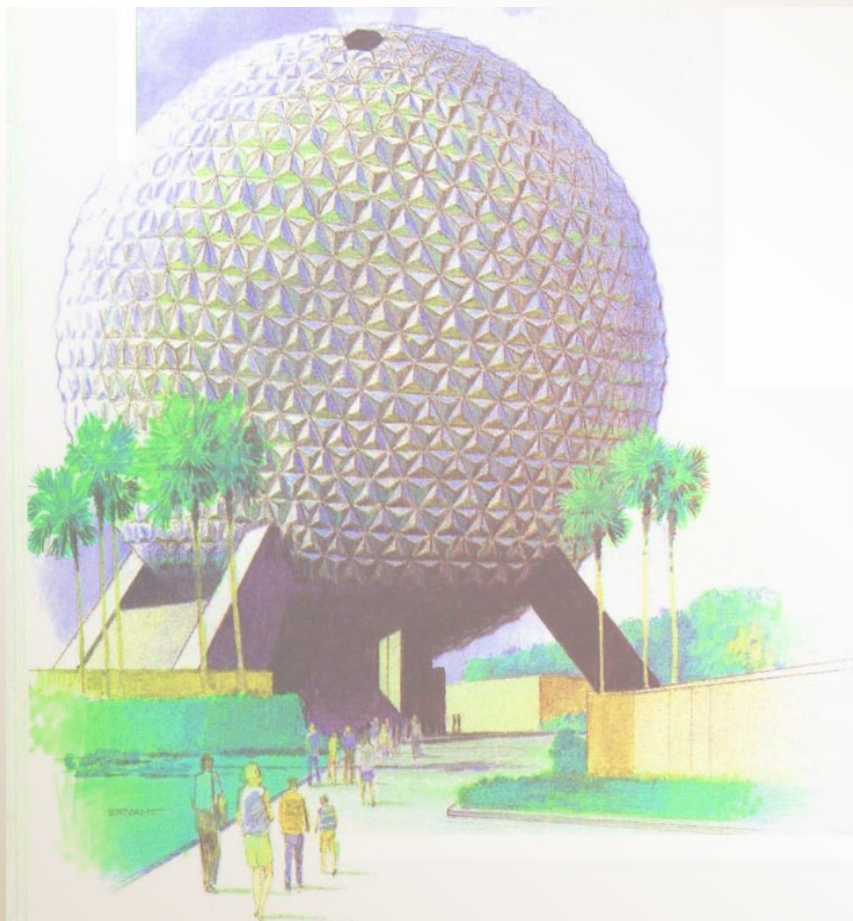


第六章 强度理论

主讲：

力学是数学的乐园，
因为我们在这一里获
得了数学的果实。

—Leonardo de Vinci



第六章 强度理论

本章目的



本章目的

- 总结材料的破坏模式;
- 介绍四种经典的强度理论;
- 建立与强度理论对应的强度条件。

基本要求

- 明确四种强度理论提出的依据, 建立方法;
- 明确四种强度理论的适用范围;
- 掌握四种强度理论相应的强度条件;
- 了解莫尔强度准则及双剪强度理论的应用。

第六章 强度理论

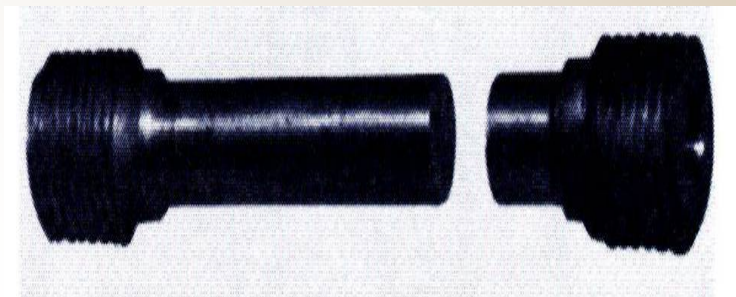
强度理论



1 脆性材料断裂的强度理论

最大拉应力理论（第一强度理论）

铸铁等脆性材料在简单拉伸试验中，材料的断裂面是试件的横截面。这与最大主应力所在的截面一致。由此提出了关于脆性材料的**最大拉应力理论**（或称为第一强度理论）。这一理论认为，最大拉应力是引起材料破坏的主要因素。



铸铁（受拉）

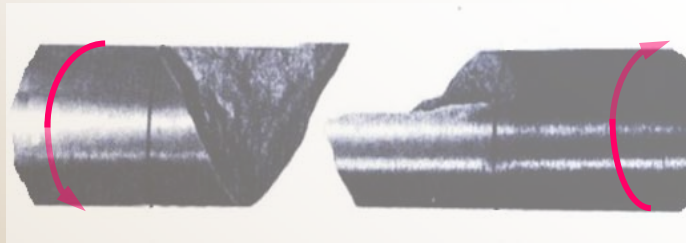
第六章 强度理论
强度理论

破坏条件: $\sigma_1 = \sigma_b$

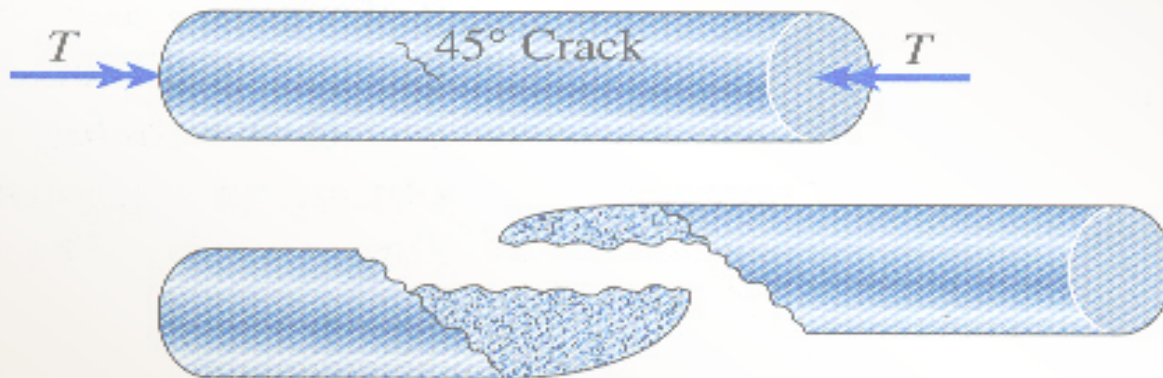
强度条件: $\sigma_1 \leq [\sigma] = \frac{\sigma_b}{n}$

试验表明脆性材料在双向或三向拉伸破坏时，最大拉应力理论预测值与试验结果很接近。当有压应力存在时，只要压应力不超过最大拉应力值，则理论预测也与试验结果大致接近。

脆性材料在纯扭转破坏时，断裂沿 45° 斜截面发生，也就是最大拉应力所在的截面。



第六章 强度理论
强度理论



第六章 强度理论

强度理论



最大拉应变理论（第二强度理论）

第一强度理论没有考虑其他两个主应力 σ_2 和 σ_3 的影响。也不能解释压应力下材料的破坏。

最大拉应变理论认为，不论在什么应力状态下，最大拉应变 ε_1 是引起材料破坏的主要原因。

第六章 强度理论
强度理论

最大拉应变理论 (第二强度理论)

在单向拉伸试验中, 材料破坏时发生的最大拉伸应变值为

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_b}{E} \quad \text{这是一材料常数}$$

在一般应力状态下, 根据广义胡克定律, 最大拉应变可以表示为

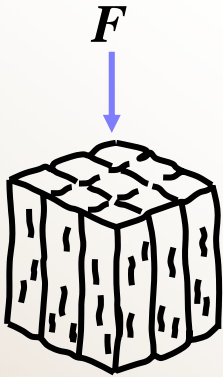
$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

破坏条件 $\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_b$

强度条件 $\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma] = \frac{\sigma_b}{n}$

第六章 强度理论
强度理论

最大拉应变理论（第二强度理论）



混凝土块受压

$$\sigma_3 = -\frac{F}{A}, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 0$$

如果用第一强度理论，则不论压力 F 多大，其强度条件 $\sigma_1=0 < [\sigma]$ 永远满足，即该理论预测材料永远不会破坏，这显然与实际不符。

如果用第二强度理论，破坏条件为

$$[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{\mu F}{A} = \sigma_b$$

这一理论预测与实验结果大体相符。

第六章 强度理论

强度理论



将第一、第二强度理论的强度条件表示为

$$\sigma_{r1} = \sigma_1 \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]$$

σ_{r1} , σ_{r2} 分别称为第一、第二强度理论的相当应力

第六章 强度理论
强度理论

最大歪形能理论 (第四强度理论)

形状改变应变比能

$$u_d = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

单向拉伸实验时

$$u_d = \frac{1+\mu}{6E} (2\sigma_s^2)$$

第四强度理论的屈服(破坏)条件为 (**Mises 屈服准则**)

$$\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sigma_s$$

强度条件 $\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]$

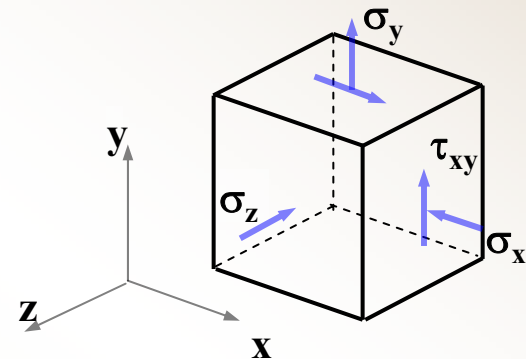
第六章 强度理论
例题

例题

铸铁构件的危险点处应力如图所示。其中 $\sigma_x = -10\text{MPa}$, $\tau_{xy} = 10\text{MPa}$, $\sigma_y = 20\text{MPa}$, $\sigma_z = -5\text{MPa}$, 如果材料的许用应力 $[\sigma] = 30\text{MPa}$, 校核构件的强度。

解: 在 $x-y$ 平面内

$$\begin{aligned}\sigma^{I,II} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= \frac{-10 + 20}{2} \text{MPa} \pm \sqrt{\left(\frac{-10 - 20}{2}\right)^2 + 10^2} \text{MPa} \\ &= \begin{cases} 23.03 & \text{MPa} \\ -13.03 & \text{MPa} \end{cases}\end{aligned}$$



$$\sigma_1 = 23.03\text{MPa}, \quad \sigma_2 = \sigma_z = -5\text{MPa}, \quad \sigma_3 = -13.03\text{MPa}.$$

由于最大拉应力值大于压应力值, 可以用第一强度理论校核。
既然 $\sigma_1 = 23.03\text{MPa} < [\sigma] = 30\text{MPa}$, 该构件满足强度条件。

第六章 强度理论
例题

例题

试在下列各情况下应用不同的强度理论，设计受扭薄壁圆筒的壁厚（设壁中面直径相同）。

(1) 材料为铸铁，许用拉、压应力之比 $[\sigma]^+ / [\sigma]^- = \mu = 1/4$;

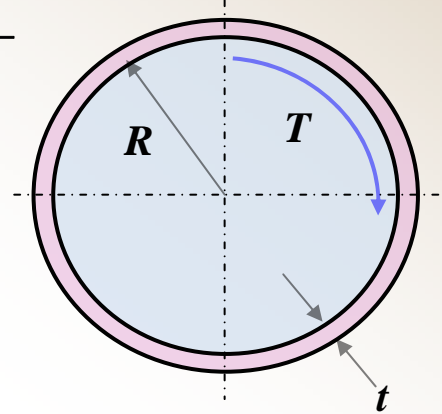
(2) 材料为Q235钢。

解：薄壁圆筒处于纯剪状态。

$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau. \quad \tau = \frac{T}{2\pi R^2 t}$$

(1) 铸铁可用第一，第二强度理论。

$$\sigma_{r1} = \sigma_1 = \tau = \frac{T}{2\pi R^2 t} \leq [\sigma]^+, \quad \therefore t \geq \frac{T}{2\pi R^2 [\sigma]^+}$$



第六章 强度理论
例题

例题

$$\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = (1 + \mu)\tau = \frac{(1 + \mu)T}{2\pi R^2 t} \leq [\sigma]^+, \quad \therefore t \geq \frac{5}{4} \times \frac{T}{2\pi R^2 [\sigma]^+}$$

第一和第二强度理论得到的壁厚之比为 1: 1.25。

(2) 低碳钢可用第三, 第四强度理论。

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau = \frac{2T}{2\pi R^2 t} \leq [\sigma], \quad \therefore t \geq \frac{T}{\pi R^2 [\sigma]}$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}[\tau^2 + \tau^2 + (2\tau)^2]} = \sqrt{3}\tau = \frac{\sqrt{3}T}{2\pi R^2 t} \leq [\sigma], \quad \therefore t \geq \frac{\sqrt{3}T}{2\pi R^2 [\sigma]}$$

第三和第四强度理论得到的壁厚之比为 1: 0.866。

第六章 强度理论
例题

例题

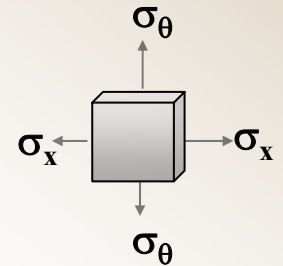
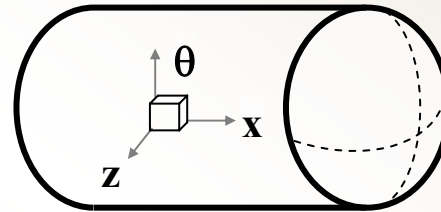
圆筒型薄壁压力容器，内部储存压力为 p 的气体。圆筒的中面的直径为 D ，容器壁的厚度为 t 。忽略容器的自重，根据第三和第四强度理论求许用压力 $[p]$ 。

$$\sigma_x = \frac{pD}{4t} \quad \sigma_\theta = \frac{pD}{2t}$$

$$\sigma_1 = \sigma_\theta, \quad \sigma_2 = \sigma_x = \frac{\sigma_\theta}{2}, \quad \sigma_3 = 0$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_\theta - 0 = \frac{pD}{2t} \leq [\sigma]$$

第三强度理论确定的许用压力



$$[p] = \frac{2t[\sigma]}{D}$$



第六章 强度理论

例题

例题

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_{\theta} - \sigma_x)^2 + (\sigma_{\theta})^2 + (\sigma_x)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{\theta} = \frac{\sqrt{3}pD}{4t} \leq [\sigma]$$

第四强度理论确定的许用压力

$$[p] = \frac{4t[\sigma]}{\sqrt{3}D}$$

可见用第三强度理论得到的许用压力小于第四强度理论的值，第三强度理论偏保守。



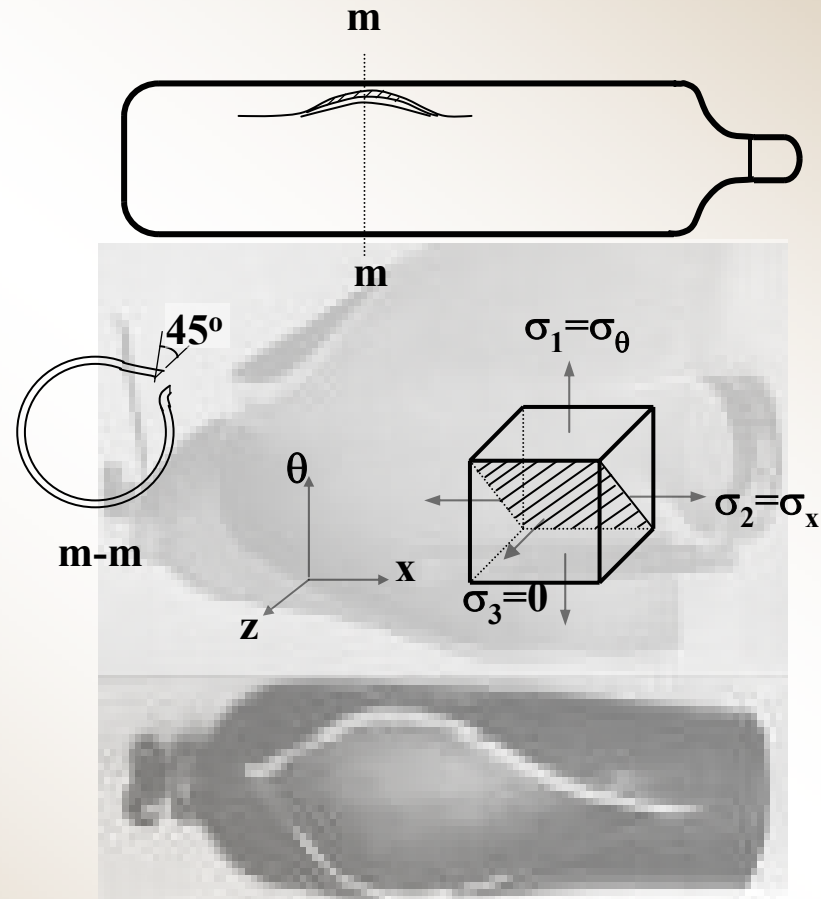
第六章 强度理论

例题



例题

薄壁储气瓶的破坏试验发现，断口的截面接近与外表面成 45° ，从而证实了最大切应力是材料破坏的原因。





第六章 强度理论

塑性屈服面

现在以主应力 σ_1 , σ_2 , σ_3 为坐标轴, 建立一个主应力空间 (注: 这一节将不以代数值的的大小给 σ_1 , σ_2 , σ_3 排序)。

既然物体内部一点的应力状态可以由主应力完全确定, 显然, 主应力空间中的一点代表了唯一的应力状态。

注意到前面所讲的塑性屈服准则, 公式(6-6)和(6-8)的左边都是主应力的函数。它们可以归结为

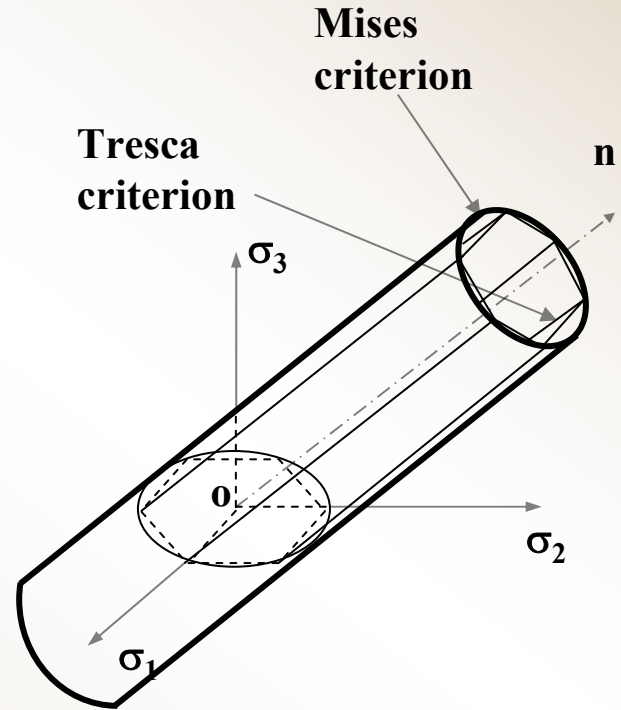
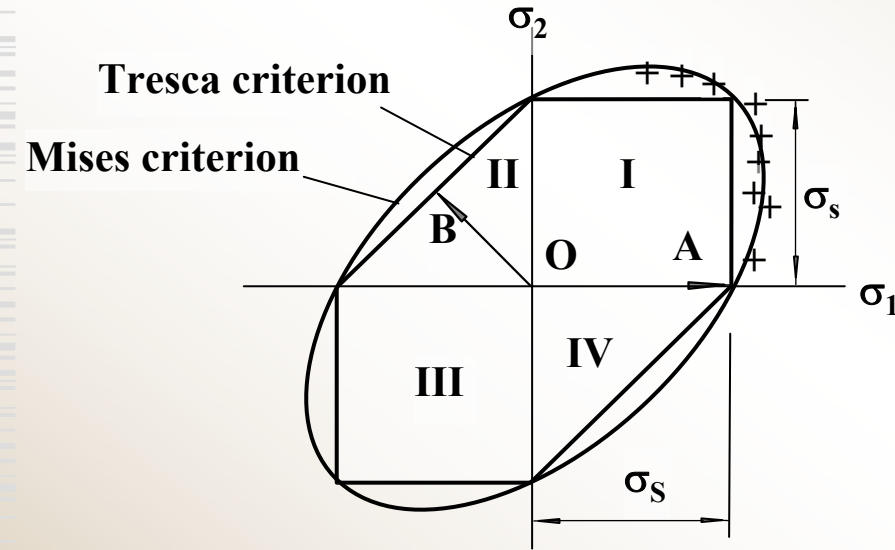
$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_s$$

方程右边是屈服极限。这个方程构成一个以主应力为坐标的空间曲面。如果其中一个坐标取零值, 则退化为一平面曲线。

先看Tresca屈服条件的几何表示。



第六章 强度理论
塑性屈服面



Tresca 屈服条件

$$\sigma_{\max} - \sigma_{\min} = \sigma_S$$

Mises屈服条件

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_S^2$$



第六章 强度理论

例题

利用第三和第四强度理论建立纯剪切应力状态的强度条件，并推导塑性材料的许用切应力 $[\tau]$ 和许用拉应力 $[\sigma]$ 间的关系。

解：纯剪切应力状态时主应力为

$$\sigma_1 = \tau \quad , \quad \sigma_2 = 0 \quad , \quad \sigma_3 = -\tau$$

按照第三强度理论，纯剪切时强度条件可以写成

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \tau - (-\tau) = 2\tau \leq [\sigma]$$

或者
$$\tau \leq \frac{[\sigma]}{2} = 0.5[\sigma]$$

上式表示许用切应力为

$$[\tau] = 0.5[\sigma]$$



第六章 强度理论

例题

根据第四强度理论，纯剪切时强度条件可以写成

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{3}\tau \leq [\sigma]$$

或者

$$\tau \leq \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}$$

可以认为纯剪切时，许用切应力为

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \approx 0.577[\sigma]$$





第六章 强度理论

例题

利用第一和第二强度理论建立纯剪切应力状态的强度条件，并推导脆性材料的许用切应力 $[\tau]$ 和许用拉应力 $[\sigma]$ 间的关系。

解：

按照第一强度理论，纯剪切时的强度条件为

$$\sigma_1 = \tau \leq [\sigma]$$

可以认为纯剪切时，许用切应力为

$$[\tau] = [\sigma]$$



第六章 强度理论

例题

由第二强度理论，纯剪切时强度条件可以写成

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = \tau - \mu(0 - \tau) = (1 + \mu)\tau \leq [\sigma]$$

所以纯剪切时，许用切应力为

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{1 + \mu}$$

如果泊桑比 $\mu=0.25$ ，那么可以取 $[\tau] = 0.8[\sigma]$ 。





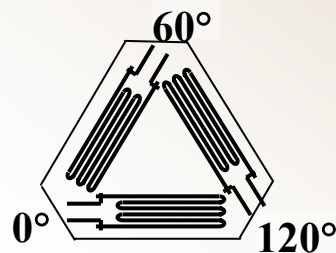
第六章 强度理论

例题

由三个应变片互相成 60° 放置在应变花，贴在铸铁构件的危险点处。构件受力时测出三个方向的应变为 $\varepsilon_0 = -3.67 \times 10^{-3}$ ， $\varepsilon_{60} = 1.32 \times 10^{-3}$ ， $\varepsilon_{120} = -7.89 \times 10^{-4}$ 。材料的拉伸强度极限为 $\sigma_b = 200 \text{ MPa}$ ，弹性模量 $E = 70 \text{ GPa}$ ，泊松比 $\mu = 0.25$ 。试用第二强度理论计算所测试构件的安全储备量。

解： 60° 应变花的主应变

$$\begin{cases} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{cases} = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_{60} + \varepsilon_{120}}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_0 - \varepsilon_{60})^2 + (\varepsilon_{60} - \varepsilon_{120})^2 + (\varepsilon_{120} - \varepsilon_0)^2}$$



所以面内的两个主应力为

$$\varepsilon_1 = 1.846 \times 10^{-3}$$

$$\varepsilon_2 = -3.939 \times 10^{-3}$$



第六章 强度理论

例题

根据广义胡克定律,

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_2) \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \mu\sigma_1)$$

$$\sigma^I = \frac{E(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2)}{1 - \mu^2} = 64.3\text{MPa} \quad \sigma^{II} = \frac{E(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1)}{1 - \mu^2} = -259.7\text{MPa}$$

第二强度理论的相当应力

$$\sigma_{r2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = 129.2\text{MPa}$$

$$\text{安全储备量} = \text{强度极限} / \text{工作应力} = \frac{200\text{MPa}}{129.2\text{MPa}} = 1.548$$

第六章 强度理论

拉剪应力状态下塑性材料的强度条件



例题

试根据第三和第四强度理论建立拉剪应力状态下塑性材料的强度条件。

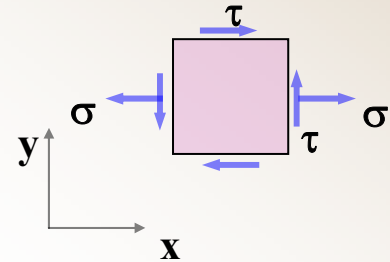
$$\text{解: } \sigma_x = \sigma \quad \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = \tau$$

$$\left. \begin{array}{l} \sigma^{\text{I}} \\ \sigma^{\text{II}} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \left(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right)$$

$$\text{所以 } \left. \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_3 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \left(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right), \quad \sigma_2 = 0$$

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$



第六章 强度理论

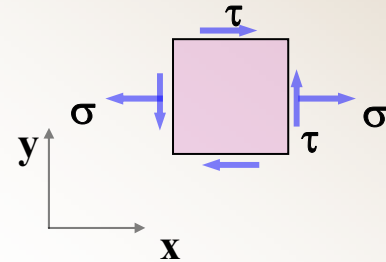
拉剪应力状态下塑性材料的强度条件



所以，根据第三和第四强度理论，拉剪应力状态的强度条件可以分别表示为

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

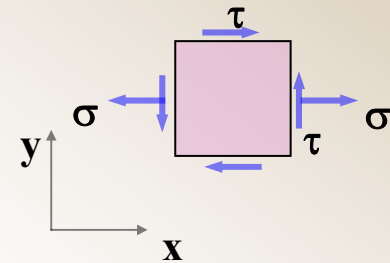


第六章 强度理论

拉剪应力状态下塑性材料的强度条件



图示薄壁圆钢管，其中面直径为 $D = 100\text{mm}$ ，壁厚为 $t = 2\text{mm}$ 。两端受拉力 $F = 80\text{kN}$ 和一对力矩作用 ($T = 1.0\text{kN}\cdot\text{m}$)。材料的许用应力 $[\sigma] = 160\text{MPa}$ ，用第四强度理论校核该钢管的安全性。



解



$$\sigma = \frac{F}{\pi D t} = \frac{80 \times 10^3 \text{ N}}{\pi \times 100 \times 10^{-3} \text{ m} \times 2 \times 10^{-3} \text{ m}} = 127.32 \text{ MPa}$$

$$\tau = \frac{2T}{\pi D^2 t} = \frac{2 \times 1.0 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}}{\pi \times 100^2 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \times 2 \times 10^{-3} \text{ m}} = 31.83 \text{ MPa}$$

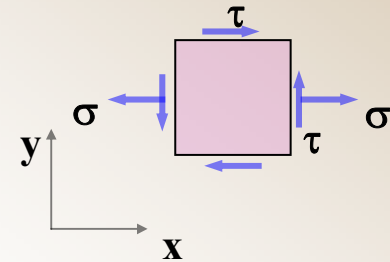
第六章 强度理论

拉剪应力状态下塑性材料的强度条件



$$\begin{aligned}\sigma_{r4} &= \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{127.32^2 + 3 \times 31.83^2} \text{ MPa} \\ &= 138.74 \text{ MPa} < [\sigma]\end{aligned}$$

根据第四强度理论，圆管满足强度条件。



第六章 强度理论

强度理论的选用



通常所谓的塑性材料或脆性材料，是指在常温、静载荷、危险状态为塑性屈服或脆性断裂的材料。事实上，材料的危险状态不仅与材料有关，还与应力状态、温度、变形速度等因素有关。

塑性良好的金属材料，在低温下，或者冲击载荷（高速变形）条件下将导致脆性破坏。

低碳钢在三向拉应力作用下，会发生脆断。

高强度合金在裂纹尖端的局部三向拉应力作用下会发生脆断。

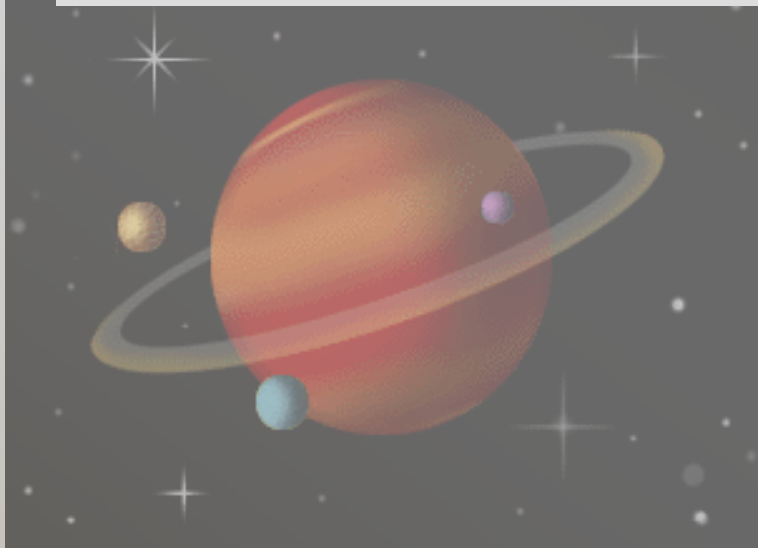
通常的脆性材料在三向压应力作用下也会表现出塑性。



本讲结束
End of This Chapter

谢谢!

宇宙之大，粒子之小，力学无处不在。



Thank You