第29卷第2期
2012 年 4 月

计 算 力 学 学 报
Chinese Journal of Computational Mechanics

Vol. 29, No. 2
April 2012

文章编号:1007-4708(2012)02-0255-07

两介质流界面-激波相互作用 RKDG方法应用分析

冯　峰*，　王　强

(中国航天空气动力技术研究院,北京 100074)

摘　要:为精确模拟多介质流界面运动现象,采用 RKDG 方法结合虚拟流体方法对气-气、气-液和液-气等多种界面-激波相互作用问题展开研究。数值结果表明,RKDG 方法的时空高精度特征使其能够精确、稳健地求解各种复杂界面运动问题。最后,对水下激波自由面折射问题用多种 DG 格式限制器进行了计算,对比了它们的间断捕捉能力。

关键词:RKDG;虚拟流体方法;界面运动;限制器
中图分类号:V211.3;O357.4　　　**文献标志码**:A

1　引　言

多介质流界面运动是惯性约束聚变、电磁内爆及水下爆炸等现象中的基础物理问题,在科学研究和工程应用中有重要的意义。

求解多介质流界面运动问题主要分为界面追踪和界面捕捉两大类方法。虚拟流体方法 GFM (Ghost Fluid Method)是一种界面追踪方法[1],其利用位标集函数追踪多介质界面位置[2],以虚拟流体单元及等压修定技术确定界面附近流体参量[3],从而可将各介质在整场中分别独立求解。原始 GFM 方法在求解介质属性差异较大及强激波-界面相互作用问题时,不能准确预测界面两侧流动状态,难以一般性推广。Liu 等[4,5]提出了 MGFM (Modified Ghost Fluid Method)方法,其主要思想是在两介质界面处精确或近似求解 Riemann 问题以预测界面处流场状态,并以此定义各流体介质的虚拟状态值,从而获得强激波-界面相互作用问题的准确求解结果。

除要求精确可靠的界面处理技术外,求解多介质流界面运动问题还需要精确稳健的数值格式。RKDG(Runge-Kutta Discontinuous Galerkin)方法是一种具有时空高阶精度的有限元方法[6],与一般有限差分或有限体积方法不同,其精度与所用节点数目关联小,只需当地单元及相邻单元的函数值便可构建高阶格式,故十分适合在 GFM 方法中对界面附近的虚拟单元做流动状态设定,进而精确求解多介质界面运动问题。

文献[7,8]将 RKDG方法应用于部分两介质流界面-激波相互作用问题。本文针对更全面的一维气-气、气-液及液-气等界面与激波相互作用问题,研究 RKDG 方法结合 GFM/MGFM 方法后在处理多介质流界面运动问题中的精确性和稳健性,并通过对二维激波-氦气泡相互作用的求解,验证 RKDG 方法在多维问题中适应性。最后,结合多介质流界面运动算例对多种 DG 格式限制器性能做对比分析。

2　数值方法

2.1　控制方程

一维守恒型 Euler 方程为

$$u_t + f(u)_x = 0 \tag{1}$$

式中　$u = (\rho, \rho v, E)^{\mathrm{T}}$

$$f(u) = (\rho v, \rho v^2 + p, (E+p)v)^{\mathrm{T}}$$

式中　ρ 为密度,v 为速度,p 为压力,总能 $E=\rho e+\rho v^2/2$,e 为比内能。对于完全气体,状态方程为

$$\rho e = \frac{p}{\gamma - 1}$$

比热比 $\gamma = 1.4$。对于水介质,利用 Tait 状态方程,即[1,4]

$$\rho e = \frac{p + N(B-A)}{N-1}$$

式中　$N=7.15$,$A=1.0\times10^5$ Pa,$B=3.31\times10^8$ Pa。

收稿日期:2010-09-24;**修改稿收到日期**:2011-04-05.
作者简介:冯　峰*(1984-),男,博士生,助理工程师(E-mail: fengf@mail.ustc.edu.cn);
王　强(1967-),男,博士生导师,研究员.

2.2 RKDG 有限元方法

将计算区域分为 n 个单元，即 $a=x_{1/2}<x_{3/2}<\cdots<x_{n+1/2}=b$。考虑单元 $I_i=[x_{i-1/2},x_{i+1/2}]$，其中心为 $x_i=\frac{1}{2}(x_{i-1/2}+x_{i+1/2})$，单元长度 $\Delta x_i=x_{i+1/2}-x_{i-1/2}$，$h=\inf_i\Delta x_i$。定义解空间为 $V_h^k=\{p:p|_{I_i}\in P^k(I_i)\}$，其中 $P^k(I_i)$ 是关于单元 I_i 不大于 k 阶多项式空间，在单元 I_i 上采用当地正交基函数 $\{\phi_l^{(i)}(x),l=0,1,\cdots,k\}$，其尺度化 Legendre 多项式：

$$\phi_0^{(i)}(x)=1,\ \phi_1^{(i)}(x)=\frac{x-x_i}{\Delta x_i/2}$$

$$\phi_2^{(i)}(x)=\left(\frac{x-x_i}{\Delta x_i/2}\right)^2-\frac{1}{3}\cdots$$

方程(1)的数值解可写为

$$u^h(x,t)=\sum_{l=0}^{k}u_i^{(l)}(t)\phi_l^{(i)}(x),\ x\in I_i \tag{2}$$

矩变量 $u_i^{(l)}(t)$ 的定义为

$$u_i^{(l)}(t)=\frac{1}{a_l}\int_{I_i}u^h(x,t)\phi_l^{(i)}(x)\mathrm{d}x,\ l=0,1,\cdots,k$$

式中 $a_l=\int_{I_i}(\phi_l^{(i)}(x))^2\mathrm{d}x$ 是基函数非正交时的标准化常数。将式(2)代入方程(1)，并将方程(1)乘以试验函数 $\phi_l^{(i)}(x)$ 后，在单元 I_i 上分部积分，获得针对矩变量 $u_i^{(l)}$ 的控制方程。

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_i^{(l)}+\frac{1}{a_l}\Big(-\int_{I_i}f(u^h(x,t))\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi_l^{(i)}(x)\mathrm{d}x+\\ f(u^h(x_{i+1/2},t))\phi_l^{(i)}(x_{i+1/2})-\\ f(u^h(x_{i-1/2},t))\phi_l^{(i)}(x_{i-1/2})\Big)=0\\ l=0,1,\cdots,k\end{aligned} \tag{3}$$

为满足熵条件，通量 $f(u^h(x_{i+1/2},t))$ 由单调数值通量 $\hat{f}(u_{i+1/2}^-,u_{i+1/2}^+)$ 近似代替，方程(3)可变为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_i^{(l)}+\frac{1}{a_l}\Big(-\int_{I_i}f(u^h(x,t))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi_l^{(i)}(x)\mathrm{d}x+\\ \hat{f}(u_{i+1/2}^-,u_{i+1/2}^+)\phi_l^{(i)}(x_{i+1/2})-\\ \hat{f}(u_{i-1/2}^-,u_{i-1/2}^+)\phi_l^{(i)}(x_{i-1/2})\Big)=0\\ l=0,1,\cdots,k\end{aligned} \tag{4}$$

式中 $u_{i+1/2}^{\pm}=u^h(x_{i+1/2}^{\pm},t)$ 是间断解 u^h 在单元界面 $x_{i+1/2}$ 处左右极限。$\hat{f}(u^-,u^+)$ 由 Lax-Friedrichs 通量形式给出。

$$\hat{f}(u^-,u^+)=\frac{1}{2}[f(u^-)+f(u^+)-\alpha(u^+-u^-)]$$

式中 α 取方程组 Jacobi 矩阵特征值的绝对值上限。式(4)中的积分项由三点 Gauss-Lobatto 数值积分方法获得。取 $k=2$，该 DG 格式具有三阶空间离散精度。

半离散的式(4)写为一般形式：

$$u_t=L(u)$$

对于上式，时间推进采用三阶 TVD 型 Runge-Kutta 格式，即

$$u^{(1)}=u^n+\Delta tL(u^n)$$

$$u^{(2)}=\frac{3}{4}u^n+\frac{1}{4}u^{(1)}+\frac{1}{4}\Delta tL(u^{(1)})$$

$$u^{n+1}=\frac{1}{3}u^n+\frac{2}{3}u^{(2)}+\frac{2}{3}\Delta tL(u^{(2)})$$

2.3 限制器

为抑制非物理振荡，在每 Runge-Kutta 子步推进后引入斜率限制器。采用 TVD 限制器：

$$u_{i+1/2}^-=u_i^{(0)}+\tilde{u}_i,\ u_{i-1/2}^+=u_i^{(0)}-\tilde{\tilde{u}}_i$$

式中

$$\tilde{u}_i=\sum_{l=1}^{k}u_i^{(l)}\phi_l^{(i)}(x_{i+1/2}),\ \tilde{\tilde{u}}_i=-\sum_{l=1}^{k}u_i^{(l)}\phi_l^{(i)}(x_{i-1/2})$$

对 $\tilde{u}_i,\tilde{\tilde{u}}_i$ 使用标准 minmod 限制器修正如下：

$$\tilde{u}_i^{(\mathrm{mod})}=m(\tilde{u}_i,\Delta_+u_i^{(0)},\Delta_-u_i^{(0)})$$

$$\tilde{\tilde{u}}_i^{(\mathrm{mod})}=m(\tilde{\tilde{u}}_i,\Delta_+u_i^{(0)},\Delta_-u_i^{(0)})$$

函数 m 具体形式为

$$m(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\begin{cases}s\cdot\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}|a_j|,\\ \text{if }\operatorname{sign}(a_1)=\operatorname{sign}(a_2)\\ \quad=\cdots=\operatorname{sign}(a_n)=s\\ 0,\ \text{otherwise}\end{cases} \tag{5}$$

在方程求解中，将变量在特征区中进行分解，再应用限制器技术，以获得高质量的修正值。高阶矩变量 $u_i^l(l>0)$ 在限制后设置为 0。

为研究 DG 格式限制器，选取四种限制器[9,10]，其均是对非平滑解单元(troubled cell)进行探测和重构。

(1) BDF 限制器

一种基于矩变量的限制器，形式如下：

$$u_i^{(l),\mathrm{mod}}=\frac{1}{2l-1}m((2l-1)u_i^{(l)},u_{i+1}^{(l-1)}-u_i^{(l-1)},u_i^{(l-1)}-u_{i-1}^{(l-1)}) \tag{6}$$

函数 m 如式(5)定义。

(2) BSB 限制器

BDF 的修正限制器，除需满足式(6)外，还需满足如下关系才认为所探测单元为非平滑解单元：

$$\hat{u}_i^{(l),\mathrm{mod}}=\frac{1}{2l-1}m((2l-1)u_i^{(l)},u_{i+1/2}^{(l-1)+}-u_i^{(l-1)},u_i^{(l-1)}-u_{i-1/2}^{(l-1)-})$$

式中

$$u_{i+1/2}^{(l-1)+}=u_{i+1}^{(l-1)}-(2l-1)u_{i+1}^{(l)}$$

$$u_{i-1/2}^{(l-1)-}=u_{i+1}^{(l-1)}+(2l-1)u_{i-1}^{(l)}$$

限制器从最高阶的矩变量起始实施。

(3) MP 限制器

一种可保证光滑极限解(smooth extrema)附近精度的限制器。首先定义 median 函数:

$$\mathrm{median}(x,y,z)=x+m(y-x,z-x)$$

m 如式(5)定义。若

$$u_{i+1/2}^{-}\neq \mathrm{median}(u_{i+1/2}^{-},u_{i+1/2}^{\min},u_{i+1/2}^{\max})$$

式中

$$u_{i+1/2}^{\min}=\max[\min(u_i^{(0)},u_{i+1}^{(0)},u_{i+1/2}^{\mathrm{MD}}),\min(u_i^{(0)},u_{i+1/2}^{\mathrm{UL}},u_{i+1/2}^{\mathrm{LC}})]$$

$$u_{i+1/2}^{\max}=\min[\max(u_i^{(0)},u_{i+1}^{(0)},u_{i+1/2}^{\mathrm{MD}}),\max(u_i^{(0)},u_{i+1/2}^{\mathrm{UL}},u_{i+1/2}^{\mathrm{LC}})]$$

及

$$d_i=u_{i+1}^{(0)}-2u_i^{(0)}+u_{i-1}^{(0)}$$

$$d_{i+1/2}^{\mathrm{M4X}}=m(4d_i-d_{i+1},4d_{i+1}-d_i,d_i,d_{i+1},d_{i-1},d_{i+2})$$

$$u_{i+1/2}^{\mathrm{MD}}=\frac{1}{2}(u_i^{(0)}+u_{i+1}^{(0)}-d_{i+1/2}^{\mathrm{M4X}})$$

$$u_{i+1/2}^{\mathrm{UL}}=u_i^{(0)}+\alpha(u_i^{(0)}-u_{i-1}^{(0)})$$

$$u_{i+1/2}^{\mathrm{LC}}=u_i^{(0)}+\frac{1}{2}(u_i^{(0)}-u_{i-1}^{(0)})+\frac{\beta}{3}d_{i-1/2}^{\mathrm{M4X}}$$

或满足关于 $u_{i-1/2}^{+}$ 的相似(对称)条件,则确定所探测单元为非平滑解单元。式中 $\alpha=2,\beta=4$。

(4) MMP 限制器

该限制器被认为是 MP 的修正限制器,放松了严格保单条件。形式如下:

$$\phi=\min(1,\Delta\bar{u}^{\min}/\Delta_{\min}u)$$

式中

$$\Delta\bar{u}^{\min}=u_i^{(0)}-\min(u_{i-1}^{(0)},u_i^{(0)},u_{i+1}^{(0)})$$

$$\Delta_{\min}u=u_i^{(0)}-\min(u_{i-1/2}^{+},u_{i+1/2}^{-})$$

当 $\phi\neq 1$ 时,即确定探测单元为非平滑解单元,对其解进行重构。

使用上述限制器探测非平滑解单元后,各矩变量均采用式(6)获得的修正矩变量重构原矩变量,而文献[10]中探测出非平滑解单元单元后,使用 WENO方法对非平滑解单元各矩变量值进行重构。

2.4　GFM 方法

实施 GFM 方法时,首先通过求解位标集方程确定多介质流体界面位置,其次通过定义靠近边界处虚拟流体界面附近单元属性值,间接向真实流体提供边界条件。对于弱间断问题,根据等熵条件认为界面两侧的速度及压力连续,对虚拟流体直接赋值,而其密度值需利用等熵关系求解。实际情形中,熵值难以显式给出,需求解下式。

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}p}=c^{-2}$$

即等熵条件下虚拟流体与界面附近真实流体声速相等来确定虚拟流体密度值[3,4]。实际求解中,需扩展 GFM 方法处理虚拟流体的区域,以避免可能的过热现象发生,即等压修定技术。

应用以上方法交替处理两介质流,并结合 RKDG 算法反复推进,获得整体流场解。

对于强间断问题,基于等压修定技术的 GFM 方法不再适用。Liu 等[2] 分析,当强激波穿透界面时,会有反射波系和入射波系产生,对反射波系估定不准确,导致 GFM 方法失效。对此 Liu 等提出 MGFM 方法,该方法在界面处精确求解 Riemann 问题以预测界面处流场状态,并利用界面状态值定义虚拟流体状态值,获得了更为准确的界面处理结果。文献[4,5,13]中有该方法详细的描述,本文采用文献[5]改进后的显式求解方法获得界面处压力和速度等状态变量值。值得注意的是,本文在求解强激波-气液界面时采用了 MGFM 方法,而对弱激波-气气界面则采用了 GFM 方法。

3　数值结果

3.1　一维算例

一维算例均使用201个网格单元[4,7,8],计算域长为1(单位:m),一维激波-界面作用模型如图1所示,即正激波由介质1内向右运动如图1(a)所示,在与介质2的界面处反射后形成反射波和穿透激波如图1(b)所示。

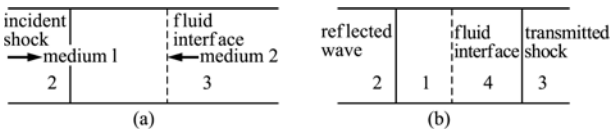

图1　一维激波-界面相互作用示意图

Fig. 1　The sketch of 1D shock impacting on medium interface

算例1　该算例描述入射激波在空气-氦气界面处的折射现象[1,4,7,11],流动初始条件如下:

$$(\rho,u,p,\gamma)=\begin{cases}(1.3333,111.7865,1.5\times10^5,1.4), & x\leqslant 0.05\\(1.0,0,1.0\times10^5,1.4), & 0.05<x\leqslant 0.5\\(0.1379,0,1.0\times10^5,5/3), & 0.5<x\end{cases}$$

量纲为(kg/m³,m/s,Pa,1),激波初始位置在 $x=0.05$ 处,强度为 $p_L/p_R=1.5$,空气-氦气界面位于 $x=0.5$;计算至 $t=0.0012$ s,结果如图2所示。由图2(a)密度变化可知,入射激波由空气介质内向右运动穿透空气-氦气界面;受激波冲击作用,介质界面向右运动,界面左侧空气介质内有明显的稀疏波形成。从图2可以看出,数值结果与精确解符合

很好，RKDG 方法准确捕捉了向左运动的稀疏波和向右运动的激波，展现了 RKDG 与 GFM 方法结合后对多介质界面问题的精确计算能力。

算例 2 该算例描述气体激波冲击气-水界面的情形[4,11]，初始条件如下：

$$(\rho,u,p,\gamma)=\begin{cases}(5.9652\times10^{-3},\ 911.882,\ 1000,\ 1.4), & x<0.5\\ (0.001,\ 0,\ 1.0,\ 1.4), & x=0.5\\ (1.0,\ 0,\ 1.0,\ 7.15), & 0.5<x\end{cases}$$

量纲为(1000 kg/m^3，10 m/s，10^5 Pa，1)，初始时刻激波位于 $x=0.5$ 处，初始时刻激波与空气-水界面重合，强度为 $p_L/p_R=1000$。$t=0.0007$ (s/10) 时刻，采用了 MGFM 方法所得到的计算结果如图 3 所示。该算例中强激波冲击气-液界面后，在界面处折射，空气中的反射波和水中的穿透波均为激波。如图 3(b)所示，在激波扫过的区域的压力值约为高压空气初始压力值的 7.5 倍。事实上采用 GFM 方法，由于不能准确计算激波冲击后界面两侧流体属性值而求解失败。结合 MGFM 与 RKDG 方法则能精确和稳健地给出激波-界面作用后的界面流场状态。

算例 3 空气-水激波管问题[4,7]，源于水下爆炸问题，高压区位于气体一侧。初始条件如下：

$$(\rho,u,p,\gamma)=\begin{cases}(1270,\ 0,\ 8.0\times10^{8},\ 1.4), & x\leqslant0.5\\ (1000,\ 0,\ 1.0\times10^{5},\ 7.15), & x>0.5\end{cases}$$

量纲为(kg/m^3，m/s，Pa，1)，初始时刻空气-水界面位于 $x=0.5$ 处，计算至 $t=0.00016$ s，结果如图 4 所示。初始时刻气体侧压力极高，导致强激波形成。强激波在界面处反射后产生在空气中向左行进的稀疏波。相对于文献[4]的速度和压力计算结果，采用了 RKDG 方法后，激波后的振荡被有效抑制，空气中的稀疏波位置捕捉也更加精确。

算例 4 水下激波自由面折射问题，描述水下激波冲击水-空气界面现象[4]，初始条件如下：

$$(\rho,u,p,\gamma)=\begin{cases}(1037.362,\ 0.188,\ 1000,\ 7.15), & x<0.7\\ (1000,\ 0,\ 1.0,\ 7.15), & x=0.7\\ (1.0,\ 0,\ 1.0,\ 1.4), & 0.7<x\end{cases}$$

量纲为(kg/m^3，$\sqrt{10^5}$ m/s，10^5 Pa，1)，初始时刻水-空气界面位于 $x=0.7$ 处，计算至 $t=0.12$ (s/$\sqrt{10^5}$)，与文献[4]中问题 8 的计算时刻相当。根据文献[4]，当激波由水介质向空气一侧运动，在界面处折射后，反射回水介质的是强稀疏波，而穿透进入空气介质的是弱激波，穿透激波的强度相比入射激波强度呈量级下降。激波强度的突然衰减易引起稀疏波及介质界面附近的数值振荡，给数值求解带来一定的困难。采用 RKDG 与 MGFM 方法结合后，如图 5 所示，不仅给出了界面和稀疏波的准确位置，还更准确预测了穿透激波的强度及运动位置。

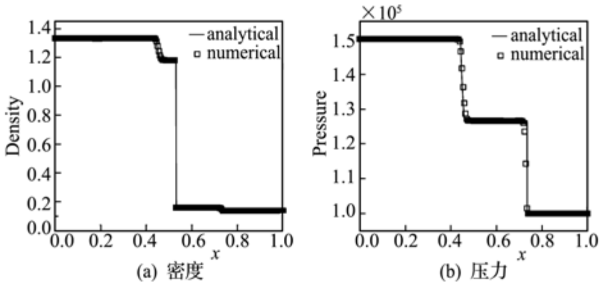

图 2 激波-空气氦气界面相互作用，$t=0.0012$ s

Fig. 2 Shock impacting on air-helium interface, $t=0.0012$ s

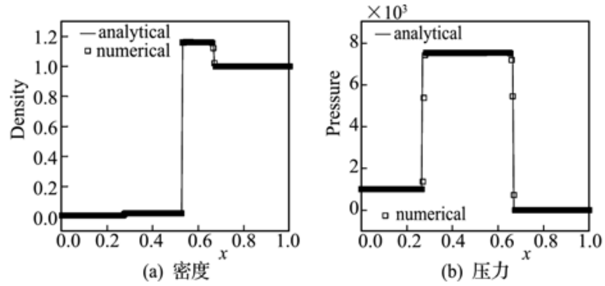

图 3 激波-空气水界面相互作用，$t=0.0007$ (s/10)

Fig. 3 Shock impacting on air-water interface, $t=0.0007$ (s/10)

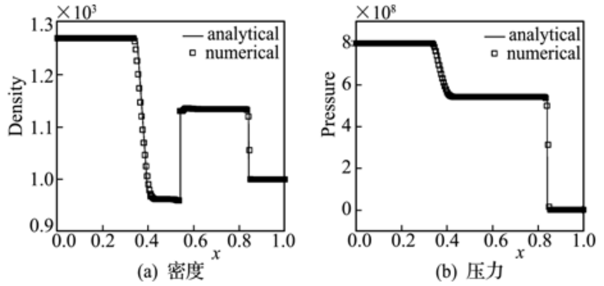

图 4 空气-水激波管问题，$t=0.00016$ s

Fig. 4 Air-water shock tube problem, $t=0.00016$ s

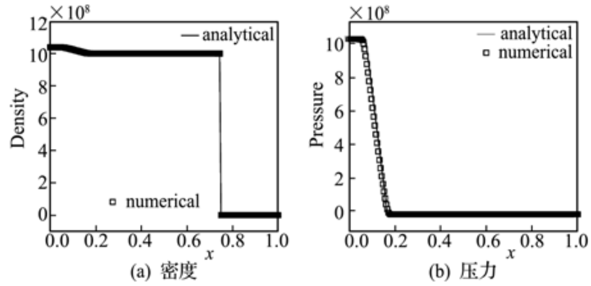

图 5 水下激波自由面折射问题，$t=0.12$ (s/$\sqrt{10^5}$)

Fig. 5 Underwater shock refracting at a free surface, $t=0.12$ (s/$\sqrt{10^5}$)

3.2　二维算例

本文将数值方法推广至二维入射激波与氦气泡相互作用问题,以验证其对多维问题的适应性。

文献[12]采用流体体积分数的混合型多流体数值模型,结合自适应网格加密(Adaptive Mesh Refinement)技术后,给出很好的多介质界面运动求解结果。依赖于时空高阶精度性能,本文采用RKDG结合GFM方法对该问题进行求解。使用482×122个等距网格单元,计算模型为[0,320]×[0,80] mm^2 的矩形域中悬浮半径为20 mm的一个静止氦气泡。初始条件如下:

$$(\rho,u,p,\gamma)=\begin{cases}(1.73,-0.1,0.15133,1.4), & x=320\ \mathrm{mm}\\(0.167,0,0.1,5/3), & x^2+y^2<400\ \mathrm{mm}^2\\(1.29,0,0.1,1.4), & \text{others}\end{cases}$$

量纲为($\mathrm{kg/m^3}$,mm/μs,Pa,1),激波强度为 Ma=1.2,且由气泡右侧向左运动。根据物理问题,在计算域的上下壁采用反射边界条件,左右侧采用出口与入口边界条件。

图6是在不同推进时刻下基于密度梯度的流场纹影图。由于入射激波在氦气中行进速度快于空气中,如图6所示,$t=50$ μs时,激波穿透氦气泡后呈弧形继续向前推进。空气中行进的激波与气泡边界作用形成反射稀疏波,同时与弧形激波相遇形成交叉激波;继续推进至 $t=150$ μs时刻,弧形激波与空气中的正激波交叉且在上下壁面反射,且正激波与反射激波逐渐汇合,与弧形激波一起继续向左运动。

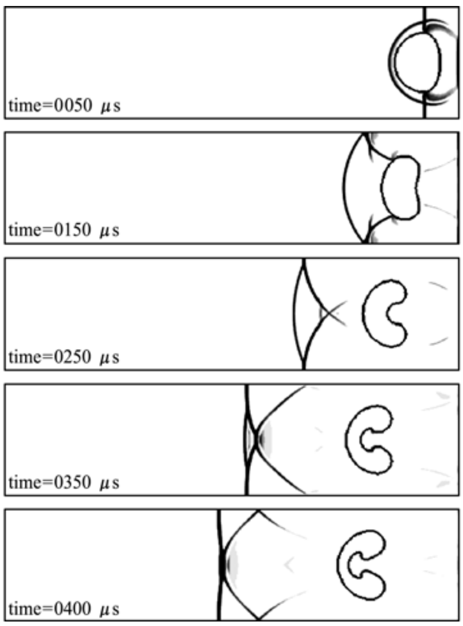

图6　激波-氦气泡相互作用密度场纹影图

Fig. 6　Schlieren images of density field for shock-helium bubble interaction

$t=250$ μs反射激波交叉,弧形激波弧度减小。在 $t=350$ μs～400 μs弧形激波与反射激波逐渐合并,反射激波形成的交叉激波再次在上下壁面微弱反射,但仍能被RKDG方法捕捉。

当入射激波穿过气泡时,在气泡界面处有斜压涡量出现,初始涡量的传输方程可写为

$$\frac{D\omega}{Dt}=\frac{1}{\rho^2}\nabla\rho\times\nabla p$$

式中 ω 为涡量。由于气泡表面曲率的存在,使得气泡界面附近的密度梯度与初始激波的压力梯度不一致($\nabla\rho\times\nabla p\neq0$);由上式可知界面处将有涡量生成,导致气泡向涡环转变,并使得气泡在运动过程中变形[14]。受网格数目的限制,本文未能对气泡界面处涡的卷起给出更精细的模拟,但准确捕捉了流场波系演变和气泡运动过程中的位置及形状变化,印证了RKDG方法求解复杂高维激波-多介质界面问题的能力。文献[12]采用7层自适应加密网格后,等效网格3072×768,可给出气泡界面处的旋涡卷起及气泡被分割过程的精细描述。

3.3　水下激波自由面折射问题 DG 限制器对比分析

作为一种占用网格节点少、空间精度高的数值方法,DG格式有其独特的优越性。然而DG格式仍然处于不断完善的阶段,尤其是限制器技术还不够成熟。本文试图结合强间断问题,对DG格式的限制器展开研究。

选取第3.1节中算例4的问题为研究对象,该算例中两介质物理属性差异较大,强激波冲击界面后,穿透激波相对微弱;大的压力与密度落差容易导致数值求解不稳定,这些特征恰好能考验数值格式的精确性和稳健性。

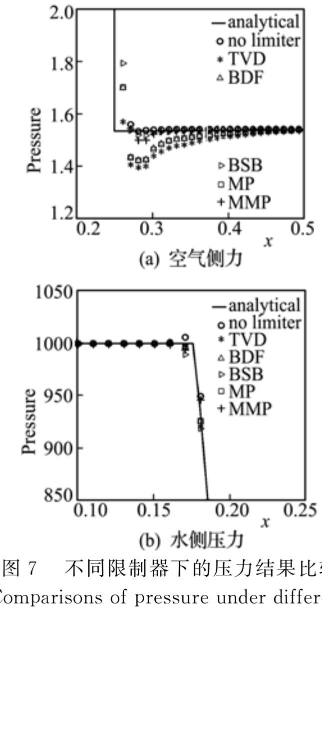

图7　不同限制器下的压力结果比较

Fig. 7　Comparisons of pressure under different limiters

初始激波位于$x=0.5$处,计算至$t=0.06(\mathrm{s}/\sqrt{10^5})$。如图7(b)所示,RKDG方法未采用限制器时,在靠近界面的水一侧出现压力振荡。使用TVD限制器该数值振荡得到抑制后,由该限制器导致气体侧压力在很大区域内被严重低估如图7(a)所示。这是因为TVD限制器在识别界面附近非平滑解单元时,将检测单元与其前后单元的解做比较判定,并获得重构解,在重构解的过程中引入了重构误差。TVD限制器在辨别非平滑解单元时,不能很好地区分极限光滑解与间断解,导致很多正常单元被误判,使得大范围正常单元解被重构。

本文将多种限制器应用于水下激波自由面折射问题,发现不同限制器间有较大的差异[10]。如图7(a)所示,TVD限制器对压力低估最为严重,其次是BDF和MP限制器。BDF和MP限制器对解的限制都较严格,且由于采用了相同的重构方法,二者计算结果相当。BSB和MMP限制器均获得了与精确解符合较好的结果,然而如文献[10]所述,MMP限制器对解的限制较弱,易导致数值求解不稳定,对非平滑解单元探测准确的BSB限制器性能则较稳健。另外几种激波-界面作用问题求解时,激波冲击界面引起的数值求解不稳定性在当地流体属性预测中的影响较弱,各限制器间的差异不明显,故本文未再讨论。

4 结 论

采用RKDG与GFM/MGFM结合的方法,对各种多介质界面-激波相互作用问题做了深入研究,形成如下结论。

(1) 通过一维气-气、气-液、液-气界面-激波问题的计算,表明了RKDG方法可以精确、稳健地求解各种多介质界面-激波相互作用问题。

(2) 二维激波-氦气泡相互作用问题的模拟结果,证实了RKDG与GFM结合的方法,在多维问题求解中的良好适应能力。

(3) 激波-水气界面问题中DG格式限制器性能对比分析,说明了不同限制器的性能有较大差异。对于本文算例,BSB限制器表现优异,而TVD限制器对压力的低估相对较为严重,DG格式的限制器仍有待于不断地研究和完善。

参考文献(References):

[1] Fedkiw R P, Aslam T, Merriman B, Osher S. A non-oscillatory Eulerian approach to interfaces in multi-material flows(the ghost fluid method)[J]. *J Comput. Phys*, 1999, **152**: 457-492.

[2] Osher S, Sethian A. Fronts propagating with curvature dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations[J]. *J Comput. Phys*, 1988, **79**: 12-49.

[3] Fedkiw R P, Marquina A, Merriman B. An isobaric fix for the overheating problem in multimaterial compressible flows[J]. *J Comput. Phys*, 1999, **148**: 545-578.

[4] Liu T G, Khoo B C, Yeo K S. Ghost fluid method for strong shock impacting on material interface[J]. *J Comput. Phys*, 2003, **190**: 651-681.

[5] Xie W F, Liu T G, Khoo B C. The simulation of cavitating flows induced by underwater shock and free surface interaction[J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2007, **57**: 734-745.

[6] Cockburn B, Shu C W. Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for convection-dominated problems [J]. *J Comput. Phys*, 2001, **16**: 173-261.

[7] Qiu J X, Liu T G, Khoo B C. Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods for compressible two-medium flow simulations: one-dimensional case[J]. *J Comput. Phys*, 2007, **222**: 353-373.

[8] Qiu J X, Liu T G, Khoo B C. Simulations of compressible two-medium flow by Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods with the ghost fluid method[J]. *Commun Comput. Phys*, 2008, **3**: 479-504.

[9] Qiu J X, Shu C W. Hermite WENO schemes and their application as limiters for Runge-Kutta discontinuous Galerkin method: one-dimensional case[J]. *J Comput. Phys*, 2003, **193**: 115-135.

[10] Qiu J X, Shu C W. A comparison of troubled-cell indicators for Runge-Kutta discontinuous Galerkin method using weighted essentially nonoscillatory limiters[J]. *SIAM J Sci Comput.*, 2005, **27**: 995-1013.

[11] Wang D H, Zhao N, Hu O, Liu J M. A ghost fluid based front tracking method for multimedium compressible flows[J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2009, **29**: 1629-1646.

[12] Lee T S, Zheng J G, Winoto H. An interface-capturing method for resolving compressible two-fluid

flows with general equation of state[J]. *Commun Comput. Phys*, 2009, **6**: 1137-1162.

[13] 王 革,张 斌. Level set 方法和多介质可压缩流[J]. 计算力学学报, 2008, **25**: 48-51. (WANG Ge, ZHANG Bin. Level set method and computation of compressible multi-fluid flows[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2008, **25**: 48-51. (in Chinese))

[14] Ranjan D, Niederhaus J H J, Oakley J G, Anderson M H, Bonazza R, Greenough J A. Shock-bubble interactions: features of divergent shock-refraction geometry observed in experiments and simulations[J]. *Physics of Fluids*, 2008, **20**: 036101(1-20).

The application and analysis of Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for shock interaction with two-medium interface flow

FENG Feng*, WANG Qiang

(Chinese Academy of Aerospace Aerodynamic, Beijing 100074, China)

Abstract: In order to simulate the compressible two-medium flow in high accuracy, the Runge-Kutta discontinuous Galerkin (RKDG) method combining the ghost fluid method has been applied to gas-gas/gas-liquid interface interaction with shock in this paper. The numerical results indicate that the RKDG method is a high order scheme in both temporal and spatial discretization. This method deals with multi-medium complex flow accurately and robustly. Several limiters of the discontinuous Galerkin (DG) method have been used to compute underwater shock refracting at a free surface, and the characteristic behaviors of these limiters have been analyzed in the end.

Key words: RKDG; GFM; two-medium flow; limiter

(上接第 254 页)

Numerical studies of the first inverse pitchfork bifurcations for natural convections enclosed in a 2D horizontal rectangular cavity

WANG Xiao-hua

(Institute of Fluid Engineering, School of Aeronautics and Astronautics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: A second order Euler-Taylor-Galerkin finite element method of fractional steps was used in the numerical study of the evolution processes of bifurcations for natural convections of water at three different Pr enclosed in a rectangular cavity with aspect ratio L/B =3. 5 (plotted in Fig. 1). A new phenomenon of vortex merging in laminar flow has been found for all the three Pr. The vortex merging phenomenon discovered in the present paper is a new mode pitchfork bifurcation, the inverse pitchfork bifurcation. Moreover, aided by the variation of flow topologies and velocity profiles of velocity v vs. x at y=0. 5 for each cavity, corresponding critical Rayleigh numbers were numerical predicted by using the bisection method. It can be deduced f rom the presented results that the critical Ra increased with the increase in Pr.

Key words: enclosed horizontal rectangular cavity; natural convection; the first inverse pitchfork bifurcation; cell merging; saddles; Prandtl numbers effect