

基于径向基函数的加权最小二乘无网格法

赵敏, 陈文*

(河海大学 工程力学系, 南京 210098)

摘要:径向基函数插值是一种新型的无网格插值方法,具有形式简单、空间维数无关等优点。这种插值方法具有 δ 函数的性质,易于满足本质边界条件,且插值函数的导数求解过程比通常的移动最小二乘插值(MLS)简单,精度也较高。另一方面,通过加权最小二乘法离散控制方程不需要积分,具有效率高,精度高等优点。本文试图将两者的优点结合起来,发展一种新型的无网格方法-基于径向基函数的加权最小二乘无网格法。针对弹性静力学问题的数值试验表明,这种方法具有较高的精度和稳定性。

关键词:无网格法;径向基函数;MQ;加权最小二乘法
中图分类号:O241 **文献标志码:**A

1 引言

无单元法由于只需节点信息而不必划分单元,具有求解精度高,收敛快,后处理方便等优点,近年来成为国内外力学界的研究热点。然而目前大多数的无网格法都是基于移动最小二乘(MLS)近似构造形函数,该过程不但计算昂贵,而且形函数不满足 δ 函数性质,不易施加本质边界条件。径向基函数是一种新型的无网格插值方法,利用径向基函数插值构造的形函数具有 δ 函数的性质,在求解形函数时候可以同时获得形函数的导数和高阶导数,避免了MLS插值函数及其导数冗长的计算过程,这些都显著提高了计算效率。目前,径向基函数插值有基于全局的^[1-4]和基于局部支持域的^[5-8],前者插值精度高,收敛速度快,但系数矩阵为满阵,不利于大规模的数值计算;后者由于插值通过局部支持域中的节点构造,因此所得的系数矩阵具有紧支性,呈稀疏、带状分布,因此更利于大型问题的求解。

无网格法一个比较大的缺点就是计算量大。现有的无网格方法很多都是基于伽辽金的弱式积分法^[9,10],需要借助背景网格积分,而无网格法的近似函数大多不是多项式,因此需要高阶高斯积分,计算量大。基于配点法的无网格法不需要积分

但通常精度低,稳定性差。文献[11]在配点法的基础上提出加权最小二乘无网格法。它直接使用最小二乘法建立系统的变分原理,与配点法相比,消除了控制方程在边界节点处的残差,相当于在配点法中引入了稳定项,且形成对称的系数矩阵。同时,它和普通配点法一样不需要进行高斯积分,因而相对弱式积分的无网格法计算量小。但文献[11]和大多数无网格法一样使用MLS插值函数,因此并不精确通过插值点,而且其计算过程相对冗长。

本文利用基于局部支持域的径向基函数来构造插值函数并采用加权最小二乘法来离散方程。由于结合了两者的优点,所以求解过程不需要积分,形函数具有 δ 函数性质,易于施加本质边界条件。本文将其应用于弹性力学问题的求解,得到了令人满意的结果。

2 径向基函数插值理论

设场函数 $u(\mathbf{x})$,其定义域 Ω ,场中一计算点 \mathbf{x} ,由周围局部支持域内的 n 个节点插值得

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|) \quad (1)$$

式中 λ_i 是待定系数, ϕ 是径向基函数, n 是节点支持域内的节点数,节点的支持域一般可以取为3-4倍的节点平均间距。

式(1)进一步可写为

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i(\mathbf{x}) = A^T(\mathbf{x})\lambda \quad (2)$$

收稿日期:2009-02-04;修改稿收到日期:2010-03-30.

基金项目:国家自然科学基金面上项目(10672051)资助项目.

作者简介:赵敏(1984-),研究生;

陈文*(1967-)男,博士生导师

(E-mail:chenwen@hhu.edu.cn).

式中

$$\lambda = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_n]^T$$

$$A(\mathbf{x}) = [a_1(\mathbf{x}) \quad a_2(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad a_n(\mathbf{x})]^T \quad (3)$$

式(2)中有 n 个未知数,令近似函数 $u^h(\mathbf{x})$ 在支持域内的所有节点处的值等于函数 $u(\mathbf{x})$ 在该节点处的值 u_i ,即 $u^h(\mathbf{x}_i) = u_i$,可得到 n 个线性方程组:

$$B\lambda = \mathbf{u} \quad (4)$$

式中

$$B = \begin{bmatrix} A^T(\mathbf{x}_1) \\ A^T(\mathbf{x}_2) \\ \vdots \\ A^T(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1(\mathbf{x}_1) & a_2(\mathbf{x}_1) & \cdots & a_n(\mathbf{x}_1) \\ a_1(\mathbf{x}_2) & a_2(\mathbf{x}_2) & \cdots & a_n(\mathbf{x}_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1(\mathbf{x}_n) & a_2(\mathbf{x}_n) & \cdots & a_n(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n]^T \quad (6)$$

由式(4)解出系数列阵 λ ,代入式(2)中,得

$$u^h(\mathbf{x}) = A^T(\mathbf{x})B^{-1}\mathbf{u} = \mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (7)$$

式中形函数矩阵:

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}) = A^T(\mathbf{x})B^{-1} \quad (8)$$

形函数导数为

$$\mathbf{N}(\mathbf{x})_{,i} = A^T_{,i}(\mathbf{x})B^{-1} = [a_{1,i}(\mathbf{x}) \quad a_{2,i}(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad a_{n,i}(\mathbf{x})]B^{-1} \quad (9)$$

$$\mathbf{N}(\mathbf{x})_{,ij} = A^T_{,ij}(\mathbf{x})B^{-1} = [a_{1,ij}(\mathbf{x}) \quad a_{2,ij}(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad a_{n,ij}(\mathbf{x})]B^{-1} \quad (10)$$

常用的典型径向基函数如下:

$$\text{Gaussians: } \phi(r) = \exp(-cr^2) \quad (11)$$

$$\text{Multi-Quadrics(MQ): } \phi(r) = (c^2 + r^2)^q \quad (12)$$

$$\text{Thin-Plate Spline(TPS): } \phi(r) = r^{2q} \log r \quad (13)$$

式中 c 为大于零的常数, q 为常数, $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|$ 。MQ 基函数中 c 和 q 为形参数,根据 Wang 和 GR Liu^[12] 的研究建议 q 取 1.03, c 通常可以取局部支持域中节点的平均间距的倍数。本文也只针对 MQ 基函数进行了讨论。

3 加权最小二乘无网格法

以二维弹性静力问题为例,给出加权最小二乘无网格法的具体格式。

弹性力学的控制方程为

$$\text{平衡方程: } \sigma_{ij,j} + \bar{f}_i = 0 \quad \text{at } \Omega \quad (14)$$

$$\text{力边界条件: } \sigma_{ij}n_j - \bar{t}_i = 0 \quad \text{at } \Gamma_t \quad (15)$$

$$\text{位移边界条件: } u_i = \bar{u}_i \quad \text{at } \Gamma_u \quad (16)$$

$$\text{几何方程: } \epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{at } \Omega \quad (17)$$

$$\text{物理方程: } \sigma_{ij} = D_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad \text{at } \Omega \quad (18)$$

式中 \bar{f}_i 为域 Ω 中给定的体力, Γ_t 为给定的面力边界, \bar{t}_i 为给定的面力, n_j 为边界 Γ_t 的外法线方向余弦, Γ_u 为给定的位移边界, \bar{u}_i 为给定的位移, D_{ijkl} 为本构张量。

采用加权最小二乘法来求解弹性静力问题,要求控制方程(14 ~ 16) 残量的加权平方和为

$$\Pi = \int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + \bar{f}_i)(\sigma_{ik,k} + \bar{f}_i) d\Omega + \int_{\Gamma_u} \lambda_u (u_i - \bar{u}_i)(u_i - \bar{u}_i) d\Gamma + \int_{\Gamma_t} \lambda_t (\sigma_{ij}n_j - \bar{t}_i)(\sigma_{ik}n_k - \bar{t}_i) d\Gamma \quad (19)$$

取最小值,即

$$\delta\Pi = \int_{\Omega} \delta\sigma_{ik,k} (\sigma_{ij,j} + \bar{f}_i) d\Omega + \int_{\Gamma_u} \lambda_u \delta u_i (u_i - \bar{u}_i) d\Gamma + \int_{\Gamma_t} \lambda_t \delta\sigma_{ik}n_k (\sigma_{ij}n_j - \bar{t}_i) d\Gamma = 0 \quad (20)$$

式中 λ_u 和 λ_t 分别为用以施加位移边界条件和面力边界条件的罚函数。泛函式(19) 为控制方程的加权平方和,式中积分只是为了消除控制方程残量,因此可以参考文献[11] 采用式(20) 的一种离散形式,即

$$\delta\Pi = \sum_{s=1}^N \delta\sigma_{ik,k} (\sigma_{ij,j} + \bar{f}_i) \Big|_{x=x_s} + \sum_{s=1}^{N_u} \lambda_u \delta u_i (u_i - \bar{u}_i) \Big|_{x=x_s} + \sum_{s=1}^{N_t} \lambda_t \delta\sigma_{ik}n_k (\sigma_{ij}n_j - \bar{t}_i) \Big|_{x=x_s} = 0 \quad (21)$$

式中 N 为节点总数, N_u 为位于给定位移边界上的节点总数, N_t 为位于给定面力边界上的节点总数。将无网格近似函数式(7) 代入式(21) 中写成矩阵形式,并考虑到虚位移 δu_i 的任意性,可以得到加权最小二乘无网格法的格式为

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{P} \quad (22)$$

式中

$$\mathbf{K} = \sum_{s=1}^N \mathbf{H}^T(\mathbf{x}_s)\mathbf{H}(\mathbf{x}_s) + \sum_{s=1}^{N_u} \lambda_u \mathbf{N}^T(\mathbf{x}_s)\mathbf{N}(\mathbf{x}_s) + \sum_{s=1}^{N_t} \lambda_t \mathbf{Q}^T(\mathbf{x}_s)\mathbf{Q}(\mathbf{x}_s) \quad (23)$$

$$\mathbf{P} = - \sum_{s=1}^N \mathbf{H}^T(\mathbf{x}_s) \bar{\mathbf{f}}_s + \sum_{s=1}^{N_u} \lambda_u \mathbf{N}^T(\mathbf{x}_s) \bar{\mathbf{u}}_s + \sum_{s=1}^{N_t} \lambda_t \mathbf{Q}^T(\mathbf{x}_s) \bar{\mathbf{t}}_s \quad (24)$$

$$\mathbf{d} = [u_{11} \quad u_{21} \quad u_{12} \quad u_{22} \quad \cdots \quad u_{1N} \quad u_{2N}]^T \quad (25)$$

式(23,24)中的矩阵 \mathbf{H} , \mathbf{Q} , \mathbf{N} 和向量 $\bar{\mathbf{f}}_s$, $\bar{\mathbf{u}}_s$, $\bar{\mathbf{t}}_s$, \mathbf{u}_l 如下:

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}_i) = [\mathbf{H}_1(\mathbf{x}_i) \quad \mathbf{H}_2(\mathbf{x}_i) \quad \cdots \quad \mathbf{H}_N(\mathbf{x}_i)] \quad (26)$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}_i) = [\mathbf{Q}_1(\mathbf{x}_i) \quad \mathbf{Q}_2(\mathbf{x}_i) \quad \cdots \quad \mathbf{Q}_N(\mathbf{x}_i)] \quad (27)$$

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}_i) = [\mathbf{N}_1(\mathbf{x}_i) \quad \mathbf{N}_2(\mathbf{x}_i) \quad \cdots \quad \mathbf{N}_N(\mathbf{x}_i)] \quad (28)$$

$$\bar{\mathbf{f}}_s = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}_1(\mathbf{x}_s) \\ \bar{\mathbf{f}}_2(\mathbf{x}_s) \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{u}}_s = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_1(\mathbf{x}_s) \\ \bar{\mathbf{u}}_2(\mathbf{x}_s) \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\bar{\mathbf{t}}_s = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{t}}_1(\mathbf{x}_s) \\ \bar{\mathbf{t}}_2(\mathbf{x}_s) \end{bmatrix}, \mathbf{u}_l = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{l1} \\ \mathbf{u}_{l2} \end{bmatrix} \quad (30)$$

式中 u_{il} 表示节点 l 的第 i 个方向的位移分量, \mathbf{H} , \mathbf{Q} , \mathbf{N} 具体格式如下:

$$\mathbf{H}_l(\mathbf{x}_s) = \frac{E_0}{1-\nu_0^2} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_l(\mathbf{x}_s)}{\partial x^2} + \frac{1-\nu_0}{2} \frac{\partial^2 N_l(\mathbf{x}_s)}{\partial y^2} \\ \frac{1+\nu_0}{2} \frac{\partial^2 N_l(\mathbf{x}_s)}{\partial x \partial y} \\ \frac{1+\nu_0}{2} \frac{\partial^2 N_l(\mathbf{x}_s)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 N_l(\mathbf{x}_s)}{\partial y^2} + \frac{1-\nu_0}{2} \frac{\partial^2 N_l(\mathbf{x}_s)}{\partial x^2} \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\mathbf{Q}_l(\mathbf{x}_s) = \frac{E_0}{1-\nu_0^2} \begin{bmatrix} l \frac{\partial N_l(\mathbf{x}_s)}{\partial x} + m \frac{1-\nu_0}{2} \frac{\partial N_l(\mathbf{x}_s)}{\partial y} \\ m \nu_0 \frac{\partial N_l(\mathbf{x}_s)}{\partial x} + l \frac{1-\nu_0}{2} \frac{\partial N_l(\mathbf{x}_s)}{\partial y} \\ l \nu_0 \frac{\partial N_l(\mathbf{x}_s)}{\partial y} + m \frac{1-\nu_0}{2} \frac{\partial N_l(\mathbf{x}_s)}{\partial x} \\ m \frac{\partial N_l(\mathbf{x}_s)}{\partial y} + l \frac{1-\nu_0}{2} \frac{\partial N_l(\mathbf{x}_s)}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\mathbf{N}_l = \begin{bmatrix} N_l(\mathbf{x}_s) & 0 \\ 0 & N_l(\mathbf{x}_s) \end{bmatrix} \quad (33)$$

矩阵 \mathbf{N} 和 \mathbf{Q} 元素的量级相差很大, 因此罚函数 λ_u 和 λ_t 也应该有不同的量级, 一般可取为 $\lambda_t = 10^5$, $\lambda_u = \lambda_t \left[\frac{E}{(1-\nu^2)} \right]^2$.

4 算例分析

4.1 一维悬臂杆

如图1所示, 求解受线性分布载荷 $\bar{\mathbf{f}}(x) = x$ 作用的单位长度杆的变形和应力分布, 采用无量纲

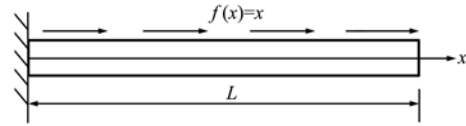


图1 受线性分布载荷作用的单位长度一维杆
Fig. 1 A unit pole with linear load along x direction

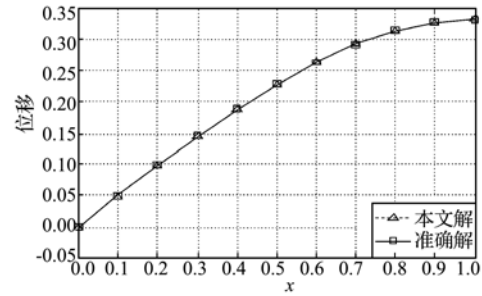


图2 一维杆位移分布
Fig. 2 Displacement distribution

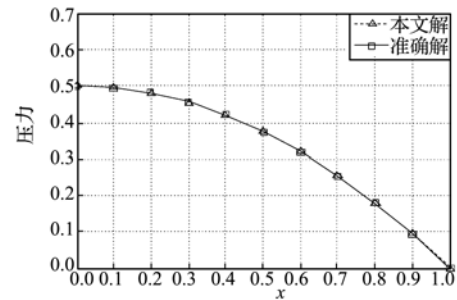


图3 一维杆应力分布
Fig. 3 Stress distribution

参数, 其中弹性模量 $E = 1.0$, 横截面积 $A = 1.0$. 该问题的准确解为

$$u = \frac{1}{E} \left[\frac{x}{2} - \frac{x^3}{6} \right], \quad \sigma = \frac{1-x^2}{2} \quad (34)$$

均匀布点方案, 间距 $\Delta x = 0.1$, 采用 MQ 基函数, 参数 $c = 2.0$, $q = 1.03$, 支持域为 4 倍的布点间距. 图 2 和图 3 分别为杆的位移和应力分布.

4.2 二维悬臂梁

(1) 受到右端集中载荷的作用的悬臂梁(见图 4)的准确解^[13]为

$$\left. \begin{aligned} u_x &= -\frac{P}{6EI} \left[y - \frac{D}{2} \right] \left[(6L-3x)x + (2+\nu)(y^2 - Dy) \right] \\ u_y &= \frac{P}{6EI} \left[3\nu \left[y - \frac{D}{2} \right]^2 (L-x) + \left[1 + \frac{5\nu}{4} \right] D^2 x + (3L-x)x^2 \right] \\ \sigma_x &= \frac{P}{I} \left[\frac{D}{2} - y \right] (L-x) \\ \sigma_y &= 0, \sigma_{xy} = \frac{Py}{2I} (D-y) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

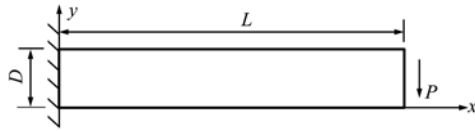


图 4 右端受集中载荷的作用的悬臂梁
Fig. 4 Cantilevered beam

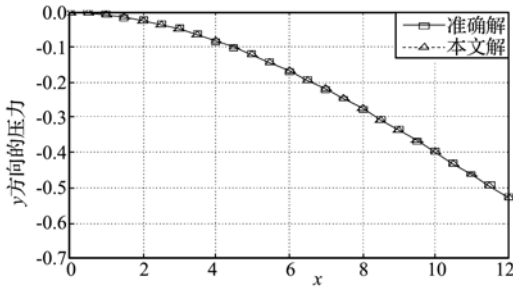


图 6 梁上表面各点的挠度 u_y 分布
Fig. 6 u_y along upper face of beam

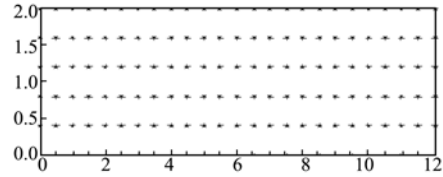


图 5 6×25 规则布点
Fig. 5 6×25 regular nodes distribu

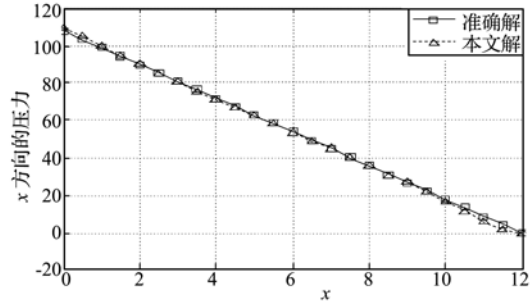


图 7 梁上表面正应力 σ_x 分布
Fig. 7 σ_x along upper face of beam

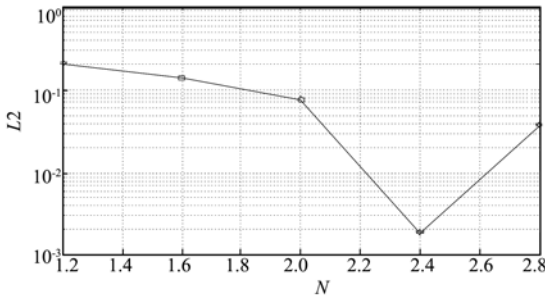


图 8 配点密度对误差范数 L_2 的影响
Fig. 8 Influence of the point distribution to the error of L_2

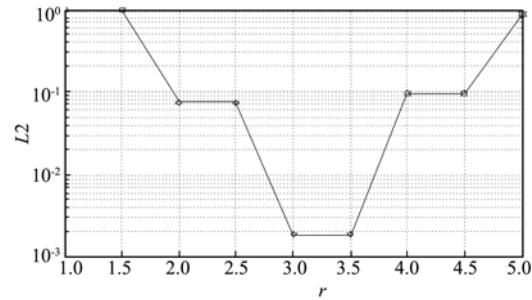


图 9 支持域尺寸对误差范数 L_2 的影响
Fig. 9 Influence of the dimension of support domain to the error of L_2

计算中采用无量纲参数: $L=12, D=2, P=6$, 弹性模量 $E=3.0 \times 10^4$, 泊松比 $\nu=1/3$ 。采用 6×25 规则布点方案, 即 $\Delta x=0.5, \Delta y=0.4$, 如图 5 所示。采用 MQ 基函数, 其中 $c=4.0, q=1.03$, 支持域为 3 倍的布点间距。

图 6 和图 7 分别为悬臂梁上表面各点的挠度 u_y 和表面正应力 σ_x 本文的计算结果。从结果可看出, 本文方法具有相当高的精度。

(2) 同为上面的算例, MQ 中参数同上, 仅讨论配点密度、支持域大小对计算结果的影响。 L_2 定义为悬臂梁 y 向位移的范数相对误差: $L_2 = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{\tilde{u}_y(i) - u_y(i)}{u_y(i)} \right|^2}$, 图 8 显示的是配点密度对 L_2 的影响, 布点方案为 y 方向 5 等分, x 方向 N 等分, 即 $6 \times (N+1)$ 规则布点, 支持域为 3 倍布点间距。图 9 显示的是采用 6×25 规则布点, 支持域对 L_2 的影响, r 为支持域相对于布点间距的倍数。可以看出, 随着配点密度的增加, 范数相对误差 L_2 逐渐减小, 但在 N 大于 24 后又趋于增大, 可能是点数增大, 系数矩阵条件数过大所致。支持域也有个

合理的取值, 太小可能会导致插值函数场节点不足, 太大可能与形参数不匹配, 精度也不一定理想。

4.3 具有中心圆孔的无限大平板

受水平拉应力 σ_s 作用的具有半径为 a 的中心圆孔的无限大平板, 考虑对称性, 取板的右上部分按平面应力状态进行分析, 如图 10 所示。取无量纲参数 $E=1000, \nu=0.3, \sigma_s=1.0, a=2$ 。采用对称边界条件, 即在板的左边界上各点处 x 方向固定, y 方向自由, 而在下边界上各点处 x 方向自由, y 方向固定; 在内边界上的表面力为零; 在板的右边和顶部精确施加表面力边界条件, 以保证所求问题的解为具有中心圆孔的无限大平板。

节点布置如图 11 所示, 沿环向在 $\theta \in [0, \pi/2]$ 上 10 等分角度, 半径为 r_0 ; 沿径向按等比例分布 20 个节点, n 为节点数。其中第 i 个节点的位置为

$$r(i) = a + (r_0 - a) \frac{1 - q^{i-1}}{1 - q^{n-1}}, q = 1.1 \quad (36)$$

采用 MQ 基函数, $c=0.5, q=1.03$, 支持域为

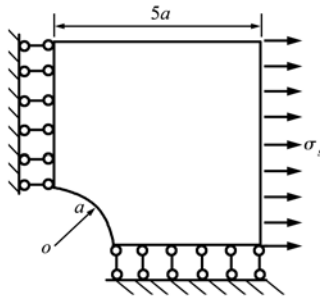


图10 1/4结构部分
Fig. 10 1/4 part of structure

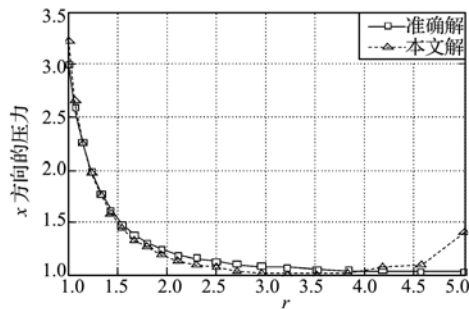


图12 左端边界应力 σ_x
Fig. 12 σ_x along left boundary

4倍布点间距。图12给出了左端边界应力 σ_x 结果，该问题准确解为

$$\sigma_x = \sigma_s \left(1 + \frac{a^2}{2r^2} + \frac{3a^4}{2r^4} \right) \quad (37)$$

很明显该问题较上述梁问题具有更复杂的表面力(自然)边界条件,从结果中也可以看出,在靠近边界附件的点精度略有降低,但总的来说本文的方法在处理这种复杂边界条件时还是给出了不错的数值结果。

5 结论

(1) 径向基函数插值构造形函数过程简单,在求解形函数时候可以同时获得形函数的导数和高阶导数;形函数具有 δ 函数特性,易于施加本质边界条件,这使得该方法与目前的MLS插值相比显著提高了计算效率和精度。

(2) 加权最小二乘法是直接使用最小二乘法来建立系统的变分原理,这种方法精度高、稳定性好,生成的系数矩阵对称,不需要高斯积分,是一种真正的无网格方法。它与径向基函数插值结合形成了本文中一种新的无网格计算方法——基于径向基函数的加权最小二乘无网格法,这种方法更易于程序实现,本文的数值结果也表明该方法具有较高的精度。

(3) MQ基函数具有较高的精度,但结果依赖

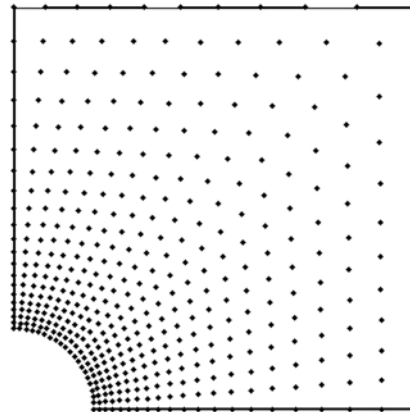


图11 节点布置图
Fig. 11 Nodes distribution

于形参数 q 和 c 的选取,而参数的最优值与所解的问题有关,根据 Wang 和 GR Liu 的研究和本文的结果,在一维、二维固体中建议 q 取 1.03, c 通常可以取局部支持域中节点的平均间距的倍数;局部支持域的尺寸建议可以取 3 倍~4 倍的节点的平均间距,太小可能会导致插值函数场节点不足,太大可能与形参数不匹配,精度也不一定理想。

参考文献 (References):

- [1] Kansa E J. Multiquadrics—a scattered data approximation scheme with application to computation fluid dynamics[J]. *Comput Math Appl*, 1990, **19**(8-9):127-145.
- [2] Fasshauer G E. Solving partial differential equations by collocation with radial basis functions[A]. *Proceedings of Surface Fitting and Multiresolution Methods* [C]. Nashville, TN.: Vanderbilt University Press, 1997,131-138.
- [3] Chen Wen. Symmetric boundary knot method[J]. *Engng Anal Bound Elem*, 2002, **26**(6):489-494.
- [4] Chen Wen, Hon Y C. Numerical convergence of boundary knot method in the analysis of Helmholtz, modified Helmholtz, and convection-diffusion problems[J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2003, **192**:1859-1875.
- [5] Wang J G, Liu G R. A point interpolation meshless method based on radial basis functions[J]. *Int J Num Meth Engrg*, 2001, **54**(11):1623-1648.
- [6] Shu C, Ding H, Yeo K S. Computation of incompressible Navier-Stokes equations by local RBF-based differential quadrature method[J]. *CMES-Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 2005, **7**:195-

- 205.
- [7] Zhang Xiong, Lu Mingwan, Song Kangzu. Meshless methods based on collocation with radial basic function [J]. *Comput Mech*, 2000, **26**(4): 333-343.
- [8] Zhang Xiong, Lu Mingwan, Song Kangzu. Collocation with Modified Compactly Supported Radial Basis Function[A]. Proceedings of International Conference on Computational Engineering and Science[C]. Puerto Vallarta, 2001
- [9] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element-free Galerkin methods[J]. *Int J Num Meth Engrg*, 1994, **37**(2): 229-256.
- [10] Liu W K, Jun S, Zhang Y F. Reproducing kernel particle methods[J]. *Int J Num Meth Engrg*, 1995, **20**:1081-1106.
- [11] 张 雄,等. 加权最小二乘无网格法[J]. 力学学报, 2003, **35**(4): 425-7431. (ZHANG Xiong, et al. Meshless weighted least-square method[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, **35**(4): 425-7431. (in Chinese))
- [12] Wang J G, Liu G R, On the optimal shape parameters of radial basis functions used for 2-D meshless methods[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2002, **191**(23-24): 2611-2630.
- [13] 吴家龙. 弹性力学[M]. 上海: 同济大学出版社, 1987. (WU Jia-long. *Elasticity Mechanics* [M]. Shanghai: Tongji University Press, 1987. (in Chinese))

A meshless weighted least square method based on radial basic functions

ZHAO Min, CHEN Wen*

(Department of Engineering Mechanics, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: Radial basic function is a recent meshless interpolation technique. It has a very simply form and no correlation with the space dimensions. The RBF shape functions possess the δ function property and can easily satisfy the essential boundary condition, and their derivatives are much easier to obtain compared to that of the moving least square shape function. The RBF interpolation accuracy is also found very high. Weight Least Square Method (WLSM) is a new meshless method. It uses the Weighted Least Square Form to discrete the government function, so it needn't the integration, and have high accuracy, high efficiency and some other advantages. In this study, we develop a new meshless method in the combination of the advantages of these two methods. The present method is tested to elastic static problems. And results show that this method is stable and accurate.

Key words: meshless method; radial basic function; MQ; weighted least-square method