第九章 弯曲变形

本章目的

本章目的

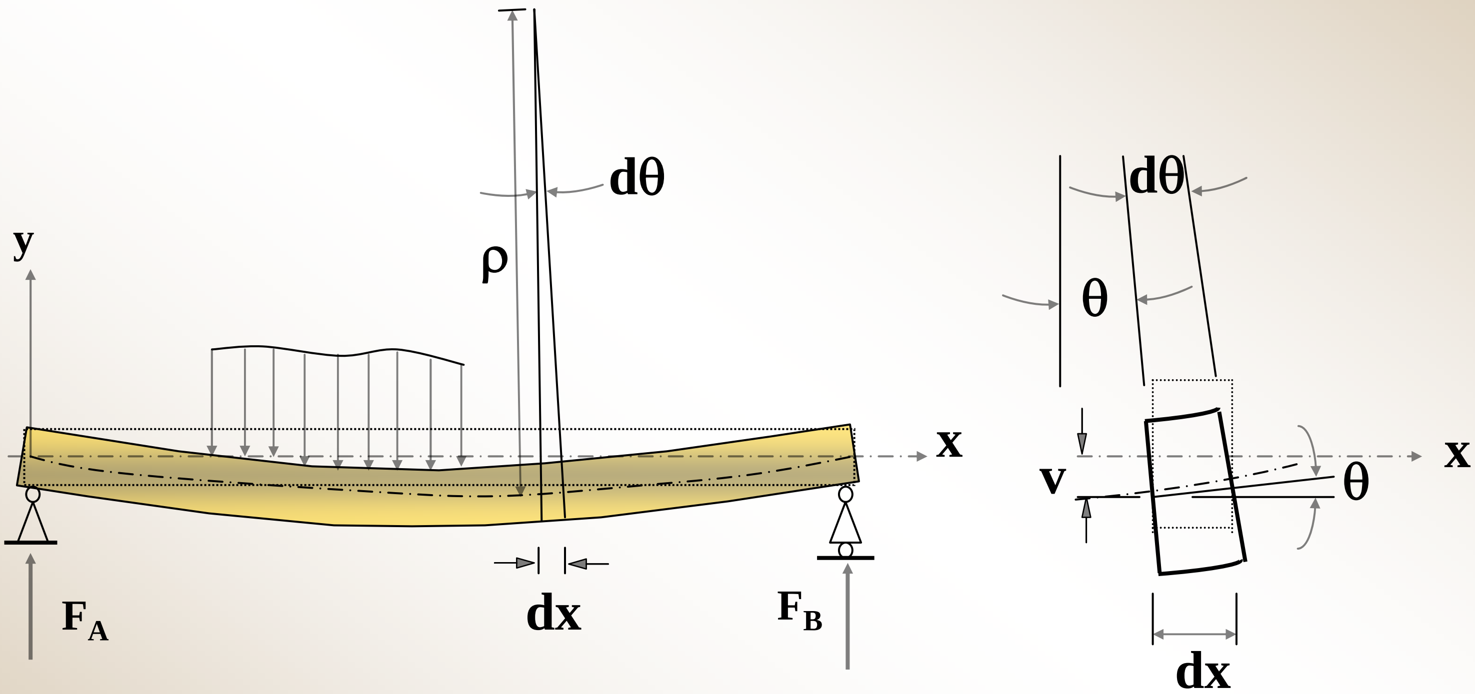
- 建立梁挠曲线近似微分方程及其解法;
- 建立梁的刚度条件;

基本要求

- 明确梁挠曲线、挠度及转角的概念;
- 熟练运用积分法计算梁的变形;
- 了解用叠加法求梁的变形;
- 熟练应用梁的刚度条件;明确提高梁刚度的一些主要措施;
- 掌握用变形比较法求解简单梁超静定问题。

第九章 弯曲变形

基本方程

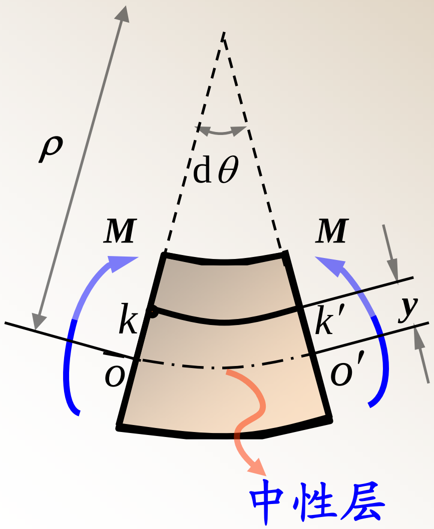


第九章 弯曲变形

基本方程

$$\frac{1}{\rho}=\frac{M_z}{EI_z}$$

$$\frac{1}{\rho(x)}=\frac{\dfrac{d^2v}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dv}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$



因为

$\theta=dv/dx<<1$ 近似: $$\frac{1}{\rho(x)}=\frac{d^2v}{dx^2}$$

基本方程 $$\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{M_z(x)}{EI_z}$$

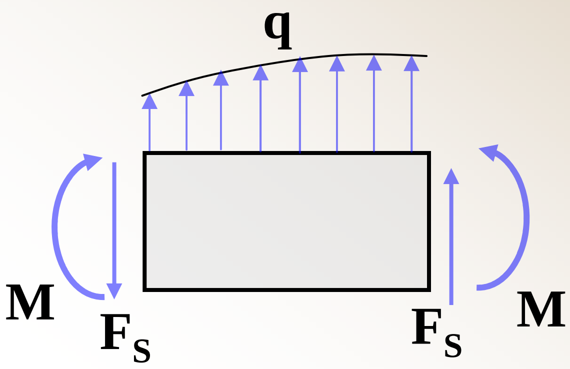
第九章 弯曲变形

基本方程

$$EI_z \frac{d^2v}{dx^2} = M_z(x)$$

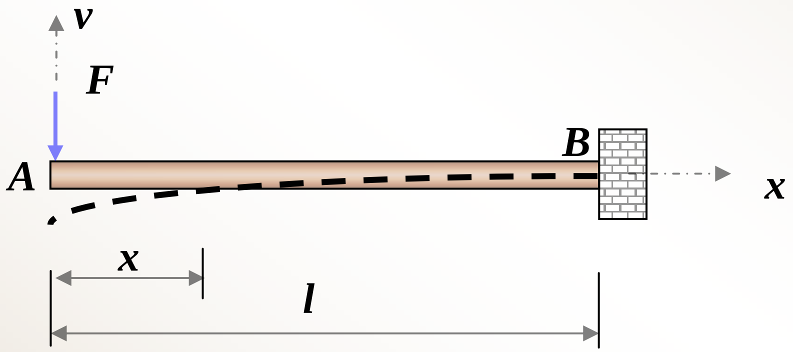
$$\frac{d}{dx}\left(EI_z \frac{d^2v}{dx^2}\right) = -F_S(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI_z \frac{d^2v}{dx^2}\right) = q(x)$$



第九章 弯曲变形

积分法



已知悬臂梁的抗弯刚度为*EI*，确定梁的转角和弹性曲线的方程，并求点A的挠度和转角。

解:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2}=M(x)=-Fx$$

$$EI\frac{dv}{dx}=-\frac{Fx^2}{2}+C_1 \qquad EIv=-\frac{Fx^3}{6}+C_1x+C_2$$

因为$x=l$时，$\frac{dv}{dx}=0,\ v=0$ 所以 $C_1=\frac{Fl^2}{2},\ C_2=-\frac{Fl^3}{3}$

第九章 弯曲变形

积分法

$$\theta = \frac{dv}{dx} = \frac{F}{2EI}(l^2 - x^2)$$

$$v = \frac{F}{6EI}(-x^3 + 3l^2 x - 2l^3)$$

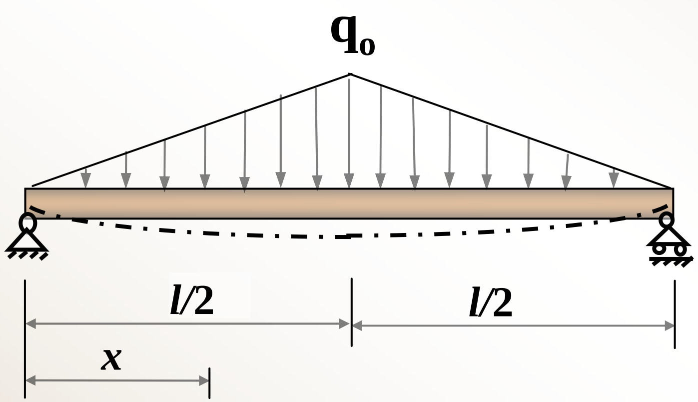
端点A处

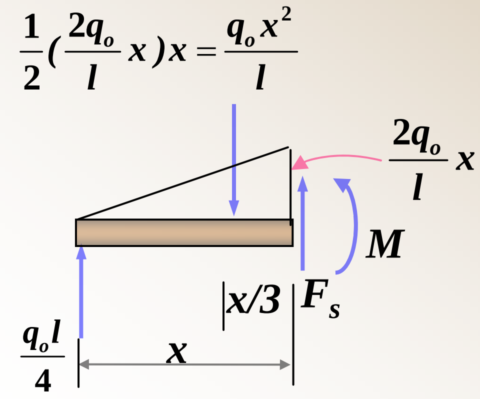
$$\theta_A = \frac{Fl^2}{2EI}$$

$$v_A = -\frac{Fl^3}{3EI}$$

第九章 弯曲变形

积分法





如图所示简支梁承受三角形分布载荷，梁的抗弯刚度为EI，求最大挠度。

解:

$$q(x)=\frac{2q_o}{l}x \qquad M(x)=\frac{q_o l}{4}x-\frac{q_o x^2}{l}\cdot\frac{x}{3}=\frac{q_o l}{4}x-\frac{q_o x^3}{3l}$$

第九章 弯曲变形

积分法

$$EI\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{q_o l}{4}x-\frac{q_o x^3}{3l}$$

$$EI\frac{dv}{dx}=\frac{q_o l}{8}x^2-\frac{q_o x^4}{12l}+C_1$$

$$EIv=\frac{q_o l}{24}x^3-\frac{q_o x^5}{60l}+C_1x+C_2$$

边界条件: $v(0)=0,\quad \left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=l/2}=0$ $\qquad C_1=-\frac{5q_o l^3}{192},\quad C_2=0$

$$EI\frac{dv}{dx}=\frac{q_o l}{8}x^2-\frac{q_o x^4}{12l}-\frac{5q_o l^3}{192}$$

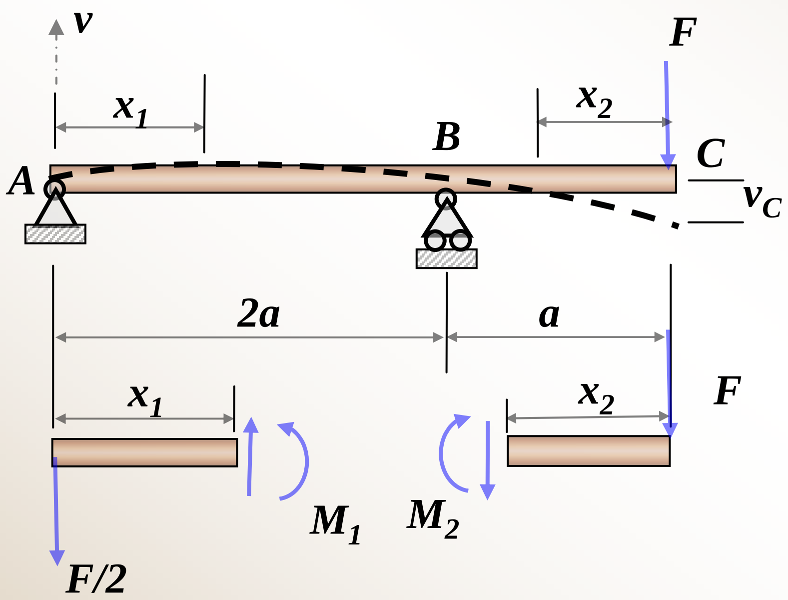
$$EIv=\frac{q_o l}{24}x^3-\frac{q_o x^5}{60l}-\frac{5q_o l^3}{192}x$$

$$v_{max}=-\frac{q_o l^4}{120EI}$$

Ans.

第九章 弯曲变形

分段积分法



如图所示，外伸梁受集中力F作用。已知梁的弯曲刚度EI，求梁的挠度、转角方程。并求C点的挠度。

解：*AB*段与*CB*段分别有

$$M_1 = -\frac{F}{2}x_1 \qquad M_2 = -Fx_2$$

$$EI\frac{d^2v_1}{dx^2} = -\frac{F}{2}x_1 \qquad EI\frac{dv_1}{dx} = -\frac{F}{4}x_1^2 + C_1 \qquad EIv_1 = -\frac{F}{12}x_1^3 + C_1x_1 + C_2$$

$$EI\frac{d^2v_2}{dx^2} = -Fx_2 \qquad EI\frac{dv_2}{dx} = -\frac{F}{2}x_2^2 + C_3 \qquad EIv_2 = -\frac{F}{6}x_2^3 + C_3x_2 + C_4$$

第九章 弯曲变形

分段积分法

边界条件和连续条件:

$$v_1(0)=0;\quad 0=0+0+C_2;\quad C_2=0$$

$$v_1(2a)=0;\quad 0=-\frac{F}{12}(2a)^3+C_1(2a)+C_2;\quad C_1=\frac{Fa^2}{3}$$

$$v_2(a)=0;\quad 0=-\frac{F}{6}(a)^3+C_3a+C_4;$$

$$\frac{dv_1(2a)}{dx_1}=-\frac{dv_2(a)}{dx_2};\quad -\frac{F}{4}(2a)^2+C_1=-[-\frac{F}{2}a^2+C_3];\quad C_3=\frac{7Fa^2}{6}$$

$$C_4=-Fa^3$$

第九章 弯曲变形

分段积分法

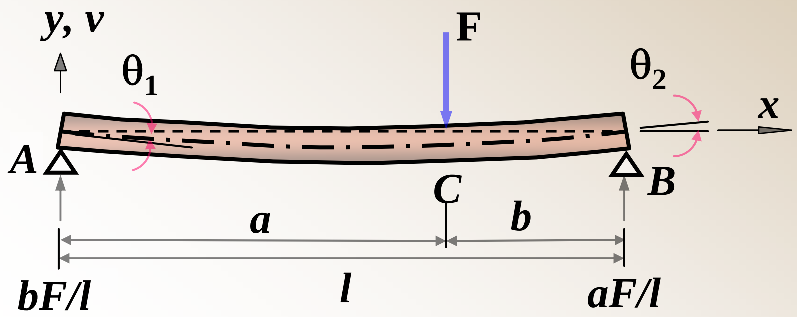
$$v_2 = \frac{1}{EI}\left(-\frac{F}{6}x_2^3 + C_3 x_2 + C_4\right) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{F}{6}x_2^3 + \frac{7Fa^2}{6}x_2 - Fa^3\right)$$

$$v_C = -\frac{Fa^3}{EI}$$ ***Ans.***

第九章 弯曲变形

间断函数法

简支梁受集中力F作用，求梁的挠度、转角方程。C点的挠度。



解:

$$M = \frac{bF}{l} < x - 0 >^1 - F < x - a >^1 \qquad 0 \le x \le l$$

$$EI\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = \frac{bF}{l}x - F < x - a >^1$$

$$EI\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = EI\theta = \frac{bF}{2l}x^2 - \frac{F}{2} < x - a >^2 \quad + C_1$$

第九章 弯曲变形

间断函数法

$$EIv = \frac{bF}{6l}x^3 - \frac{F}{6}< x-a >^3 \quad + C_1 x + C_2$$

梁两端的边界条件为 $v(0) = 0$，$v(l) = 0$。代入上式可得到

$$C_2 = 0$$

$$\frac{bF}{6}l^2 - \frac{Fb^3}{6} + C_1 l = 0, \qquad C_1 = \frac{Fb}{6}(\frac{b^2}{l} - l)$$

$$\theta = \frac{F}{2EI}\left[\frac{b}{3l}(b^2 - l^2 + 3x^2) - < x-a >^2\right]$$

$$v = -\frac{F}{6EI}\left[\frac{bx}{l}(l^2 - b^2 - x^2) + < x-a >^3\right]$$

第九章 弯曲变形

间断函数法

梁端点转角为

$$\theta_A = -\frac{Fab(l+b)}{6EIl} \qquad \theta_B = \frac{Fab(l+a)}{6EIl}$$

C点的挠度为

$$v_c = -\frac{Fa^2b^2}{3EIl}$$

如果力F 作用在梁的中点，那么

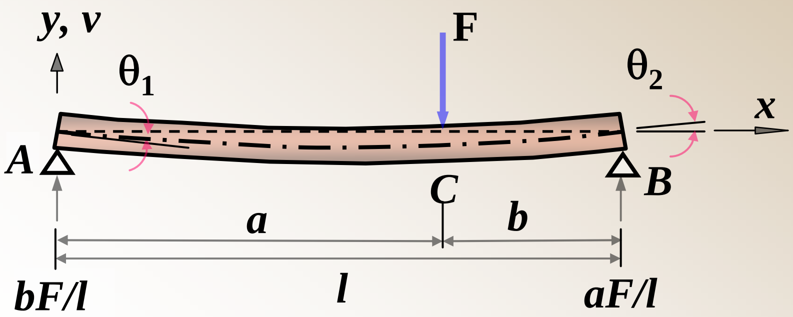
$$v_c = -\frac{Fl^3}{48EI}$$

第九章 弯曲变形

间断函数法

$$\theta = \frac{F}{2EI}\left[\frac{b}{3l}(b^2 - l^2 + 3x^2) - \langle x-a \rangle^2\right]$$

$$v = -\frac{F}{6EI}\left[\frac{bx}{l}(l^2 - b^2 - x^2) + \langle x-a \rangle^3\right]$$



也可以分段表示为

AC段: $\theta = \frac{F}{2EI}\cdot\frac{b}{3l}(b^2 - l^2 + 3x^2)$ $v = -\frac{F}{6EI}\cdot\frac{bx}{l}(l^2 - b^2 - x^2)$

CB段: $$\theta = \frac{F}{2EI}\left[\frac{b}{3l}(b^2 - l^2 + 3x^2) - (x-a)^2\right]$$

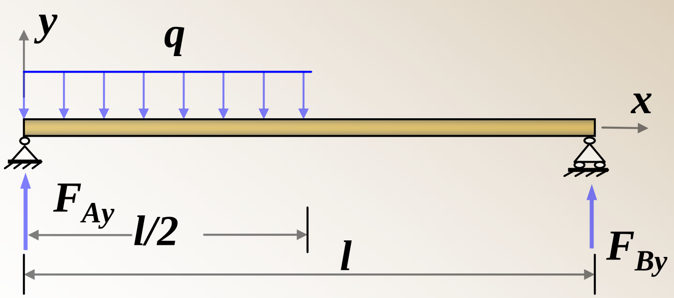
$$v = -\frac{F}{6EI}\left[\frac{bx}{l}(l^2 - b^2 - x^2) + (x-a)^3\right]$$

第九章 弯曲变形

间断函数法

$$M(x)=$$

$$\frac{3ql}{8}<x>^1-\frac{q}{2}<x>^2+\frac{q}{2}<x-\frac{l}{2}>^2$$



$$EI\frac{d^2v}{dx^2}=$$

$$\frac{3ql}{8}<x>^1-\frac{q}{2}<x>^2+\frac{q}{2}<x-\frac{l}{2}>^2$$

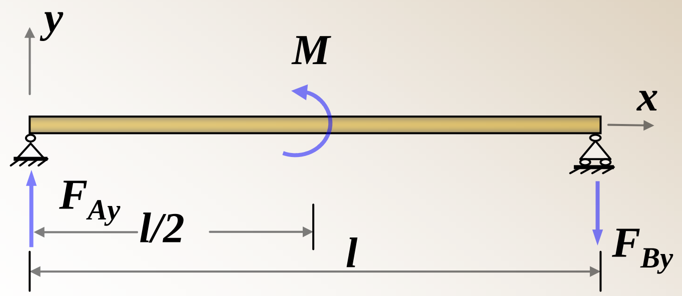
$$EI\frac{dv}{dx}=\frac{3ql}{16}<x>^2-\frac{q}{6}<x>^3+\frac{q}{6}<x-\frac{l}{2}>^3+C_1$$

$$EIv=\frac{ql}{16}<x>^3-\frac{q}{24}<x>^4+\frac{q}{24}<x-\frac{l}{2}>^4+C_1x+C_2$$

$$C_2=0 \qquad C_1=\frac{3ql^3}{16}$$

第九章 弯曲变形

间断函数法



$$EI\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{M}{l}<x>^1-M<x-\frac{l}{2}>^0$$

$$EI\frac{dv}{dx}=\frac{M}{2l}<x>^2-M<x-\frac{l}{2}>^1+C_1$$

$$EIv=\frac{M}{6l}<x>^3-\frac{M}{2}<x-\frac{l}{2}>^2+C_1x+C_2$$

$$C_2=0\qquad C_1=\frac{Ml}{24}$$

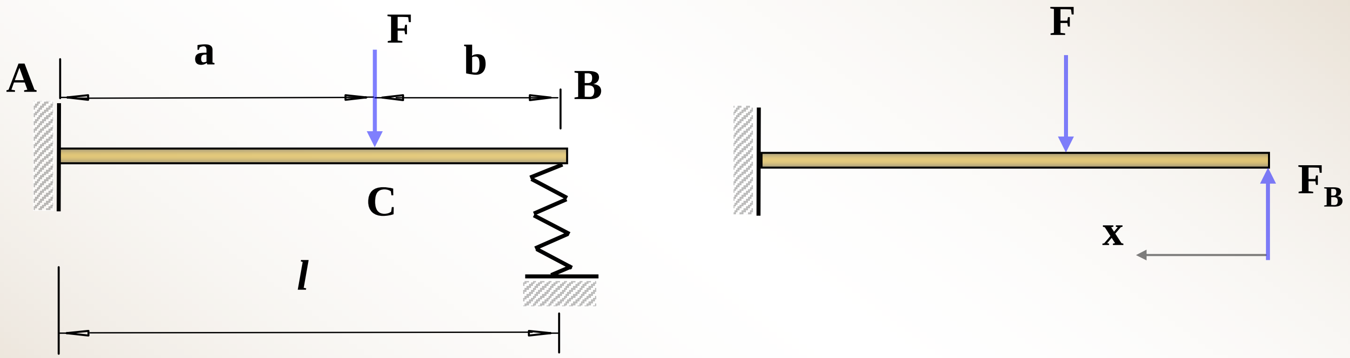
$$\frac{dv}{dx}=\frac{1}{EI}\left\{\frac{M}{2l}<x>^2-M<x-\frac{l}{2}>^1+\frac{Ml}{24}\right\}$$

$$v=\frac{1}{EI}\left\{\frac{M}{6l}<x>^3-\frac{M}{2}<x-\frac{l}{2}>^2+\frac{Ml}{24}x\right\}$$

第九章 弯曲变形

静不定问题

如图所示悬臂梁，自由端*B*由弹簧支承，弹簧刚度为*k*。*C*点有集中力*F* 作用。假设梁的抗弯刚度为*EI*，试求弹簧的支承反力。



解：*x*正方向向左，可以避免*A*端的剪力和弯矩作为未知量出现。

$$EI\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}=M(x)=F_B<x>-F<x-b>$$

第九章 弯曲变形

静不定问题

$$EI\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}F_B<x>^2-\frac{1}{2}F<x-b>^2+C_1$$

$$EIv(x)=\frac{1}{6}F_B<x>^3-\frac{1}{6}F<x-b>^3+C_1x+C_2$$

边界条件：$x=l$ 时 $\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right|_{x=l}=0$ 得到 $C_1=\frac{1}{2}Fa^2-\frac{1}{2}F_Bl^2$

边界条件：$x=l$ 时 $v(l)=0$ 得到 $C_2=\frac{1}{3}F_Bl^3+\frac{1}{6}Fa^2(a-3l)$

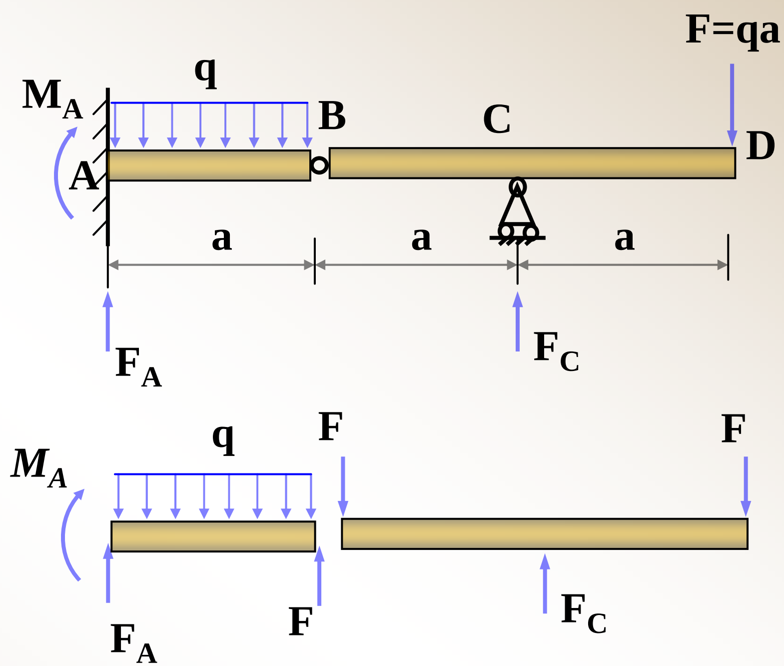
B点的挠度 $v_B=v(0)=\frac{C_2}{EI}=-\frac{F_B}{k}$

将C_2代入上式，得到 $F_B=\dfrac{a^2(3l-a)F}{2l^3+\dfrac{6EI}{k}}$

第九章 弯曲变形

中间铰问题

如图所示铰接外伸梁。A端为固支，B为中间铰，C为动铰支座。AB段有均布力q作用，D端有集中力$F = qa$作用。梁的抗弯刚度为EI，求梁的转角和挠度的表达式。



解:

支座反力为

$$M_A = \frac{qa^2}{2} \qquad F_A = 0 \qquad F_C = 2qa$$

第九章 弯曲变形

中间铰问题

挠度的微分方程为

$$EI\frac{d^2v}{dx^2}=M(x)=\frac{1}{2}qa^2-\frac{1}{2}q\langle x\rangle^2+\frac{1}{2}q\langle x-a\rangle^2+2qa\langle x-2a\rangle$$

应注意，在求转角方程时，铰连接处的转角有一增量$\Delta\theta_B$，需作为待定参数引入：

$$EI\theta(x)=\frac{1}{2}qa^2x-\frac{1}{6}q\langle x\rangle^3+EI\Delta\theta_B\langle x-a\rangle^0+\frac{1}{6}q\langle x-a\rangle^3+qa\langle x-2a\rangle^2+C_1$$

$$EIv(x)=\frac{1}{4}qa^2x^2-\frac{1}{24}q\langle x\rangle^4+EI\Delta\theta_B\langle x-a\rangle^1$$

$$+\frac{1}{24}q\langle x-a\rangle^4+\frac{qa}{3}\langle x-2a\rangle^3+C_1x+C_2$$

第九章 弯曲变形

中间铰问题

固支端的转角和挠度均为零，所以

$$\theta_A = \theta(0) = C_1 = 0 \qquad v_A = v(0) = C_2 = 0$$

C点的挠度为零： $v_C = v(2a) = 0$

所以 $$\Delta\theta_B = -\frac{3}{8EI}qa^3$$

$$EI\theta(x) = \frac{1}{2}qa^2x - \frac{1}{6}q\langle x\rangle^3 - \frac{3}{8}qa^3\langle x-a\rangle^0 + \frac{1}{6}q\langle x-a\rangle^3 + qa\langle x-2a\rangle^2$$

$$EIv(x) = \frac{1}{4}qa^2x^2 - \frac{1}{24}q\langle x\rangle^4 - \frac{3}{8}qa^3\langle x-a\rangle^1 + \frac{1}{24}q\langle x-a\rangle^4 + \frac{qa}{3}\langle x-2a\rangle^3$$

第九章 弯曲变形

叠加法

叠加法计算梁的变形

在小变形条件下，梁内应力不超过材料的比例极限时，梁位移的基本微分方程是:

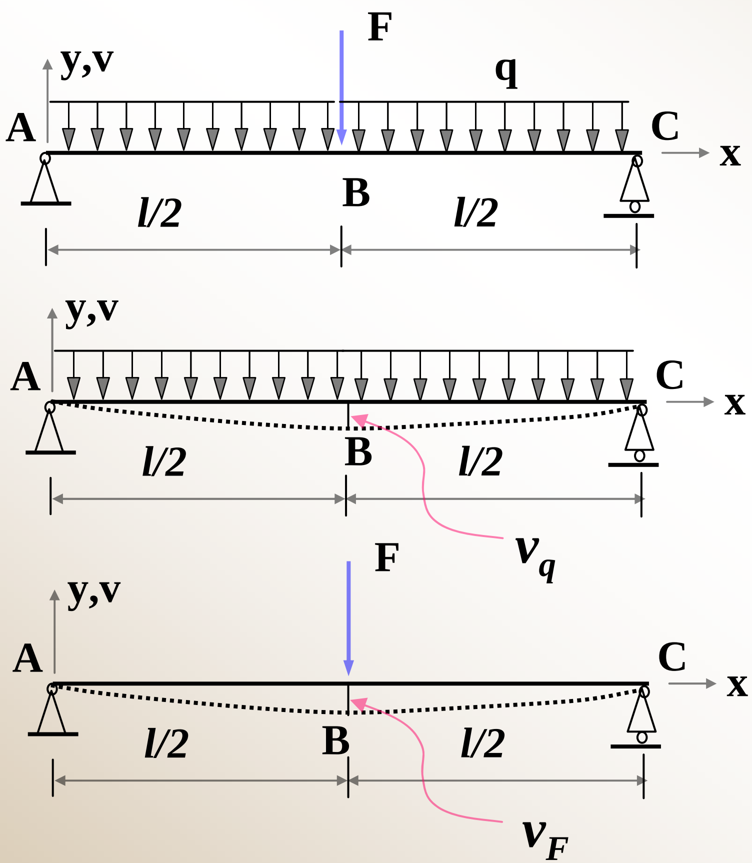
$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

式中弯矩为载荷（集中力、分布力、力偶矩等）的线性齐次函数。当梁上同时有几个载荷作用时的挠度（转角），应该等于各载荷单独作用时的挠度（转角）的线性组合。

第九章 弯曲变形

叠加法

例题

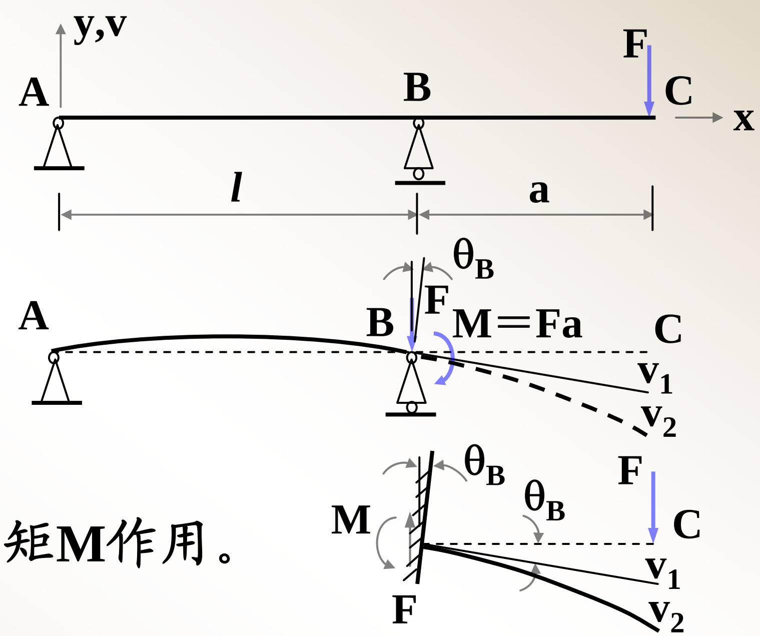


$$v_B = v_q + v_F$$

$$= -\frac{5ql^4}{384EI} - \frac{Fl^3}{48EI}$$

第九章 弯曲变形

叠加法



图示*AC*梁为等截面外伸梁，外伸长度为*a*，*AB*段长度为*l*，抗弯刚度为*EI*，*C*端受*F*力的作用。试求*C*点的挠度v_C。

解：**AB**段的变形，可以将力**F**静力等效到**B**点，相当于简支梁端点受力偶矩**M**作用。

$$\theta_B = -\frac{Ml}{3EI} = -\frac{Fal}{3EI}$$

$$v_1 = a \cdot \tan\theta_B \approx \theta_B a = -\frac{Fa^2 l}{3EI}$$

第九章 弯曲变形

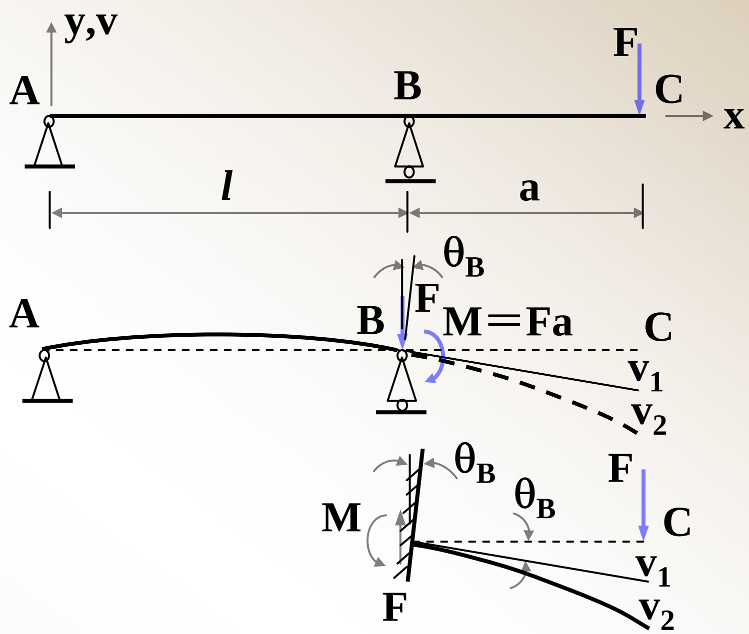
叠加法

*BC*段可以看成是固支于*B*截面的悬臂梁。

$$v_2 = -\frac{Fa^3}{3EI}$$

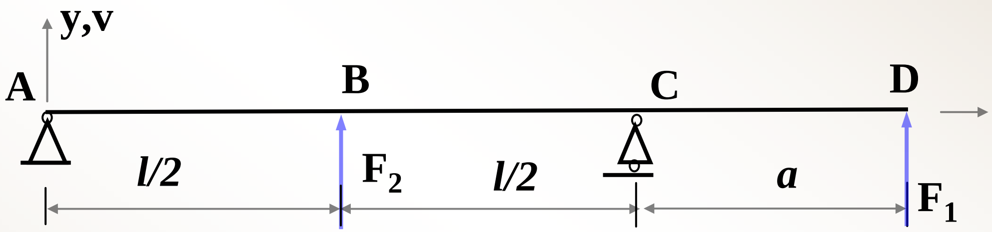
所以*C*点的总挠度为

$$v_C = v_1 + v_2 = -\frac{Fa^2}{3EI}(l + a)$$

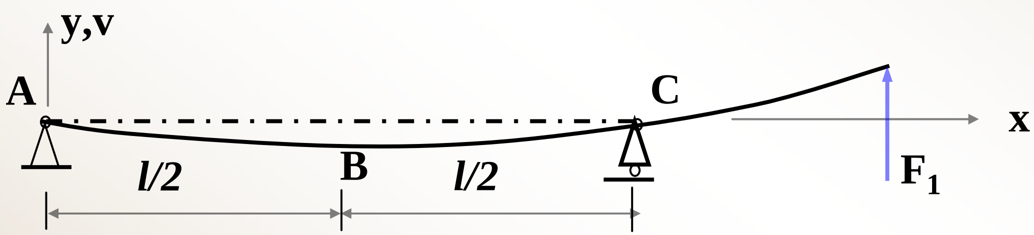


第九章 弯曲变形

叠加法 例题

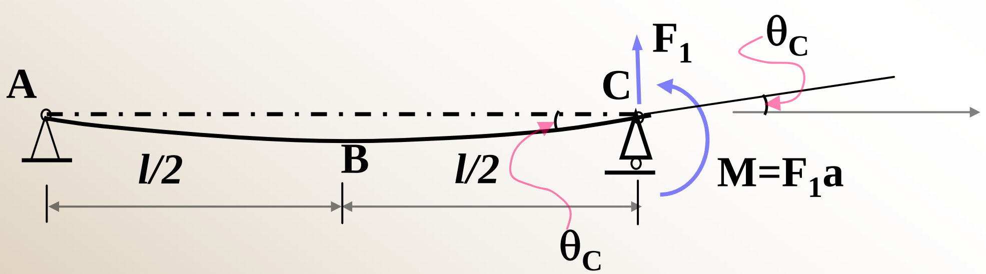


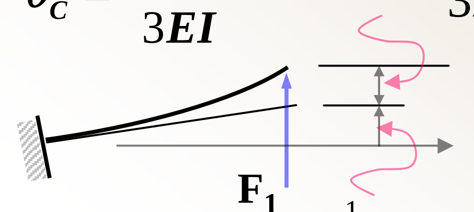
$$v_D=\frac{F_1a^2(a+l)}{3EI}-\frac{F_2l^2a}{16EI}$$



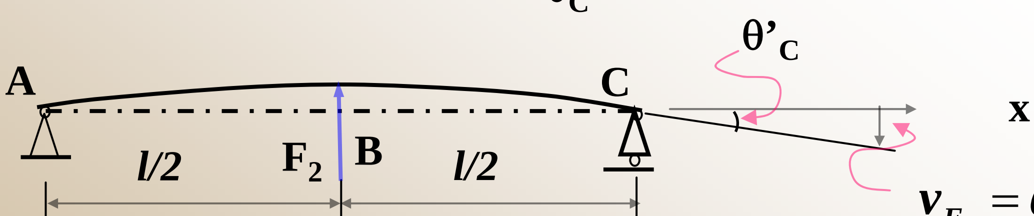
$$\theta_C=\frac{(F_1a)l}{3EI}$$

$${}^{2}v_{F_1}=\frac{F_1a^3}{3EI}$$





$${}^{1}v_{F_1}=\theta_C\cdot a$$



$$v_{F_2}=\theta'_C\cdot a$$

$$\theta'_C=-\frac{F_2l^2}{16EI}$$

第九章 弯曲变形

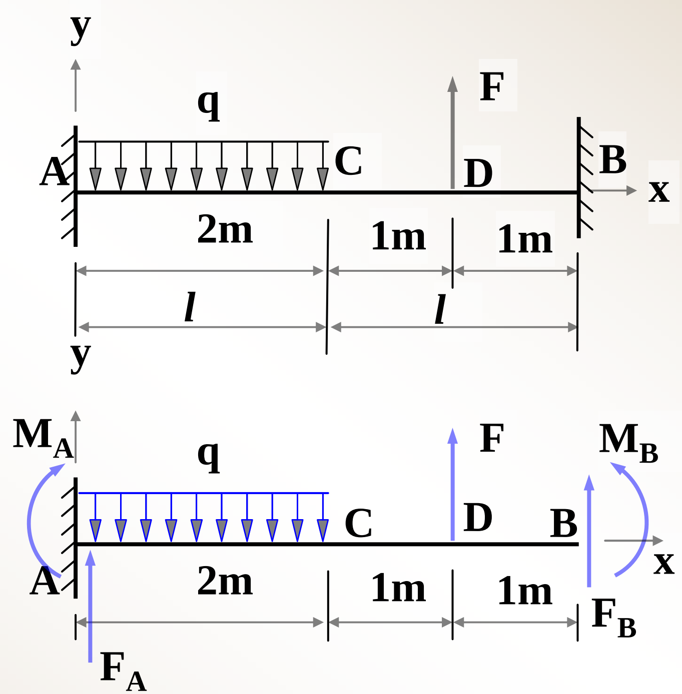
叠加法

如图所示两端固支的梁由10号工字钢制成。已知均布力q=25kN/m，集中力F=50kN，材料的弹性模量E=200GPa，梁截面惯性矩I=245cm^4。

试求梁的内力。

解：

- 这是二次静不定问题。
- 悬臂梁AB为静定基。
- F_B 和M_B为多余约束力。
- 将力F_B和力矩M_B产生的位移叠加，使B端的挠度和转角为零。
- 建立两个关于F_B和M_B的联立方程。



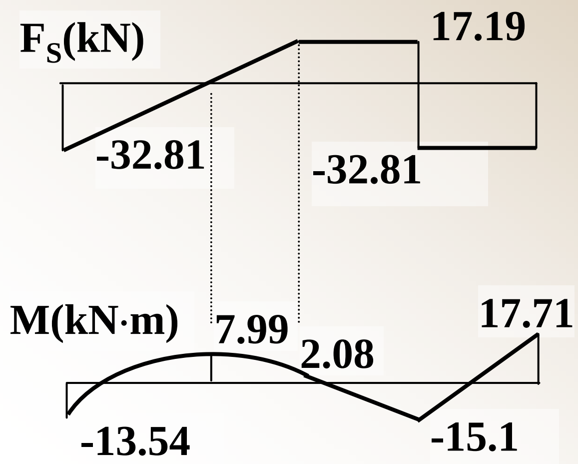
第九章 弯曲变形

叠加法

均布力q单独作用在静定基上，
B点的挠度和转角为

$$v_{Bq}=v_{Cq}+\theta_{Cq}\cdot l=-\frac{ql^4}{8EI}-\frac{ql^3}{6EI}\cdot l=-\frac{7}{24}\frac{ql^4}{EI}$$

$$\theta_{Bq}=\theta_{Cq}=-\frac{ql^3}{6EI}$$



力F单独作用在静定基上，B
点的挠度和转角为

$$v_{BF}=v_{DF}+\theta_{DF}\cdot 0.5l=\frac{F(1.5l)^3}{3EI}+\frac{F(1.5l)^2}{2EI}\cdot 0.5l=\frac{27}{16}\frac{Fl^3}{EI}$$

$$\theta_{BF}=\theta_{DF}=\frac{F(1.5l)^2}{2EI}=1.125\frac{Fl^2}{EI}$$

第九章 弯曲变形

叠加法

根据边界条件$v_B=0$和$\theta_B = 0$，得到

$$-\frac{7}{24}ql^4+\frac{27}{16}Fl^3+\frac{F_B(2l)^3}{3}+\frac{M_B(2l)^2}{2}=0$$

$$-\frac{ql^3}{6}+1.125Fl^2+\frac{F_B(2l)^2}{2}+M_B(2l)=0$$

可以求出B点的约束力

$F_B = -32.81\text{kN}$，

$M_B = 17.71\text{kN·m}$。

根据平衡条件可知

A端支座反力$F_A = 32.81\text{kN}$，

力偶矩 $M_A = -13.54\text{kN·m}$。

第九章 弯曲变形

面积矩法Moment-Area method

$$EI\frac{d^2v}{dx^2}=EI\frac{d}{dx}(\frac{dv}{dx})=M_z(x)$$

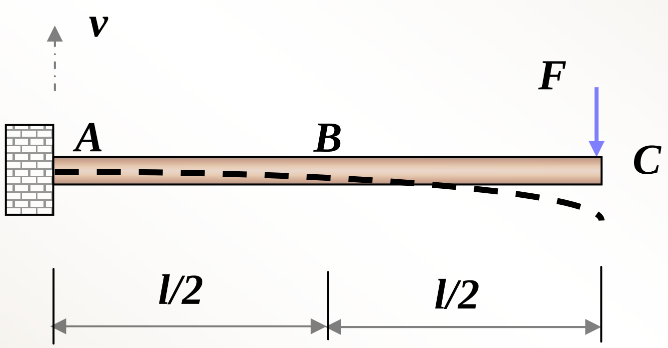
$$d\theta=\frac{M}{EI}dx$$

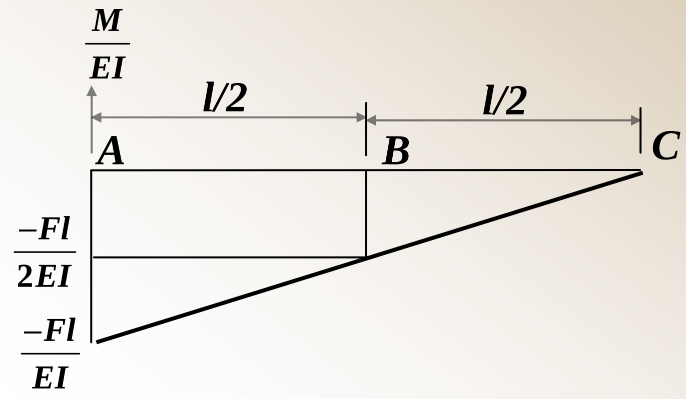
$$\theta_{B/A}=\int_A^B\frac{M}{EI}dx$$

面积矩第一定理: 挠度曲线任意两点的切向的相对夹角等于这两点之间M/EI图形的面积。

第九章 弯曲变形

面积矩法





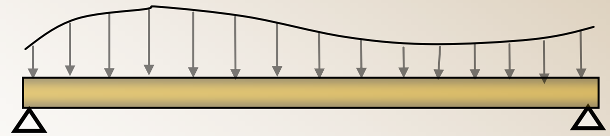
$$\theta_B=\theta_{B/A}=\frac{-Fl}{2EI}\cdot\frac{l}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{-Fl}{2EI}\cdot\frac{l}{2}=-\frac{3Fl^2}{8EI}$$

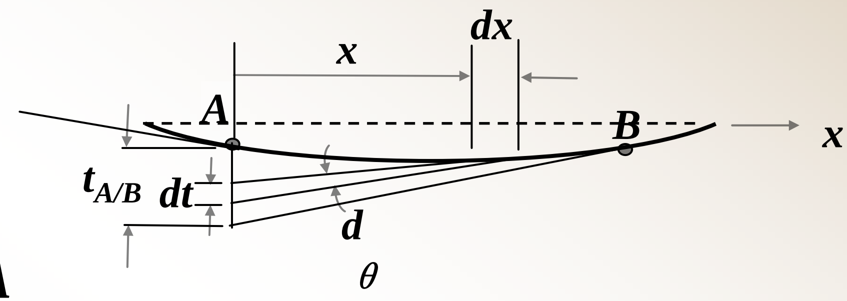
$$\theta_C=\theta_{C/A}=\frac{1}{2}\cdot\frac{-Fl}{EI}\cdot l=-\frac{Fl^2}{2EI}$$

第九章 弯曲变形

面积矩法

$$t_{A/B}=\int_A^B dt=\int_A^B x d\theta=\int_A^B x\frac{M}{EI}dx$$



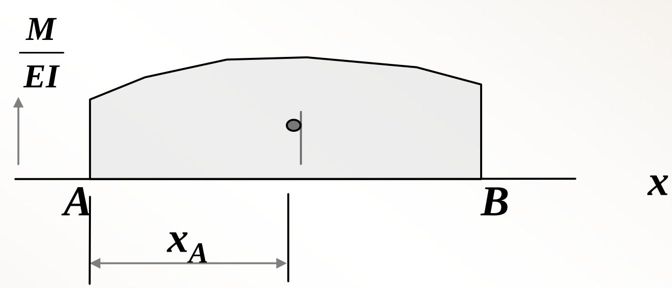


$$t_{A/B}=x_A\cdot\int_A^B\frac{M}{EI}dx$$

面积矩第二定理: 挠度曲线上点*A*点相对于**B**点的切线的垂直偏离量$t_{A/B}$等于M/EI曲线在**A**，**B**点之间图形面积关于**A**点的面积矩。

x_A是距离，为正值，$t_{A/B}$与弯矩图积分值的符号相同。

一般情况下$t_{A/B}$并不是*A*点挠度。

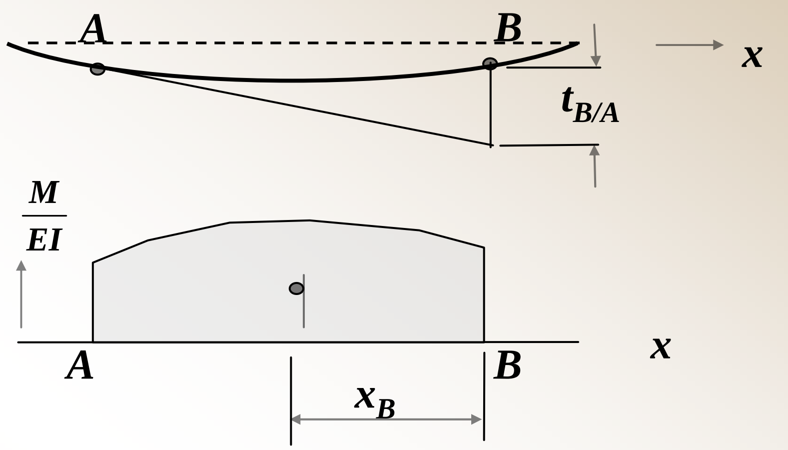


第九章 弯曲变形

面积矩法

应该指出$t_{B/A}$不等于 $t_{A/B}$。

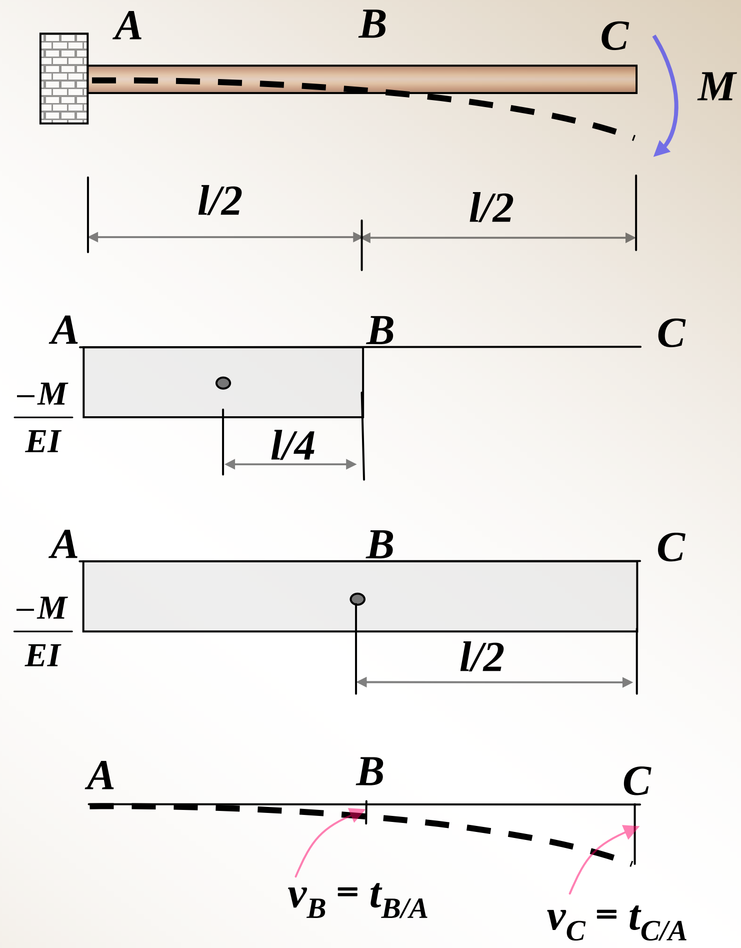
$$t_{B/A} = x_B \cdot \int_A^B \frac{M}{EI} dx$$



第九章 弯曲变形

面积矩法

如图所示悬臂梁，自由端受力偶矩M作用。试求点B和点C的挠度。



解：由于点A的切向是水平方向，所以B和C的挠度可以直接利用矩－面积法。

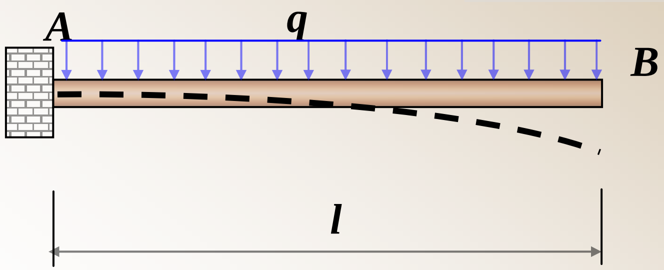
$$v_B = t_{B/A} = (\frac{l}{4})[(-\frac{M}{EI})(\frac{l}{2})] = -\frac{Ml^2}{8EI}$$

$$v_C = t_{C/A} = (\frac{l}{2})[(-\frac{M}{EI})(l)] = -\frac{Ml^2}{2EI}$$

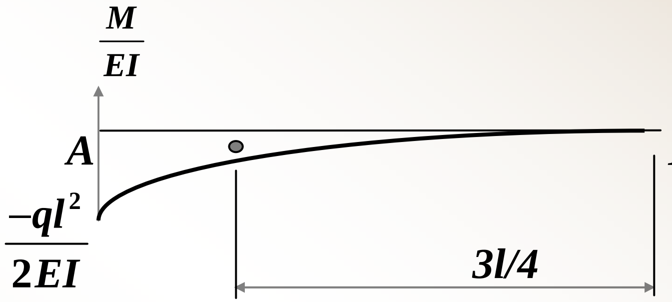
第九章 弯曲变形

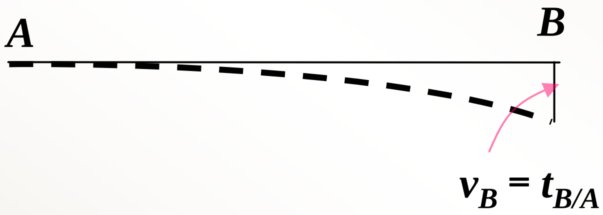
面积矩法

如图所示悬臂梁，受均布载荷q作用。试求点B的挠度。



解：由于点A的切向是水平方向，所以B点的挠度可以直接利用面积矩法。

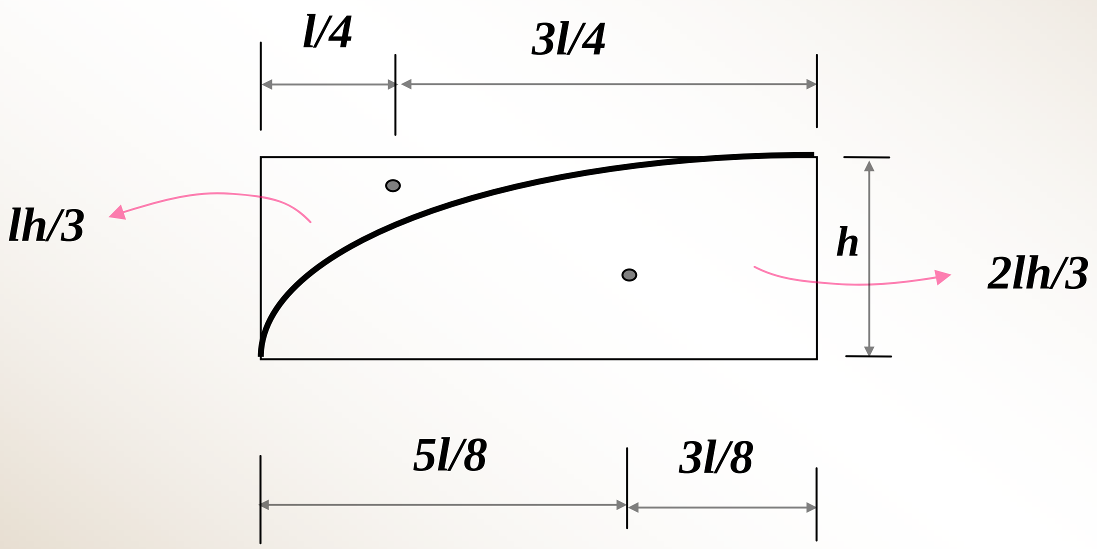




$$v_B = t_{B/A} = -(\frac{3l}{4})[\frac{1}{3}(\frac{ql^2}{2EI})l] = -\frac{ql^2}{8EI}$$

第九章 弯曲变形

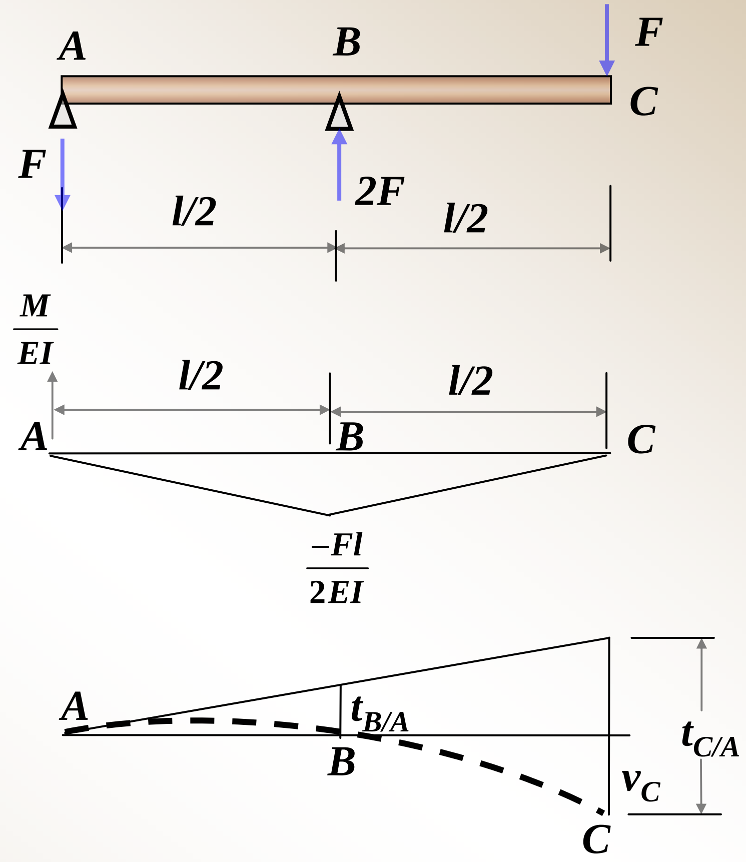
面积矩法



第九章 弯曲变形

面积矩法

如图外伸梁，弯曲刚度为EI，求C点挠度。



解：

$$v_C = |t_{C/A}| - 2|t_{B/A}|$$

$$|t_{C/A}| = \frac{l}{2} \cdot \frac{Fl}{2EI} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Fl^3}{8EI}$$

$$|t_{B/A}| = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{Fl}{2EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Fl^3}{48EI}$$

$$v_C = \frac{Fl^3}{8EI} - 2 \cdot \frac{Fl^3}{48EI} = \frac{Fl^3}{12EI} \downarrow$$

第九章 弯曲变形

刚度条件

刚度条件 $|v|_{\max} \leq [v]$ $|\theta|_{\max} \leq [\theta]$

长度为l的一般机械的轴，许用挠度为

$$[v] = (0.0003 \sim 0.0005)l$$

对于跨度为l的桥式起重机的梁，许用挠度

$$[v] = (\frac{1}{750} \sim \frac{1}{500})l$$

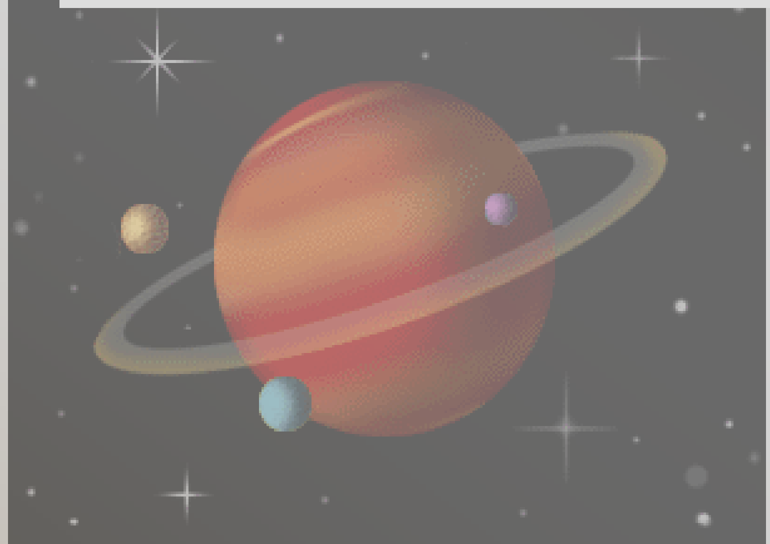
在安装齿轮或滑动轴承处，轴的许用转角
$[\theta]=0.001$ 弧度

在安装滚动轴承处，轴的许用转角
$[\theta]=0.0016 \sim 0.005$ 弧度

本讲结束
End of This Chapter

谢谢！

宇宙之大，粒子之小，力学无处不在。



Thank You