确计算静力刚度阵。为了解决这一问题,Deeks, et al.<sup>[10]</sup>提出了增加与刚体平动位移相关联的对数项的方法, Song<sup>[11]</sup>提出了矩阵函数和 Schur 分解相结合的方法,这两种方法的目的是使特征向量完备化。而钟万勰教授提出的精细积分方法<sup>[1]</sup>在求解代数 Riccati 方程时,可以避免由于特征向量中出现约当型所带来的数值求解困难,从而提高求解精度和效率。

收稿日期:2009-07-13;修改稿收到日期:2009-11-12.

基金项目:国家自然科学基金重点基金(90510018);  
大连理工大学交叉学科建设专项(数学+X)项目  
(MXDUT072001)资助项目.

作者简介:胡志强\*(1972-),男,博士,副教授  
(E-mail:huzhq@dlut.edu.cn);  
林 皋(1929-),男,教授,中国科学院院士.

因而,本文的目的是在 SBFEM 离散方法的基础上,在弹性力学的 Hamilton 对偶体系求解框架下,直接得到状态空间中的控制方程。在此基础上,推导求解域边界静力刚度所满足的控制方程,并给出求解方法。最后通过数值算例验证本文方法的精度及有效性。

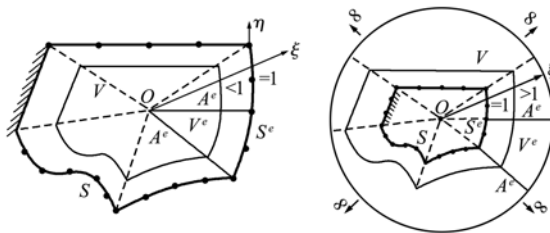
## 2 基于 Hamilton 体系的 SBFEM 控制方程的导出

### 2.1 Hamilton 体系框架下弹性力学问题的求解

根据弹性力学问题的对偶求解体框架,对于单连续坐标系统,可将连续坐标作为时间, Lagrange 函数就是总势能密度,包含应变能密度和外力功密度两部分。通过 Legendre 变换,引入与位移  $u$  对应的对偶变量  $p$ ,即应力,再由对偶变量  $u$  和  $p$  以及 Lagrange 函数可定义 Hamilton 函数,然后由 Hamilton 变分原理得到关于对偶变量正则方程组,其中系数矩阵为 Hamilton 矩阵。方程组可采用分离变量和精细积分方法求解。具体方法参见文献[1,2]。

### 2.2 比例边界有限元方法的离散形式

采用比例边界有限元进行离散时,求解域可分成多个子域,每个子域需定义一个相似中心,在相似中心处应能够看到该子域的边界;从相似中心出发的射线定义为径向,如图 1 和图 2 中的  $\xi$  方向,子域中不通过相似中心的边界面定义为环向,如图 1 和图 2 中的  $\eta$  和  $\zeta$  方向; $\xi, \eta$  和  $\zeta$  构成局部坐标系。仅对结构的环向边界,(如图 1 和图 2 中的边界  $S$ ),进行有限元离散,如图 1 和图 2 所示。对于有界域问题, $\xi$  取值范围为  $[\xi_0, 1], \xi_0 \in [0, 1)$ ,其中  $\xi = 1$  对应于外边界;对于无界域问题, $\xi$  取值范围为  $[1, \infty)$ ,



(a) 有界域 (b) 无界域  
Fig. 1 SBFEM 中有界域和无界域的边界离散形式及相似中心的选择(二维问题)

Fig. 1 Surface discretization for bounded and unbounded medium and choice of scaling center(for 2D problem)

其中  $\xi = 1$  对应于内边界。

求解域内任一点整体坐标  $\hat{x}_i (i = 1, 2, 3)$  可表示成相似中心的坐标  $\hat{x}_{0i}$ 、径向坐标  $\xi$  以及边界面 ( $\xi = 1$ ) 上点的坐标  $x_i$  的函数,如下式:

$$\hat{x}_i = \hat{x}_{0i} + \xi x_i, i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

局部坐标系下,域内任一点  $M$  的位移  $w$  为

$$w(\xi, \eta, \zeta) = N(\eta, \zeta)u(\xi) \quad (2)$$

设连接相似中心  $O$  与  $M$  点的射线  $OM$  与边界面交点为  $M_0$ ,则  $N(\eta, \zeta)$  表示  $M_0$  点所在边界面单元的节点形函数向量; $\eta, \zeta$  取  $M_0$  点的值, $u(\xi)$  表示连接相似中心到  $M_0$  点所在单元各节点的射线与径向坐标为  $\xi$  的环向表面交点的位移向量。单元的 Jacobian 矩阵可表示为<sup>[3,4]</sup>

$$\hat{J}(\xi, \eta, \zeta) = \begin{bmatrix} \hat{x}_{,\xi} & \hat{y}_{,\xi} & \hat{z}_{,\xi} \\ \hat{x}_{,\eta} & \hat{y}_{,\eta} & \hat{z}_{,\eta} \\ \hat{x}_{,\zeta} & \hat{y}_{,\zeta} & \hat{z}_{,\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \xi \\ \xi \end{bmatrix} J_{\xi}(\eta, \zeta) \quad (3)$$

$$J_{\xi}(\eta, \zeta) = \begin{bmatrix} N^T x & N^T y & N^T z \\ N^T_{,\eta} x & N^T_{,\eta} y & N^T_{,\eta} z \\ N^T_{,\zeta} x & N^T_{,\zeta} y & N^T_{,\zeta} z \end{bmatrix}$$

式中  $x, y$  和  $z$  分别为边界面 ( $\xi = 1$ ) 上的单元节点整体坐标所形成的向量。Jacobian 矩阵行列式为

$$|\hat{J}(\xi, \eta, \zeta)| = \xi^2 |J_{\xi}(\eta, \zeta)| \quad (4)$$

在局部坐标系下,求解域内任一点的应变为

$$\epsilon(\xi, \zeta, \eta) = B^1(\eta, \zeta)u(\xi)_{,\xi} + \frac{1}{\xi} B^2(\eta, \zeta)u(\xi) \quad (5)$$

式中  $B^1(\eta, \zeta)$  和  $B^2(\eta, \zeta)$  由矩阵  $J_{\xi}(\eta, \zeta)$  的逆阵中的元素组成,具体形式见文献[4,5]。

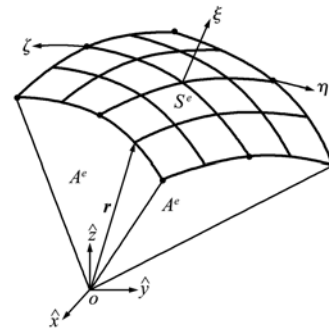


图 2 比例边界局部坐标系  $\xi\eta\zeta$  和整体坐标系  $\hat{x}\hat{y}\hat{z}$   
Fig. 2 Scaled boundary local coordinate system  $\xi\eta\zeta$  and global coordinate system  $\hat{x}\hat{y}\hat{z}$

从而,求解域  $V$  的应变能可表示为

$$\begin{aligned} U &= \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dxdydz = \\ &= \int_{\xi_0}^{\xi_1} \sum_e \left( \int_{S^e} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} | \mathbf{J} | d\eta d\zeta \right) d\xi = \\ &= \int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{,\xi}^T \mathbf{E}^0 \mathbf{u}_{,\xi} + \frac{2}{\xi} \mathbf{u}_{,\xi}^T (\mathbf{E}^1)^T \mathbf{u} + \frac{1}{\xi^2} \mathbf{u}^T \mathbf{E}^2 \mathbf{u}) \xi^2 d\xi \end{aligned} \quad (6)$$

式中  $S^e$  表示边界表面 ( $\xi = 1$ ) 单元,如图 1 所示; $\sum_e$  表示对所有边界表面上的单元进行求和; $[\xi_0, \xi_1]$  表示求解域沿径向的积分区间;矩阵  $\mathbf{D}$  为弹性矩阵, $\boldsymbol{\sigma}$  为应力向量; $\mathbf{E}^0, \mathbf{E}^1$  和  $\mathbf{E}^2$  为系数矩阵,定义式如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^0 &= \sum_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{B}^1)^T \mathbf{D} \mathbf{B}^1 | \mathbf{J}_\xi | d\eta d\zeta \\ \mathbf{E}^1 &= \sum_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{B}^2)^T \mathbf{D} \mathbf{B}^1 | \mathbf{J}_\xi | d\eta d\zeta \\ \mathbf{E}^2 &= \sum_e \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{B}^2)^T \mathbf{D} \mathbf{B}^2 | \mathbf{J}_\xi | d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (7)$$

考虑体力荷载  $\{b_x, b_y, b_z\}^T$  和侧面 (Side face, 记作  $S_A$ , 即图 1 中的面  $A^e$ , 相似中心通过该面, 无需离散) 上的分布荷载  $\{\bar{T}_x, \bar{T}_y, \bar{T}_z\}^T$ 。则外力功  $W$  为

$$\begin{aligned} W &= \int_V \mathbf{w}^T \mathbf{b} dV + \int_{S_A} \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{T}} dS = \\ &= \int_{\xi_0}^{\xi_1} \mathbf{u}^T (\mathbf{F}^b \xi^2 + \mathbf{F}' \xi) d\xi = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \mathbf{u}^T \mathbf{g} d\xi \end{aligned} \quad (8)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^b &= \int_{S_\xi} \mathbf{N}^T \mathbf{b} | \mathbf{J}_\xi | d\eta d\zeta \\ \mathbf{F}' &= \int_{\Gamma_{\xi\zeta}} \mathbf{N}_\zeta^T \bar{\mathbf{T}}_\zeta | \mathbf{J}_{\xi\zeta} | d\eta + \int_{\Gamma_{\xi\eta}} \mathbf{N}_\eta^T \bar{\mathbf{T}}_\eta | \mathbf{J}_{\xi\eta} | d\zeta \\ \mathbf{g} &= \mathbf{F}^b \xi^2 + \mathbf{F}' \xi \end{aligned}$$

式中  $S_\xi$  表示整个求解域中  $\xi$  为常数的表面,  $\Gamma_{\xi\zeta}$  表示  $\zeta = 1$  或  $-1$  的侧面上  $\xi$  为常数的曲线,  $\Gamma_{\xi\eta}$  表示  $\eta = 1$  或  $-1$  的侧面上  $\xi$  为常数的曲线;  $\mathbf{N}_\zeta, \mathbf{N}_\eta$  和  $\mathbf{J}_{\xi\zeta}$  和  $\mathbf{J}_{\xi\eta}$  分别对应于曲线  $\Gamma_{\xi\zeta}$  和  $\Gamma_{\xi\eta}$  上线单元的形函数和其 Jacobian 矩阵;  $\bar{\mathbf{T}}_\zeta$  和  $\bar{\mathbf{T}}_\eta$  分别表示在曲线  $\Gamma_{\xi\zeta}$  和  $\Gamma_{\xi\eta}$  上面荷载沿径向的分布。

### 2.3 Hamilton 体系下 SBFEM 控制方程的导出

根据 2.1 节介绍的 Hamilton 体系下弹性力学问题的求解过程, 结合 SBFEM 的离散形式, 推导

SBFEM 控制方程。

由式(6,8)表示的应变能和外力功, 可得系统沿径向的总势能密度, 即拉格朗日函数  $L$ 。

$$\begin{aligned} L(\mathbf{u}, \mathbf{u}_{,\xi}) &= \frac{1}{2} (\xi^2 \mathbf{u}_{,\xi}^T \mathbf{E}^0 \mathbf{u}_{,\xi} + \xi \mathbf{u}_{,\xi}^T (\mathbf{E}^1)^T \mathbf{u} + \\ &= \xi \mathbf{u}^T \mathbf{E}^1 \mathbf{u}_{,\xi} + \mathbf{u}^T \mathbf{E}^2 \mathbf{u}) - \mathbf{u}^T \mathbf{g} \end{aligned} \quad (9)$$

采用 Legendre 变换, 引入对偶变量  $\mathbf{p}$ ,

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}_{,\xi}} = \xi^2 \mathbf{E}^0 \mathbf{u}_{,\xi} + \xi (\mathbf{E}^1)^T \mathbf{u} \quad (10)$$

由  $\mathbf{E}^0$  的对称正定特性, 可得

$$\mathbf{u}_{,\xi} = (\mathbf{E}^0)^{-1} \mathbf{p} / \xi^2 - (\mathbf{E}^0)^{-1} (\mathbf{E}^1)^T \mathbf{u} / \xi \quad (11)$$

再引入 Hamilton 函数  $H$ ,

$$\begin{aligned} H(\mathbf{u}, \mathbf{p}) &= \mathbf{p}^T \mathbf{u}_{,\xi} - L(\mathbf{u}, \mathbf{u}_{,\xi}) = \\ &= \frac{-1}{2} \frac{1}{\xi^2} \mathbf{p}^T \mathbf{D} \mathbf{p} - \frac{1}{\xi} \mathbf{p}^T \mathbf{A} \mathbf{u} + \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{g} \end{aligned} \quad (12)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (\mathbf{E}^0)^{-T} (\mathbf{E}^1)^T \\ \mathbf{B} &= \mathbf{E}^1 (\mathbf{E}^0)^{-T} (\mathbf{E}^1)^T - \mathbf{E}^2 \\ \mathbf{D} &= -(\mathbf{E}^0)^{-T} \end{aligned} \quad (13)$$

根据 Hamilton 变分原理, 可得 Hamilton 正则方程组, 即对偶方程组。

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{,\xi} &= -\partial H / \partial \mathbf{u} = \frac{1}{\xi} \mathbf{A}^T \mathbf{p} - \mathbf{B} \mathbf{u} - \mathbf{g} \\ \mathbf{u}_{,\xi} &= \partial H / \partial \mathbf{p} = \frac{-1}{\xi^2} \mathbf{D} \mathbf{p} - \frac{1}{\xi} \mathbf{A} \mathbf{u} \end{aligned} \quad (14)$$

引入变量  $\mathbf{v}, \mathbf{q}$  得

$$\mathbf{v} = \xi^{0.5} \mathbf{u}, \mathbf{q} = \xi^{-0.5} \mathbf{p} \quad (15)$$

将式(14)代入式(15), 并利用式(13), 可得

$$\xi \mathbf{X}_{,\xi} = -\mathbf{Z} \mathbf{X} - \bar{\mathbf{R}} \quad (16)$$

式中

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi^{0.5} \mathbf{u} \\ \xi^{-0.5} \mathbf{p} \end{Bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{R}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \xi^{0.5} \mathbf{g} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - 0.5 \mathbf{I} & \mathbf{D} \\ \mathbf{B} & -\mathbf{A}^T + 0.5 \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (18)$$

式(16)即以位移和表面力为未知量的静力问题 SBFEM 控制方程<sup>[4-6]</sup>。由式(16)的第 2 式可得

$$\begin{aligned} \xi^2 \mathbf{E}^0 \mathbf{u}_{,\xi\xi} + (2\mathbf{E}^0 - \mathbf{E}^1 + (\mathbf{E}^1)^T) \xi \mathbf{u}_{,\xi} + \\ ((\mathbf{E}^1)^T - \mathbf{E}^2) \mathbf{u} + \mathbf{g} = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

式(19)即三维弹性力学问题中以位移为未知

量的比例边界有限元控制方程。

### 3 控制方程的求解

控制方程(16)是一阶非齐次线性变系数常微分方程组,在比例边界有限元方法的文献[4-6]中一般采用分离变量、特征向量展开和Schur分解等方法来求解。本文中,先引入变量  $s$ ,使得

$$\xi = e^s \quad \text{和} \quad s = \ln \xi \quad (20)$$

从而式(16)变为

$$\mathbf{X}_{,s} = -\mathbf{Z}\mathbf{X} - e^{0.5s}\bar{\mathbf{R}} \quad (21)$$

式(21)是一阶非齐次线性常系数常微分方程组,可以采用分离变量法进行求解。

### 4 静力边界刚度矩阵的导出及求解

在采用SBFEM进行结构响应分析时,通常要应用到有限域和无限域的边界刚度,一般采用特征向量方法<sup>[4,5]</sup>、Schur分解方法<sup>[4]</sup>以及矩阵函数方法<sup>[6]</sup>来求解。本文提出两种方法,第一种方法也是特征向量方法,另一种方法是精细积分方法。

#### 4.1 计算静力边界刚度的特征向量展开方法

对于式(21)的齐次方程形式,其通解为

$$\begin{Bmatrix} e^{0.5s}\mathbf{u} \\ e^{-0.5s}\mathbf{p} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{[\Lambda^+]s} \mathbf{c}_1 \\ e^{[\Lambda^-]s} \mathbf{c}_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

式中  $[\Psi]$ ,  $[\Lambda^+]$  和  $[\Lambda^-]$  分别表示系数矩阵  $[\mathbf{Z}]$  的特征向量矩阵和两个特征值矩阵(这两个矩阵均为对角阵,对角元为特征值,前者对应的特征值实部为正,后者对应的特征值实部为负)。由于Hamilton矩阵特征值是成对出现的,因此  $[\Lambda^+]$  和  $[\Lambda^-]$  维数相等,对于特征值为0的情形,对应于刚体位移模式,采用这种方法求解就需要进行特殊处理<sup>[10,11]</sup>,这里暂不考虑这种情形。计算边界刚度时,可令  $\xi = 1$ ,即  $s = 0$ 。对无限域问题,为了满足无限远处( $\xi = \infty$ ,  $s = \infty$ )的Sommerfeld条件,应令实部为正的 eigenvalue 所对应的系数  $\{\mathbf{c}_1\} = \{0\}$ ,则根据式(22),边界静力刚度  $\mathbf{K}^\infty$  可由特征向量表示为

$$\mathbf{K}^\infty = \Psi_{22}(\Psi_{12})^{-1} \quad (23)$$

对于有限域问题,为了满足原点处( $\xi = 0$ ,  $s = -\infty$ )位移有限的条件,应令实部为负的特征

值所对应的系数  $\{\mathbf{c}_2\} = \{0\}$ ,则由式(22),边界静力刚度  $\mathbf{K}^b$  为

$$\mathbf{K}^b = \Psi_{21}(\Psi_{11})^{-1} \quad (24)$$

#### 4.2 计算静力边界刚度的精细积分方法

关于边界静力刚度矩阵的导出及其精细积分方法,由于篇幅有限,这里只给出简单描述,具体细节请见文献[1]中第5章。首先,对某一区段  $[\xi_a, \xi_b]$ ,由区段端点的位移求出区段总势能,再利用Legendre变换得到内力对偶变量,并求出混合能密度函数,即Hamilton函数,然后根据Hamilton变分原理求出混合变量所满足的正则方程组。如果以  $\mathbf{u}_a$  和  $\mathbf{p}_b$  为变量,正则方程组为

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_b &= \mathbf{F}\mathbf{u}_a + \mathbf{G}\mathbf{p}_b + \mathbf{r}_b \\ \mathbf{p}_a &= -\mathbf{Q}\mathbf{u}_a + \mathbf{F}^T\mathbf{p}_b + \mathbf{r}_a \end{aligned} \quad (25)$$

如果以  $\mathbf{u}_a$  和  $\mathbf{p}_b$  为变量,正则方程组为

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_a &= \mathbf{F}\mathbf{u}_b - \mathbf{G}\mathbf{p}_a + \mathbf{r}_a \\ \mathbf{p}_b &= \mathbf{Q}\mathbf{u}_b + \mathbf{F}^T\mathbf{p}_a - \mathbf{r}_b \end{aligned} \quad (26)$$

式中  $(\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_b)$  和  $(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b)$  是区段  $[\xi_a, \xi_b]$  两端的位移和节点力;  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$  和  $\mathbf{Q}$  是传递矩阵,与外荷载无关,其中  $\mathbf{Q}$  表示刚度矩阵;  $\mathbf{r}_a$  和  $\mathbf{r}_b$  分别表示区段混合能在区段两端部的非齐次项,由区段内的外荷载产生。这些变量的含义与文献[1]中第5章的变量含义完全相同。

##### 4.2.1 无限域地基刚度的导出及求解

对于无限域,可把  $a$  端的刚度阵看作边界刚度,这样可选择对偶关系式(25)进行求解。此时假定在微小区段  $[\xi_a, \xi_b]$  内,在  $b$  端  $\mathbf{u}_b$  和  $\mathbf{p}_b$  不变,  $a$  端  $\mathbf{u}_a$  和  $\mathbf{p}_a$  随  $\xi_a$  的变化而变化,通过不断地进行区段合并可得到无限地基边界静力刚度。对方程(25)两侧关于  $\xi_a$  进行微分,可得

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi_a} \mathbf{u}_a + \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{u}_a}{\partial \xi_a} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \xi_a} \mathbf{p}_b + \frac{\partial \mathbf{r}_b}{\partial \xi_a} \\ \frac{\partial \mathbf{p}_a}{\partial \xi_a} &= -\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \xi_a} \mathbf{u}_a - \mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{u}_a}{\partial \xi_a} + \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial \xi_a} \mathbf{p}_b + \frac{\partial \mathbf{r}_a}{\partial \xi_a} \end{aligned} \quad (27)$$

由式(16)以及由于  $\mathbf{u}_a$  和  $\mathbf{p}_b$  相当于两端边界条件,可以任意设定<sup>[1]</sup>,从而得到如下微分方程,这里省略了与  $\mathbf{r}_a$  和  $\mathbf{r}_b$  相关的方程。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \xi_a} &= \xi_a^{-2} \mathbf{FDF}^T \\ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi_a} &= \xi_a^{-1} \mathbf{FA} - \xi_a^{-2} \mathbf{FDQ} \end{aligned}$$

$$\xi_a \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \xi_a} = \xi_a \mathbf{B} + \mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A} - \xi_a^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{D} \mathbf{Q} \quad (28)$$

如果将  $\mathbf{Q}$  定义为无限域  $a$  端的边界刚度矩阵, 则根据量纲分析(文献[4]的第 3 章), 通过引入无量纲频率  $\omega_0$  ( $\omega_0 = \omega r / c_s$ ,  $r$  表示边界面的特征长度,  $\omega$  表示圆频率,  $c_s$  表示剪切波波速), 可得无限地基刚度矩阵  $\mathbf{Q}$  的一个性质(文献[4]的(3.12)式),

$$\xi \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \xi} = \mathbf{Q} + \omega \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \omega} \quad (29)$$

当仅考虑静力问题时, 即  $\omega = 0$ , 并令  $\xi_a = 1$ , 则由式(28)第 3 式可得关于无限域边界静力刚度  $\mathbf{K}^\infty$  的控制方程,

$$(\mathbf{E}^1 (\mathbf{E}^0)^{-1} (\mathbf{E}^1)^T - \mathbf{E}^2) + \mathbf{E}^1 (\mathbf{E}^0)^{-1} \mathbf{K}^\infty + \mathbf{K}^\infty (\mathbf{E}^0)^{-1} (\mathbf{E}^1)^T + \mathbf{K}^\infty (\mathbf{E}^0)^{-1} \mathbf{K}^\infty - \mathbf{K}^\infty = 0 \quad (30)$$

式(30)与文献[4-6]中相应的控制方程形式相同(文献[4](8.8)式)。该方程为代数 Riccati 方程, 可采用精细积分方法<sup>[1]</sup>进行求解。

#### 4.2.2 有限域地基刚度的导出及求解

对于有限域, 可把  $b$  端的刚度阵看作边界刚度, 可选择对偶关系式(26)进行求解。此时假定在微小区段  $[\xi_a, \xi_b]$  内  $a$  端  $\mathbf{u}_a$  和  $\mathbf{p}_a$  不变,  $b$  端  $\mathbf{u}_b$  和  $\mathbf{p}_b$  随  $\xi_b$  的变化而变化, 通过不断地进行区段合并可得到有限域边界( $\xi = 1$  处的边界)静力刚度矩阵。对式(26)两侧关于  $\xi_b$  进行微分, 并根据与第 4.2.1 同样的方法, 以及  $\mathbf{u}_b$  和  $\mathbf{p}_a$  相当于两端边界条件, 可以任意设定<sup>[1]</sup>, 从而得到如下微分方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \xi_b} &= -\xi_b^{-2} \mathbf{F} \mathbf{D} \mathbf{F}^T \\ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi_b} &= \xi_b^{-1} \mathbf{F} \mathbf{A} + \xi_b^{-2} \mathbf{F} \mathbf{D} \mathbf{Q} \\ \xi_b \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \xi_b} &= -\xi_b \mathbf{B} + \mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A} + \xi_b^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{D} \mathbf{Q} \quad (31) \end{aligned}$$

如果将  $\mathbf{Q}$  定义为有限域  $b$  端的边界刚度矩阵, 则根据量纲分析, 有限域刚度矩阵  $\mathbf{Q}$  也满足式(29), 进而由式(31)中第 3 式可得到有关有限域边界静力刚度矩阵  $\mathbf{K}^b$  (取  $\xi_b = 1, \omega = 0$ ) 的控制方程。

$$-(\mathbf{E}^1 (\mathbf{E}^0)^{-1} (\mathbf{E}^1)^T - \mathbf{E}^2) + \mathbf{E}^1 (\mathbf{E}^0)^{-1} \mathbf{K}^b + \mathbf{K}^b (\mathbf{E}^0)^{-1} (\mathbf{E}^1)^T - \mathbf{K}^b (\mathbf{E}^0)^{-1} \mathbf{K}^b - \mathbf{K}^b = 0 \quad (32)$$

式(32)与文献[4-6]中关于有限域边界静力刚度矩阵的控制方程形式相同。该方程组也是代数 Riccati 方程, 可采用精细积分方法<sup>[1]</sup>进行求解。

## 5 数值算例

### 5.1 无限域 / 有限域三维长方体基坑

#### 表面的静力刚度计算

本算例分别计算了半空间长方体基坑无限域表面的竖向静力刚度  $\mathbf{K}^\infty$  和相应长方体有限域表面的竖向静力刚度矩阵  $\mathbf{K}^b$ 。在  $\mathbf{K}^\infty$  和  $\mathbf{K}^b$  的求解时, 均只对长方体表面进行离散, 由于只计算竖向刚度及结构对称, 因此计算模型可取计算域的 1/4, 并且将对称面的法向位移均进行约束, 模型及边界网格剖分如图 3 所示。相似中心选择在坐标系的原点处。基坑的几何参数为  $b = 1 \text{ m}$ ,  $e = 1 \text{ m}$ , 材料参数为: 弹性模量  $2.37 \text{ Pa}$ , 泊松比为  $0.185$ , 剪切模量为  $1 \text{ Pa}$ , 质量密度为  $1 \text{ kg/m}^3$ 。

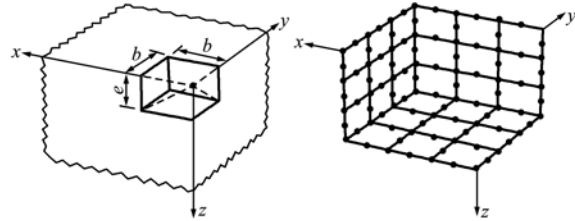
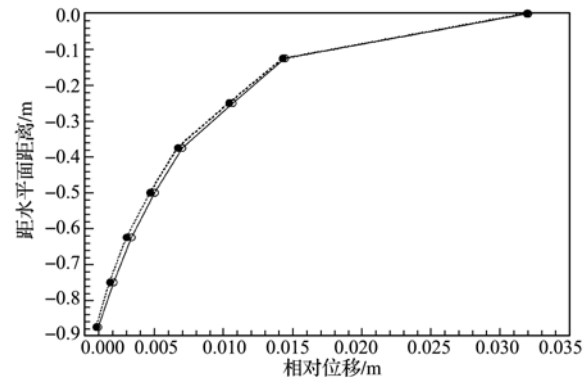
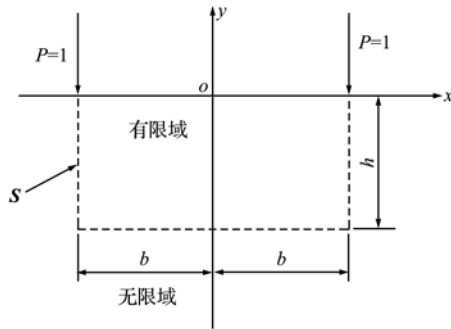


图 3 长方体基坑表面(取 1/4)及其有限元离散  
Fig. 3 The square prism embedded in homogeneous half space and the discretization on the surface of prism

采用第 4 节中的特征向量法和精细积分方法进行计算, 计算结果表明, 两种方法得到的无限域与有限域边界刚度矩阵完全相同, 并与文献[4]提出的特征向量展开方法所得计算结果也是相同的。

### 5.3 二维半空间表面作用集中荷载

计算模型如图 4 所示, 其中  $h = 1 \text{ m}$ ,  $b = 1 \text{ m}$ 。地基弹性模量为  $30 \text{ Pa}$ , 泊松比  $0.3$ , 在半空间( $y \leq 0$ )的自由表面上作用两个竖向集中荷载(荷载值均为  $1 \text{ N}$ ), 作用点分别为  $(-1, 0)$  和  $(1, 0)$ 。如第一节所述, 这一问题的系数矩阵  $\mathbf{Z}$  式(18)存在零特征值, 且零特征值所对应的特征向量中出现约当型。采用精细积分方法可以直接求出二维有限域和无限域的边界静力刚度。图 4 给出了本文方法和 Deeks 等提出的方法<sup>[10]</sup>计算得到的  $x = 1$  边界上各节点相对于边界  $S$  的右下角点  $(1, -1)$  的沉降变形随深度的变化。由图 4 可见两种方法计算结果总体上比较接近, 这说明采用精细积分方法得到的有限域和无限域的边界刚度具有较好的精度。

图4 计算模型及在  $x = 1$  边界上相对沉降随深度的变化Fig. 4 The model of half space and variation of relative deflection on the boundary  $x = 1$  with the depth

## 6 结 论

本文在 Hamilton 体系框架内,采用比例边界有限元的离散方式,得到了静力情况下的比例边界有限元的控制方程,并提出了采用变量替换将其化成一阶线性常系数常微分方程组的求解方法。对于有限域和无限域的边界静力刚度矩阵的导出和求解,提出了两种方法,一种方法是特征向量法,另一种是利用区段混合能和对偶变量正则方程得到边界刚度的控制方程,然后采用精细积分方法求解。数值算例验证了这两种方法的精度和有效性,其中针对特征向量出现约当型的问题,采用精细积分方法也可求出边界面的静力刚度,这为边界静力刚度的计算提供了新的求解方法。

同时也应看到,在采用精细积分方法求解边界刚度所满足的代数 Riccati 方程时,要进行较多的矩阵求逆或解方程组的运算,因此还需做更多的工作才能将其应用于实际工程中。

### 致 谢

感谢澳大利亚新南威尔士大学土木与环境工程学院宋崇民教授在比例边界有限元基本理论和算法实现方面给予的细心指导,感谢大连理工大学工程力学系高强博士、徐新生教授、姚伟岸教授、吴志刚教授和谭述君博士在弹性力学问题的 Hamilton 求解体系理论与算法实现方面给予的热心指导和帮助。

### 参考文献 (References):

- [1] 钟万勰. 应用力学对偶体系[M]. 北京: 科学出版社, 2003. (ZHONG Wan-xie. *Duality System in Applied Mechanics*[M]. Beijing: Science Press, 2003. (in Chinese))
- [2] 钟万勰. 弹性力学求解新体系[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1995. (ZHONG Wan-xie. *A New Systematic Methodology for Theory of Elasticity* [M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1995. (in Chinese))
- [3] 周建方, 卓家寿. Hamilton 体系下的变分原理和半解析有限元解[J]. 工程力学, 1998, 15(1): 30-38. (ZHOU Jian-fang, ZHUO Jia-shou. Variational principle in Hamiltonian system and Semi-analytical finite element solution[J]. *Gongchenglixue*, 1998, 15(1): 30-38. (in Chinese))
- [4] John P Wolf, Chongmin Song. *Finite-Element Modelling of Unbounded Media* [M]. John Wiley & Sons, 1996.
- [5] Wolf J P. *The Scaled Boundary Finite Element Method*[M]. John Wiley & Sons, 2003.
- [6] Chongmin Song, John P. Wolf, The scaled boundary finite element method-alias consistent infinitesimal finite element cell method for elastodynamics[J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1997, 147: 329-355.
- [7] Song C h, Wolf J P. Semi-analytical representation of stress singularity as occurring in cracks in anisotropic multi-materials with the scaled boundary finite element method[J]. *Comput Struct*, 2002, 80: 183-197.
- [8] Deeks A J, Wolf J P. A virtual work derivation of the scaled boundary finite element method for elastostatics[J]. *Computational Mechanics*, 2002, 28: 489-504.
- [9] 张洪武, 钟万勰, 李云鹏. 基于 Hamilton 原理的两种材料界面裂纹奇异性研究[J]. 固体力学学报, 1996, 1(1): 19-30. (ZHANG Hong-wu, ZHONG Wan-xie,

- LI Yun-peng. The interface crack singularity analysis of the bimaterial body based on Hamilton Principle [J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1996, **1**(1):19-30. (in Chinese))
- [10] Deeks A J, Wolf J P. Semi-analytical elastostatic analysis of unbounded two dimensional domains [J]. *Int J Numer Anal Methods Geomech*, 2002, **26**:1031-1057.
- [11] Chongmin Song. A matrix function solution for the scaled boundary finite element equation in statics [J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2004, **193**:2325-2356.

## A Hamiltonian-based derivation of scaled boundary finite element method for elasticity

HU Zhi-qiang\*, LIN Gao, WANG Yi, LIU Jun

(Faculty of Infrastructure Engineering, School of Hydraulic Engineering,  
Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

**Abstract:** The scaled boundary finite element method (SBFEM) is a semi-analytical and semi-numerical solution approach for solving partial differential equation. For problem in elasticity, the governing equations can be obtained by mechanically based formulation, Weighted residual formulation and principle of virtual work based on Scaled-boundary-transformation. These formulations are described in the frame of Lagrange system and the unknowns are displacements. In this paper, the discretization of the SBFEM and the dual system to solve elastic problem proposed by W. X. Zhong are combined to derive the governing equations in the frame of Hamilton system by introducing the dual variables. Then the algebraic Riccati equations of the static boundary stiffness matrix for the bounded and unbounded domain are derived based on the hybrid energy and Hamilton variational principle in the interval. The eigen-vector method and precise integration method can be employed to solve the algebraic Riccati equations for static boundary stiffness matrice.

**Key words:** Hamilton system; scaled boundary finite element; mechanics of elasticity; boundary stiffness matrix