附 录
平面图形的几何性质

选择材料——与材料的机械性质有关

确定尺寸——与截面大小、形状有关

拉压：应力均布，仅需满足 $A \geq \frac{F_N}{[\sigma]}$ ，

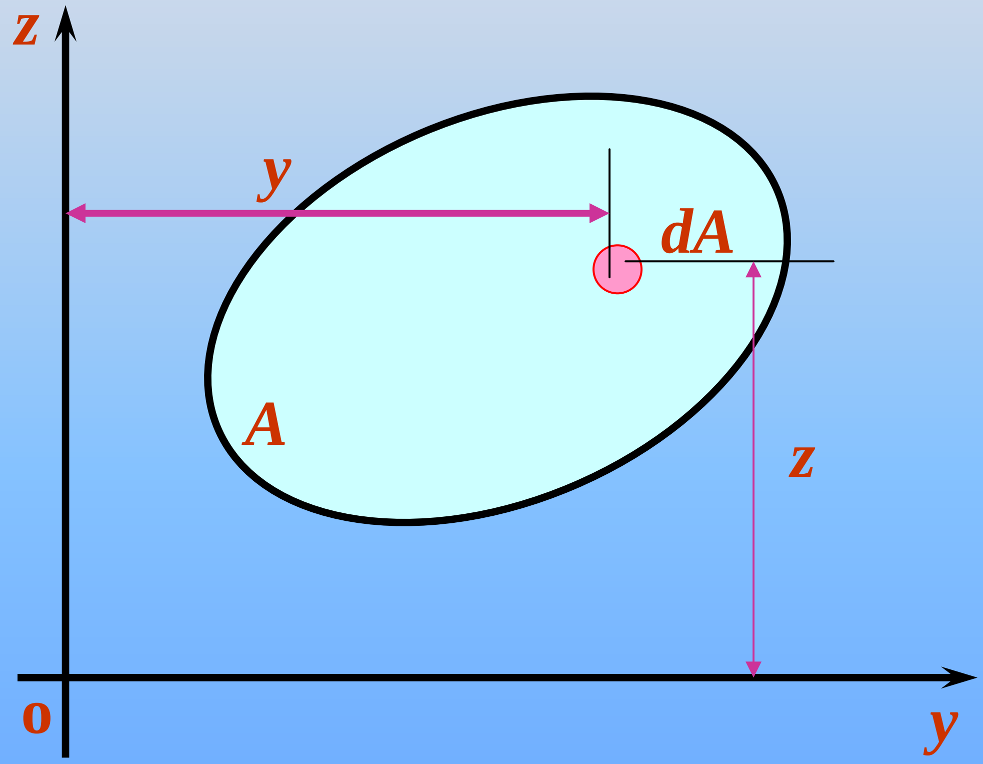
不考虑形状；

扭转：应力不均布，出现 $I_P = \int_A \rho^2 dA$ ，

在面积A相同，但形状不同的情况下，应力分布不同。

一、定 义

1、静矩



$$S_z = \int_A y\mathrm{d}A$$

图形对z轴的静矩

$$S_y = \int_A z\mathrm{d}A$$

图形对y轴的静矩

单位：m^3

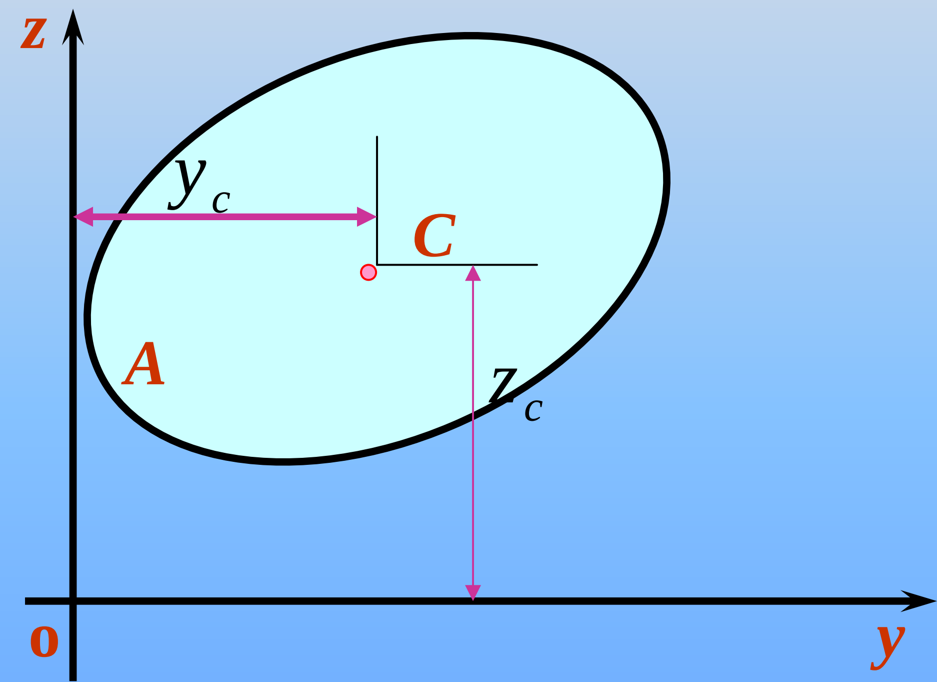
♉ 讨论

（1）静矩可>0；=0；<0。

（2）若图形形心C已知，由静力学可知：

$$y_c = \frac{\int_A y dA}{A} = \frac{S_z}{A}$$

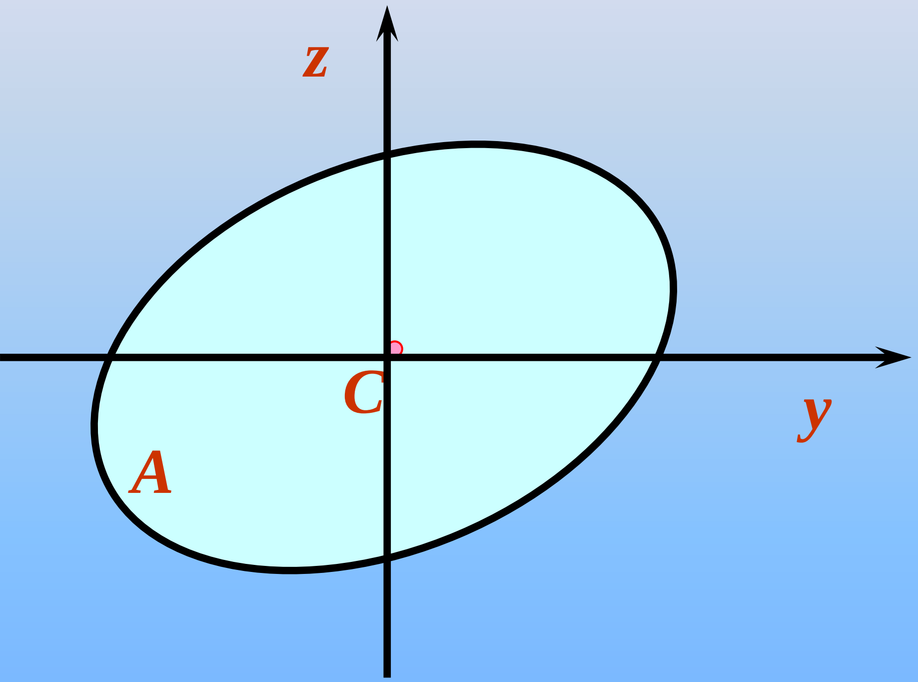
$$z_c = \frac{\int_A z dA}{A} = \frac{S_y}{A}$$



（3）求静矩的另一公式：

$$\begin{cases} S_z = y_c \cdot A \\ S_y = z_c \cdot A \end{cases}$$

（3）若 $y_c=0, z_c=0,$ 则 $S_z=0, S_y=0.$

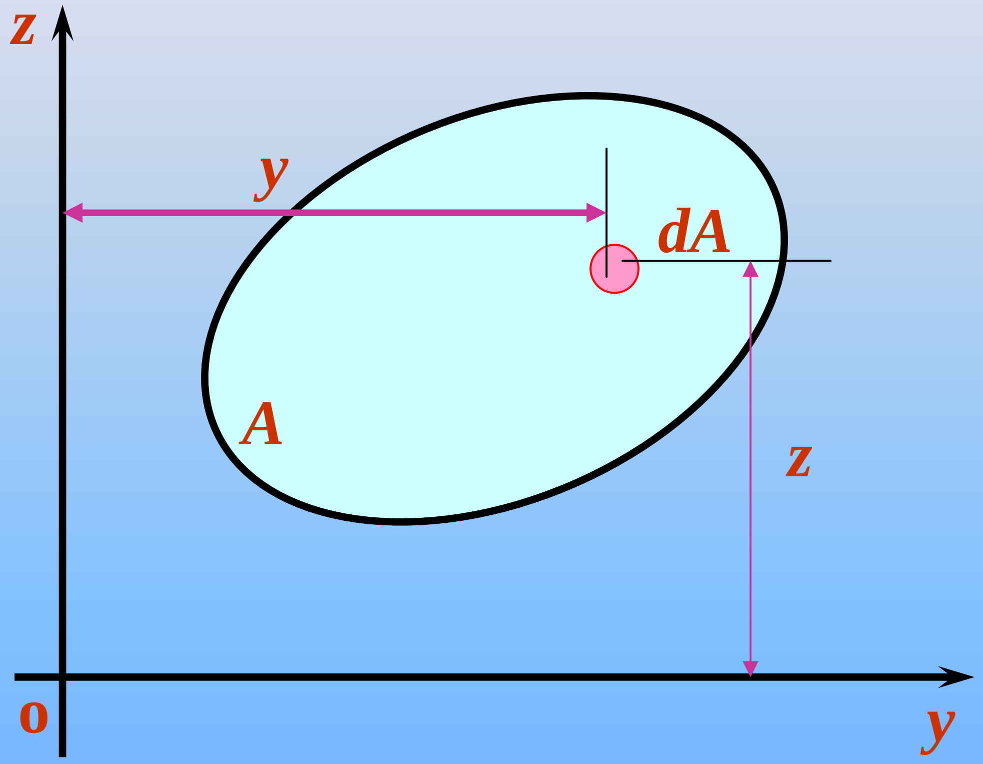


y、z轴称为形心轴。

若已知 $S_z=0, S_y=0,$

则可确定z轴、y轴通过截面形心。

2、惯矩



$$I_z = \int_A y^2 dA$$

图形对z轴的惯矩

$$I_y = \int_A z^2 dA$$

图形对y轴的惯矩

单位：m^4

♉ 讨论

（1）惯矩恒>0；

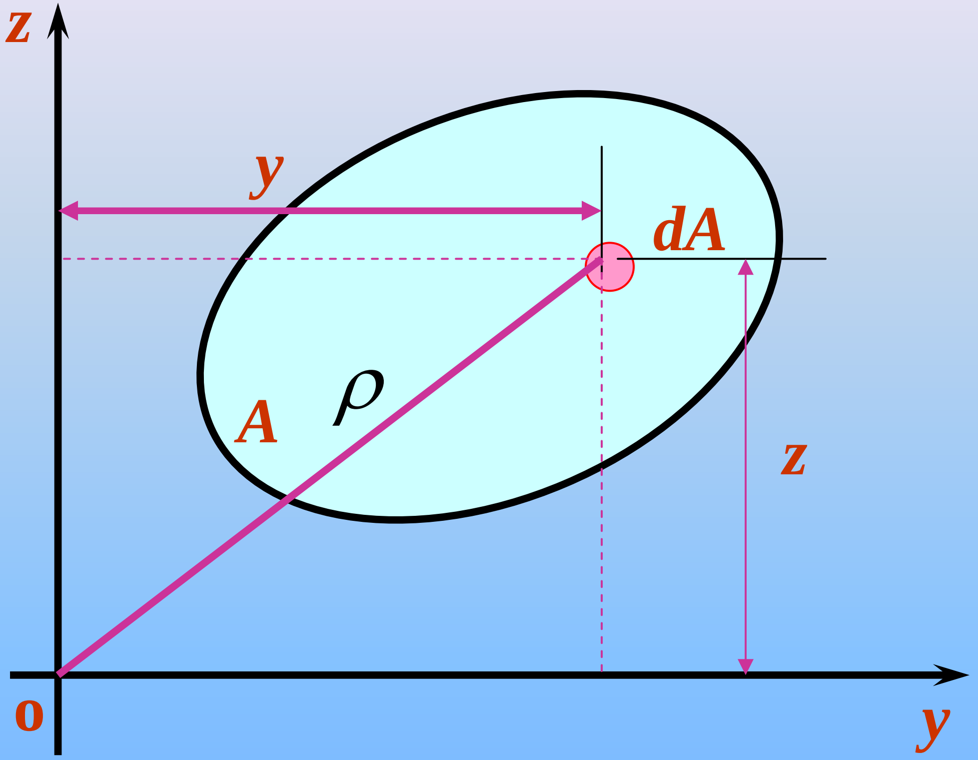
（2） $I_y = i_y^2 \cdot A, \quad I_z = i_z^2 \cdot A$

所以

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}, \qquad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$$

i_y, i_z ——惯性半径（单位：m ）

3、极惯矩



$$I_P = \int_A \rho^2 dA$$

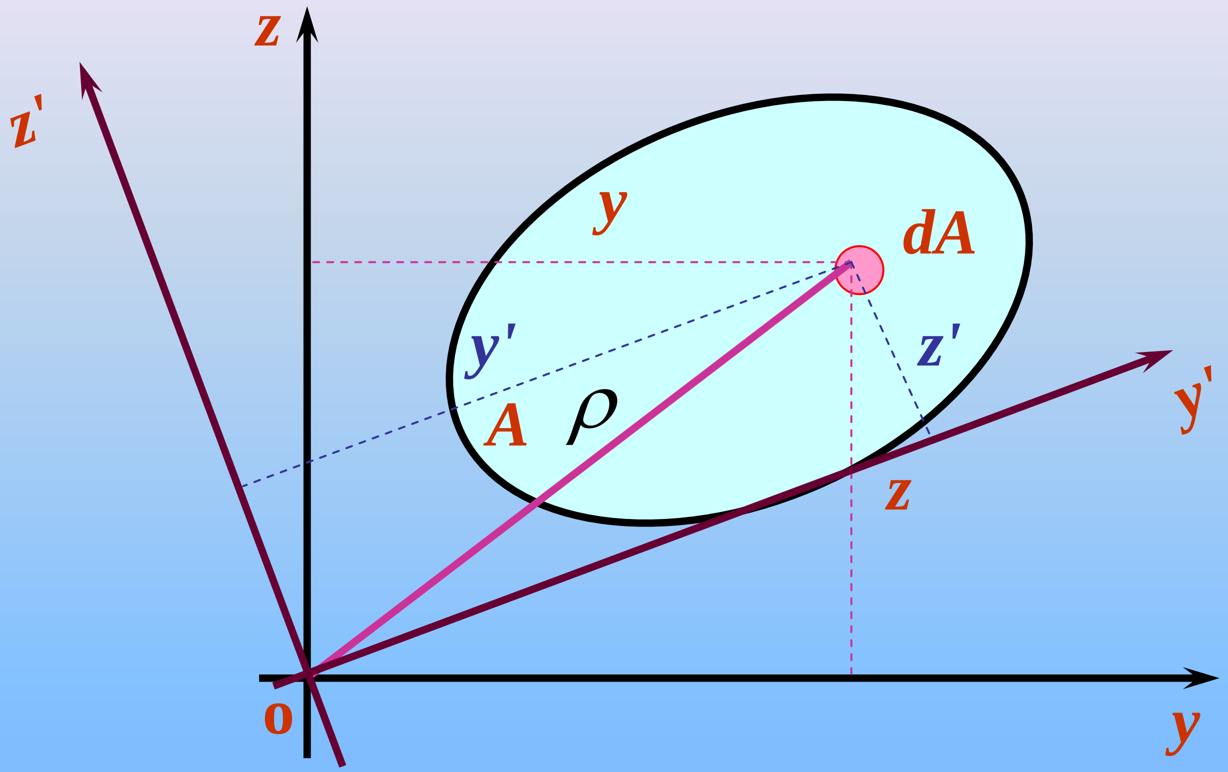
图形对o点的极惯矩

单位：m^4

讨论

（1） $\rho^2 = z^2 + y^2$

$$\therefore I_P = \int_A \rho^2 dA = \int_A (z^2 + y^2) dA = \int_A z^2 dA + \int_A y^2 dA = I_y + I_z$$



且

$$\rho^2 = z'^2 + y'^2$$

$$\therefore I_P = \int_A \rho^2 dA$$

$$= \int_A (z'^2 + y'^2) dA$$

$$= I_{y'} + I_{z'}$$

$$= I_y + I_z$$

即

对o点极惯矩 ＝ 对过o点同一平面内任意一对相互垂直轴的惯矩之和

所以 I_P 只与原点o有关，即

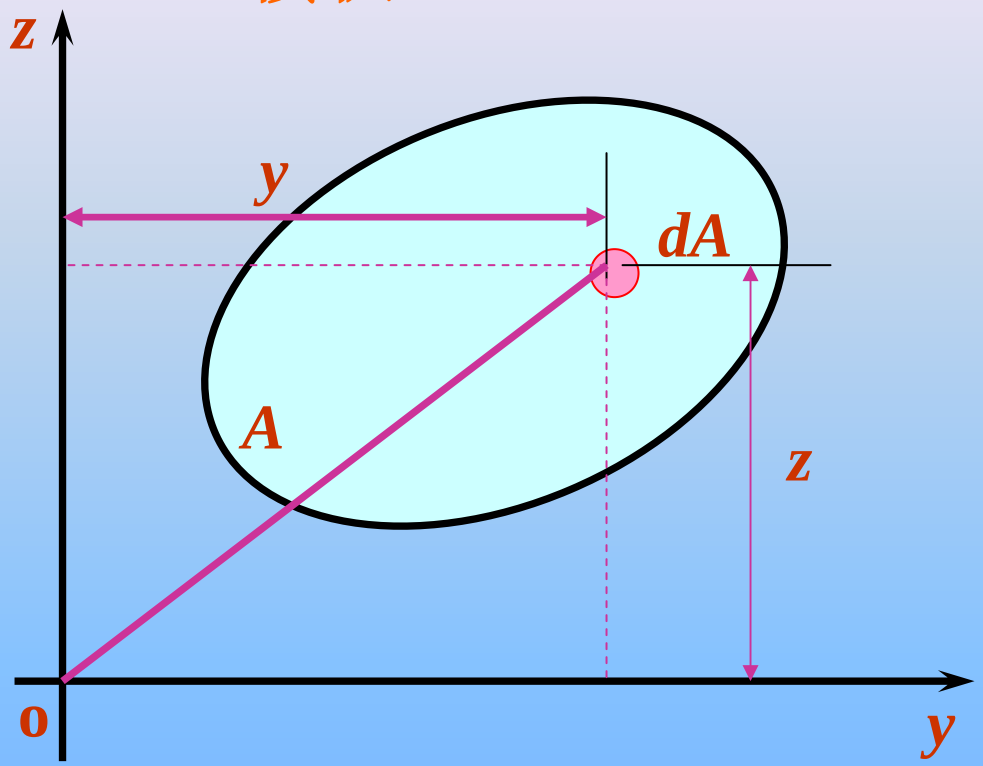
$$\boxed{I_y + I_z = const}$$

（2）

$$\because I_z > 0, I_y > 0$$

$$\therefore \ I_p \text{恒} > 0$$

4、惯积



$$I_{yz} = \int_A yz\,dA$$

图形对y、z两轴的惯积

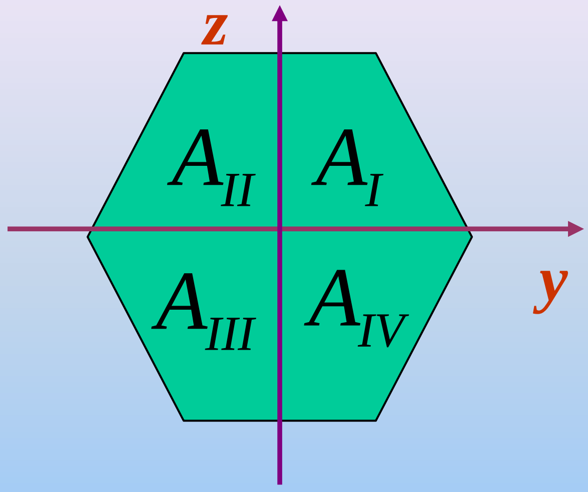
单位：m^4

♉ 讨论

（1） I_{yz} 可>0；=0；<0；

（2）若图形有一对称轴，则

$$I_{yz} = 0$$



$$\int_{A_I} yzdA = -\int_{A_{II}} yzdA$$

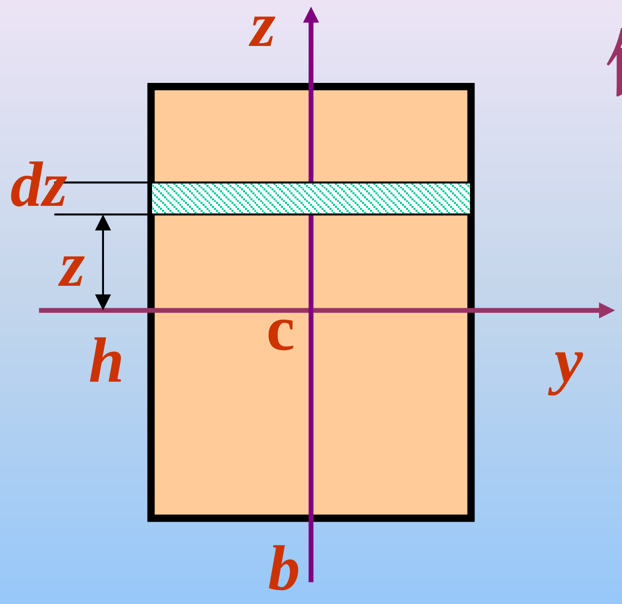
$$= \int_{A_{III}} yzdA = -\int_{A_{IV}} yzdA$$

$$\therefore I_{yz} = \int_{A_I} yzdA + \int_{A_{II}} yzdA + \int_{A_{III}} yzdA + \int_{A_{IV}} yzdA = 0$$

（3）若 $I_{yz} = 0$，则**y**、**z**轴称为主惯性轴（主轴）。

对称轴一定是主轴，主轴不一定是对称轴。

通过形心的主轴称为形心主惯性轴。



例：1、矩形。求 $S_z, S_y, I_z, I_y, I_{yz}, i_y, i_z$

解：（1）$S_z = 0, S_y = 0.$

（2）$$I_y = \int_A z^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \underline{bdz}$$

$$= \frac{b}{3} z^3 \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{1}{12} bh^3$$

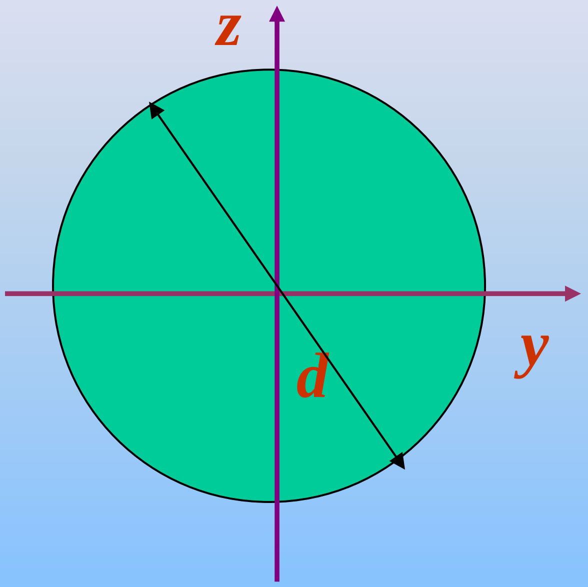
同理

$$I_z = \int_A y^2 dA = \frac{1}{12} hb^3$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \frac{\sqrt{3}}{6} h, \qquad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \frac{\sqrt{3}}{6} b$$

（3） $$I_{yz}=\int_A yzdA=0$$

例：2、圆形。



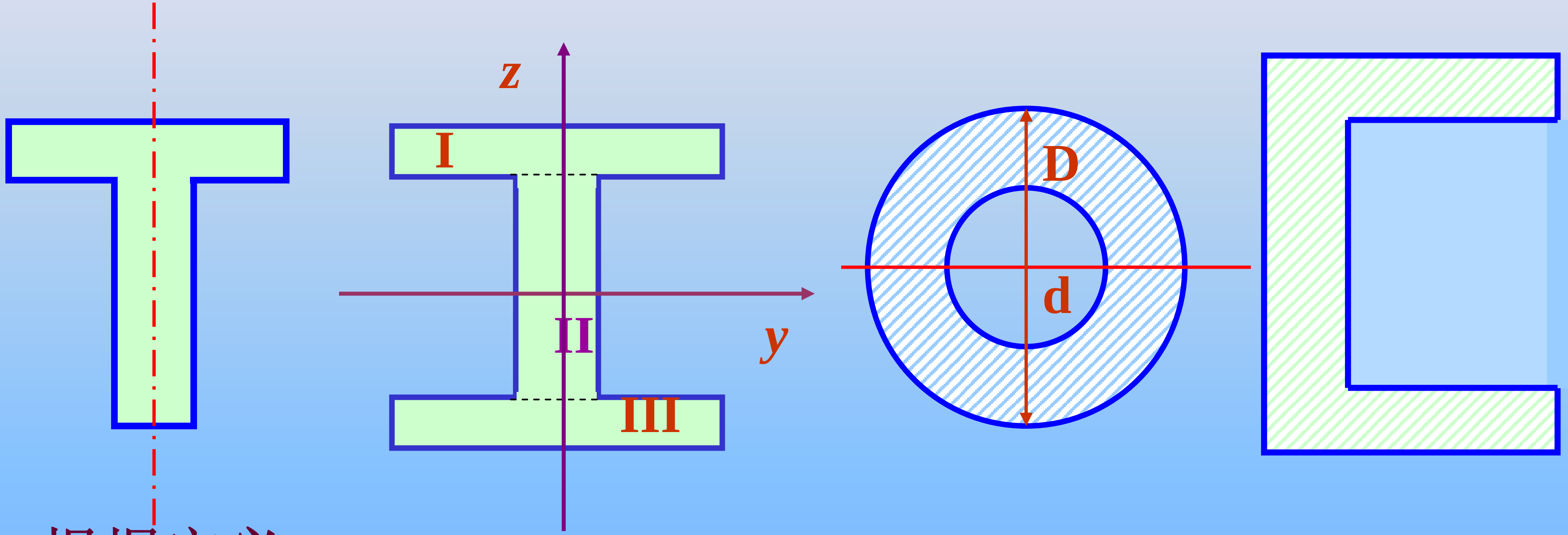
已知 $$I_P=\int_A \rho^2 dA=\frac{1}{32}\pi d^4$$

则 $$I_y+I_z=I_p$$

而 $$I_y=I_z$$

所以 $$I_y=I_z=\frac{1}{2}I_p=\frac{1}{64}\pi d^4$$

二、组合图形的几何性质

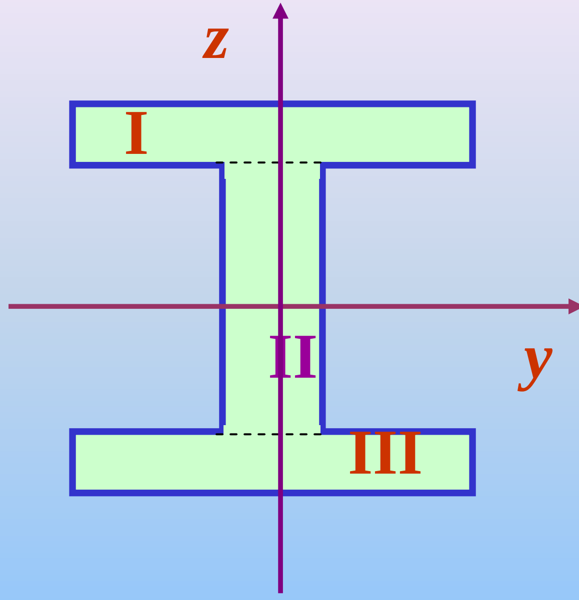


根据定义：

整个图形对某一轴的惯矩（静矩、惯积...）等于各个分图形对同一轴的惯矩（静矩、惯积...）之和。

例如：

$$A = A_I + A_{II} + A_{III} + \cdots$$



则

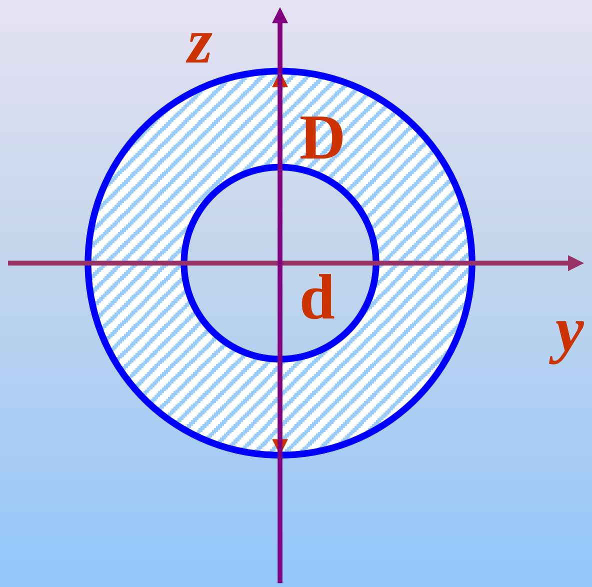
$$I_y = \int_A z^2 dA$$

$$= \int_{A_I} z^2 dA + \int_{A_{II}} z^2 dA + \int_{A_{III}} z^2 dA + \cdots$$

$$= I_{yI} + I_{yII} + I_{yIII} + \cdots = \sum_{i=1}^{m} I_{yi}$$

同理

$$I_z = \sum_{i=1}^{m} I_{zi}, \quad S_y = \sum_{i=1}^{m} S_{yi}, \quad S_z = \sum_{i=1}^{m} S_{zi}, \quad I_{yz} = \sum_{i=1}^{m} I_{yzi}$$



空心圆

$$I_P = I_{P大} - I_{P小}$$

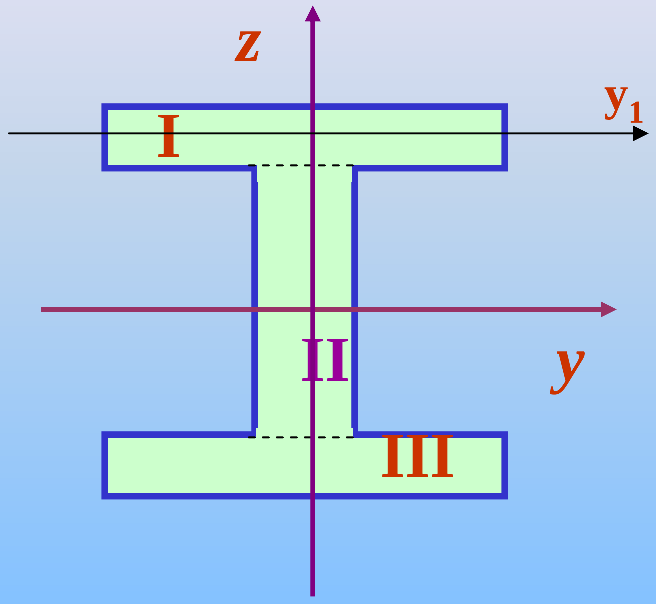
$$= \frac{1}{32}\pi D^4 - \frac{1}{32}\pi d^4$$

$$= \frac{1}{32}\pi D^4 (1-\alpha^4)$$

其中

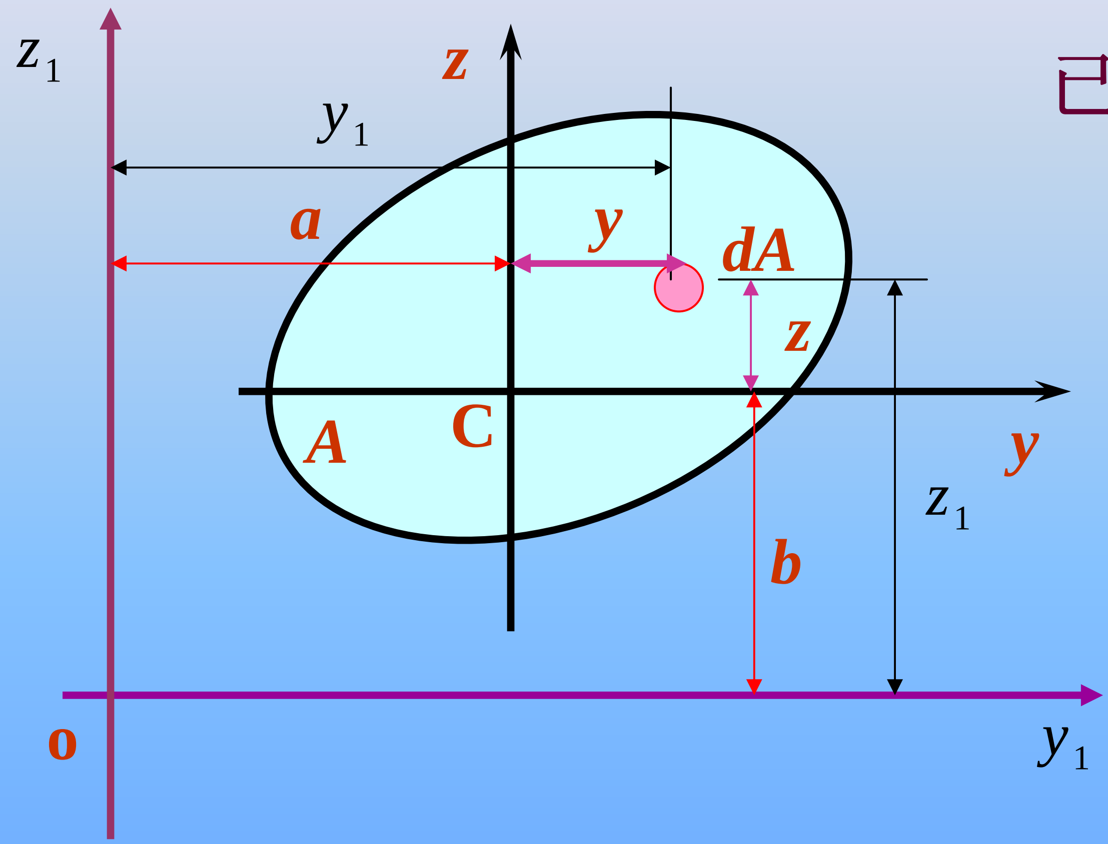
$$\alpha = \frac{d}{D}$$

$$I_y = I_z = I_{z大} - I_{z小} = \frac{1}{64}\pi D^4 (1-\alpha^4)$$



$$I_y = \sum_{i=1}^{3} I_{yi}$$

三、平行移轴公式



已知：$I_z, I_y, I_{yz},$

(y、z轴过形心C)

求 I_{z_1}, I_{y_1}及$I_{y_1 z_1}$

$(y_1 \| y, z_1 \| z)$

解：$\begin{cases} z_1 = z + b, \\ y_1 = y + a, \end{cases}$

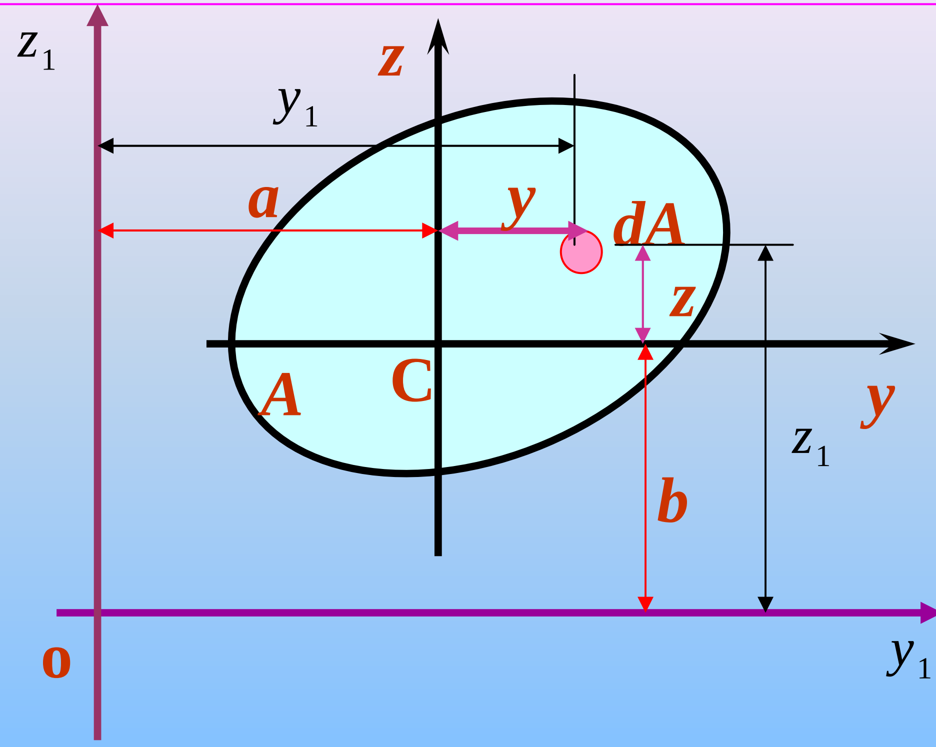
代入定义式：

$$I_{y_1}=\int_A z_1^{\,2}dA=\int_A (z+b)^2 dA$$

$$=\int_A z^2 dA+\int_A 2zbdA+\int_A b^2 dA$$

$$=I_y+\underline{2bS_y}+b^2A$$

$$\boxed{I_{y_1}=I_y+b^2A}$$



同理

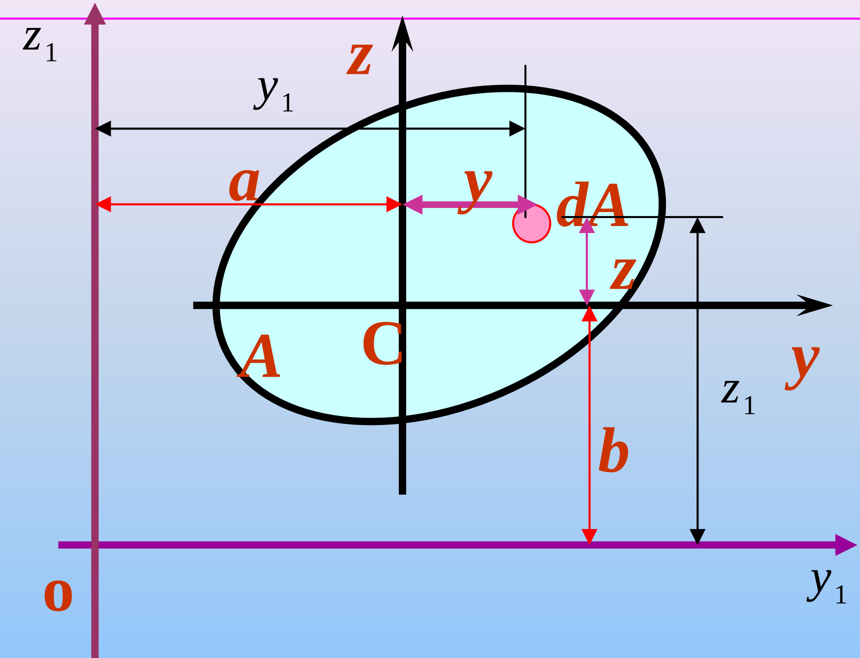
$$\boxed{I_{z_1}=I_z+a^2A}$$

$$I_{y_1z_1}=\int_A y_1z_1dA=\int_A (z+b)(y+a)dA$$

$$=\int_A yzdA+\underbrace{\int_A azdA}_{0}+\underbrace{\int_A bydA}_{0}+\int_A abdA=I_{yz}+abA$$

平行移轴公式

$$\begin{cases} I_{y_1} = I_y + b^2 A \\ I_{z_1} = I_z + a^2 A \\ I_{y_1 z_1} = I_{yz} + abA \end{cases}$$

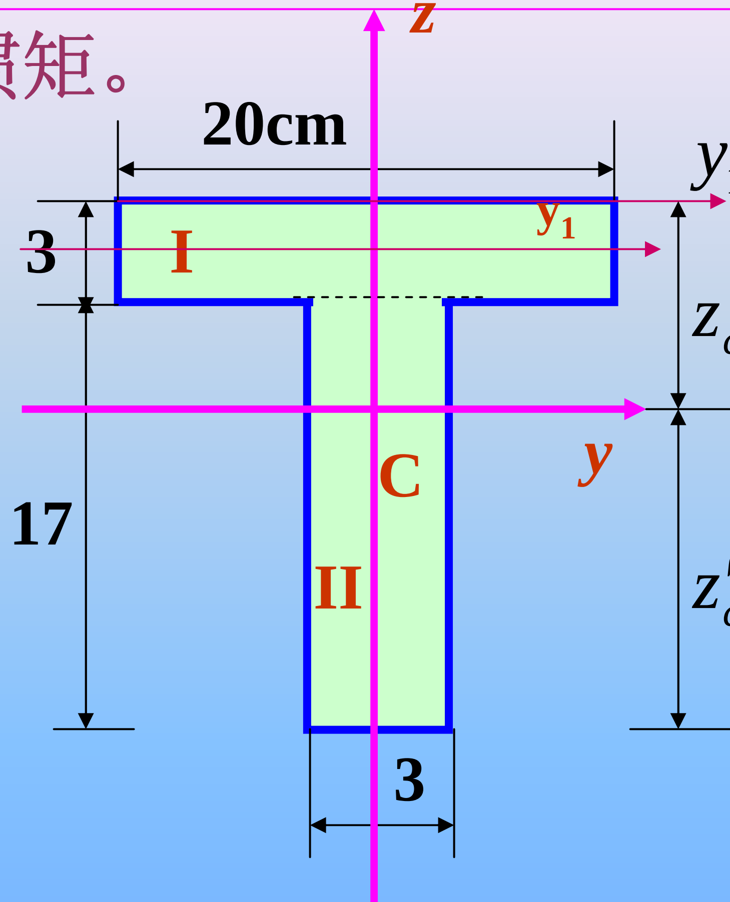


◆注意:

（1）两平行轴中，必须有一轴为形心轴, 截面对任意两平行轴的惯性矩间的关系, 应通过平行的形心轴惯性矩来换算;

（2）截面图形对所有平行轴的惯性矩中, 以对通过形心轴的惯性矩最小.

例：T字形截面,求其对形心轴的惯矩。



解：(1)求形心

任选参考坐标系,如 y_1

$$S_{y_1} = A \cdot z_c$$

而

$$S_{y_1} = S_{y_1}^{I} + S_{y_1}^{II}$$

$$A = A_I + A_{II}$$

$$\therefore z_c = \frac{S_{y_1}}{A} = \frac{S_{y_1}^{I} + S_{y_1}^{II}}{A_I + A_{II}} = \frac{3\times 20\times(-1.5)+3\times 17\times(-3-8.5)}{3\times 20+3\times 17}$$

$$= -6.1cm$$

(2)求 I_{zc}, I_{yc}

$$I_{zc}=I_{zc}^{I}+I_{zc}^{II}=\frac{1}{12}\times3\times20^3+\frac{1}{12}\times17\times3^3$$

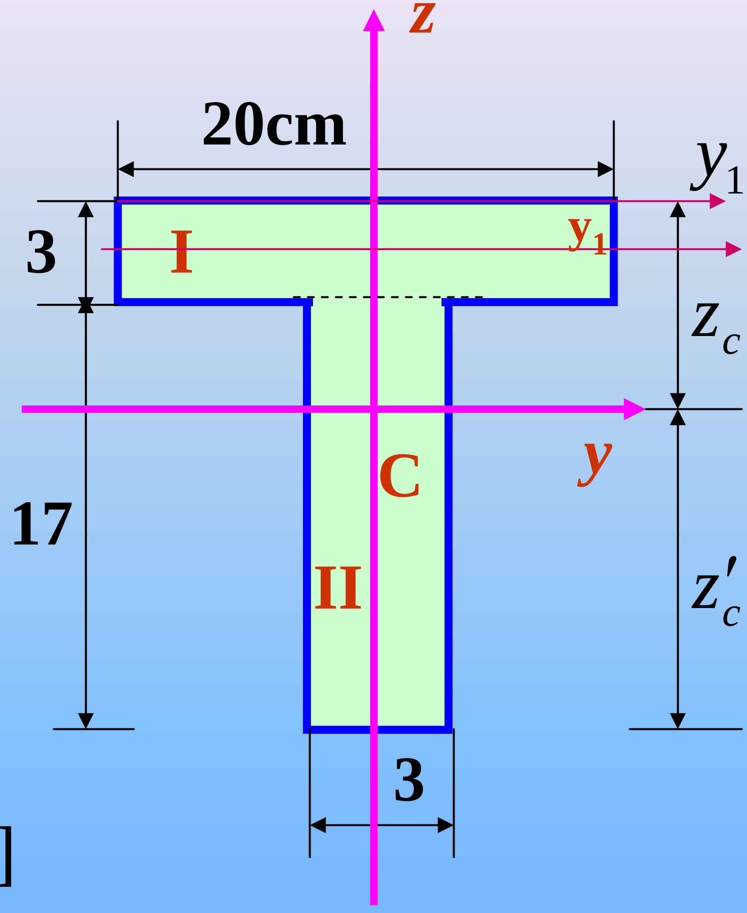
$$=2048\ cm^4$$

$$I_{yc}=I_{yc}^{I}+I_{yc}^{II}$$

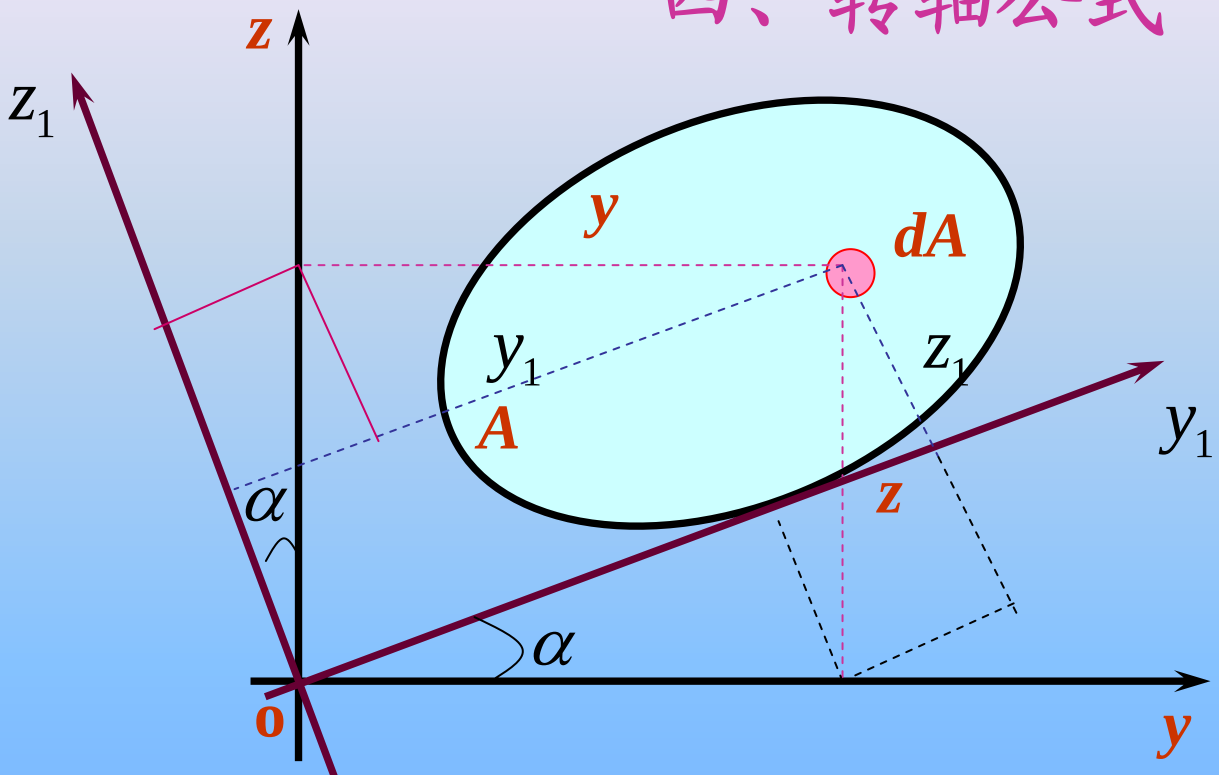
$$=[\frac{1}{12}\times20\times3^3+20\times3\times(z_c-1.5)^2]$$

$$+[\frac{1}{12}\times3\times17^3+17\times3\times(z_c'-8.5)^2]$$

$$=4030\ cm^4$$



四、转轴公式



设一平面图形,已知

$A, I_z, I_y, I_{yz}, \alpha,$

求 I_{z1}, I_{y1}, I_{y1z1}

解:

$$\begin{cases} y_1 = y\cos\alpha + z\sin\alpha \\ z_1 = z\cos\alpha - y\sin\alpha \end{cases}$$

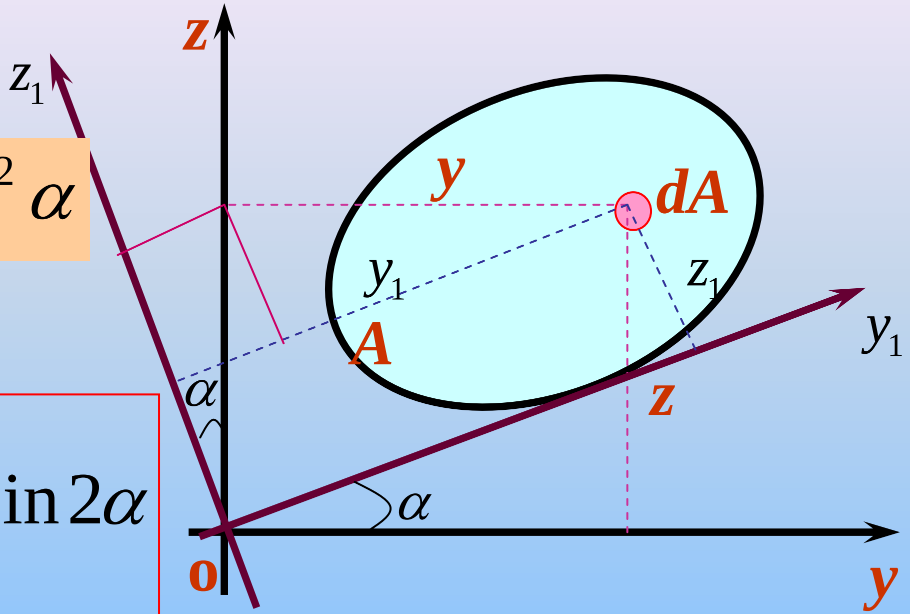
$$I_{y_1} = \int_A z_1^2 dA = \int_A (z\cos\alpha - y\sin\alpha)^2 dA$$

$$= \int_A z^2 \cos^2\alpha dA - 2\sin\alpha\cos\alpha \int_A yz dA + \sin^2\alpha \int_A y^2 dA$$

$$\boxed{= I_y \cos^2\alpha - I_{yz} \sin 2\alpha + I_z \sin^2\alpha}$$

同理

$$I_{z_1} = I_z \cos^2\alpha + I_{yz}\sin 2\alpha + I_y \sin^2\alpha$$



改写为

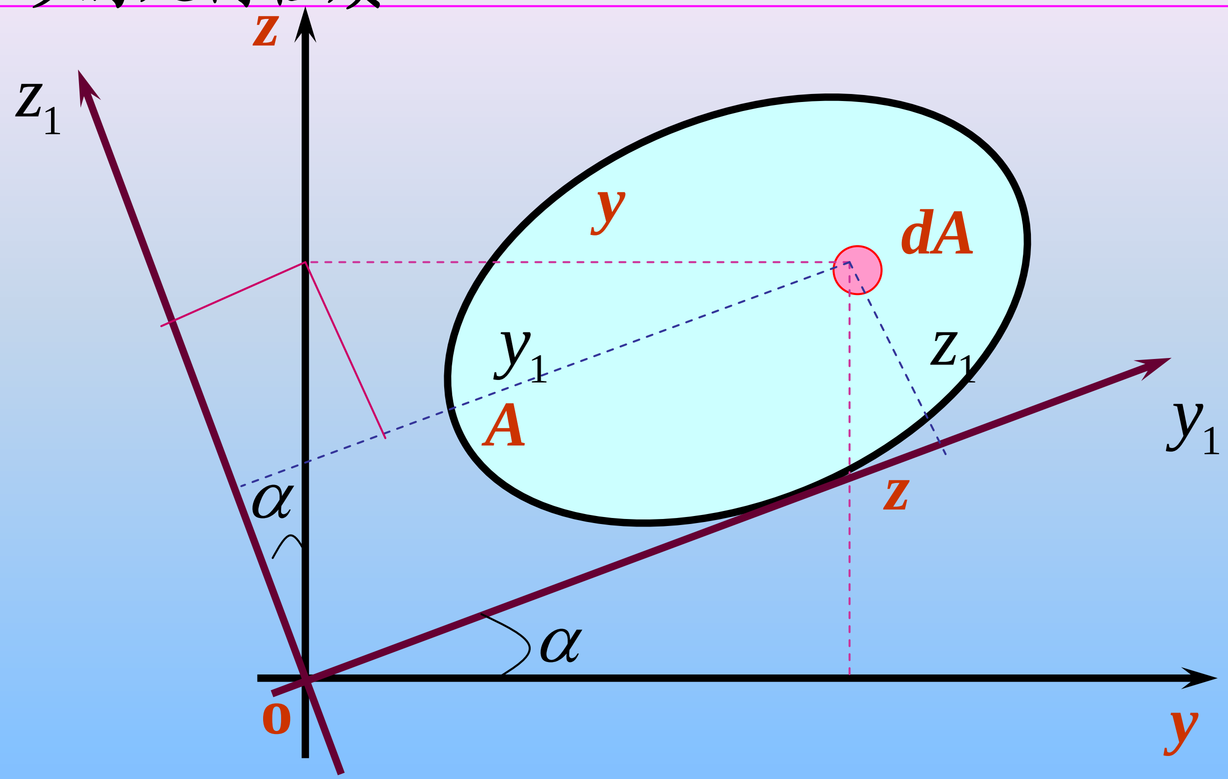
$$I_{y_1} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2}\cos 2\alpha - I_{yz}\sin 2\alpha$$

$$I_{z_1} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2}\cos 2\alpha + I_{yz}\sin 2\alpha$$

并且

$$I_{y_1} + I_{z_1} = I_y + I_z = const$$

α角从原始坐标轴量起,逆时针转向为正,反之则为负.

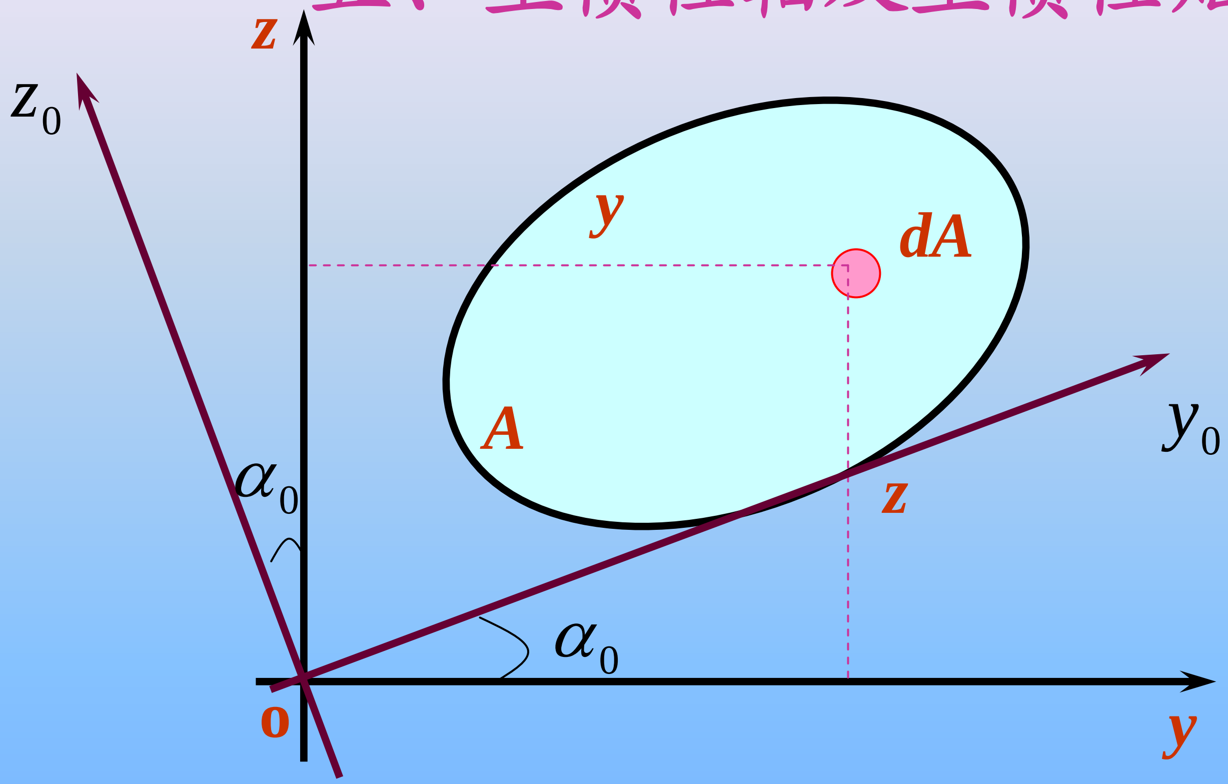


$$I_{y_1z_1}=\int_A y_1z_1\,dA=\int_A(y\cos\alpha+z\sin\alpha)(z\cos\alpha-y\sin\alpha)dA$$

$$=\int_A(z^2-y^2)\sin\alpha\cos\alpha dA+(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\int_A yzdA$$

$$\boxed{=\frac{1}{2}(I_y-I_z)\sin 2\alpha+I_{yz}\cos 2\alpha}$$

五、主惯性轴及主惯性矩



若 $I_{y_0z_0}=0$, 则 y_0, z_0 轴称为主惯性轴（主轴）。

如坐标原点与形心重合,则称为形心主惯性轴。

对主惯性轴的的惯矩称为主惯性矩

方向 α_0 的求解:

$$I_{y_0z_0}=\frac{1}{2}(I_y-I_z)\sin 2\alpha_0+I_{yz}\cos 2\alpha_0=0$$

$$\Rightarrow \boxed{tg2\alpha_0=-\frac{2I_{yz}}{I_y-I_z}}$$

代入,得主惯矩为

$$I_{y_0}=\frac{I_y+I_z}{2}+\frac{I_y-I_z}{2}\cos 2\alpha_0-I_{yz}\sin 2\alpha_0$$

$$I_{z_0}=\frac{I_y+I_z}{2}-\frac{I_y-I_z}{2}\sin 2\alpha_0+I_{yz}\sin 2\alpha_0$$

求 $I_{\max}, I_{\min}$

$$\frac{dI_{y_1}}{d\alpha} = -(I_y - I_z)\sin 2\alpha - 2I_{yz}\cos 2\alpha = 0$$

$$\boxed{tg2\alpha = -\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} = tg2\alpha_0}$$

因此主惯性轴的惯性矩 I_{y_0}, I_{z_0} 即过o点各轴中的惯矩极值.

可求得:

$$\begin{cases} I_{\max} = \dfrac{I_y + I_z}{2} + \dfrac{I_y - I_z}{2}\cos 2\alpha_0 - I_{yz}\sin 2\alpha_0 = I_{y_0} \\ I_{\min} = \dfrac{I_y + I_z}{2} - \dfrac{I_y - I_z}{2}\sin 2\alpha_0 + I_{yz}\sin 2\alpha_0 = I_{z_0} \end{cases}$$

定理:截面图形对某点有一对以上不相重合的主惯轴,则所有通过该点的轴都是主惯轴.

推论:

(1) 当截面图形过某点的一对主惯轴的惯矩相等,则过该点的轴都是主惯轴.

(2) 任何具有三个或三个以上对称轴的截面图形,它所有的形心轴都是主惯轴,且惯矩相等.