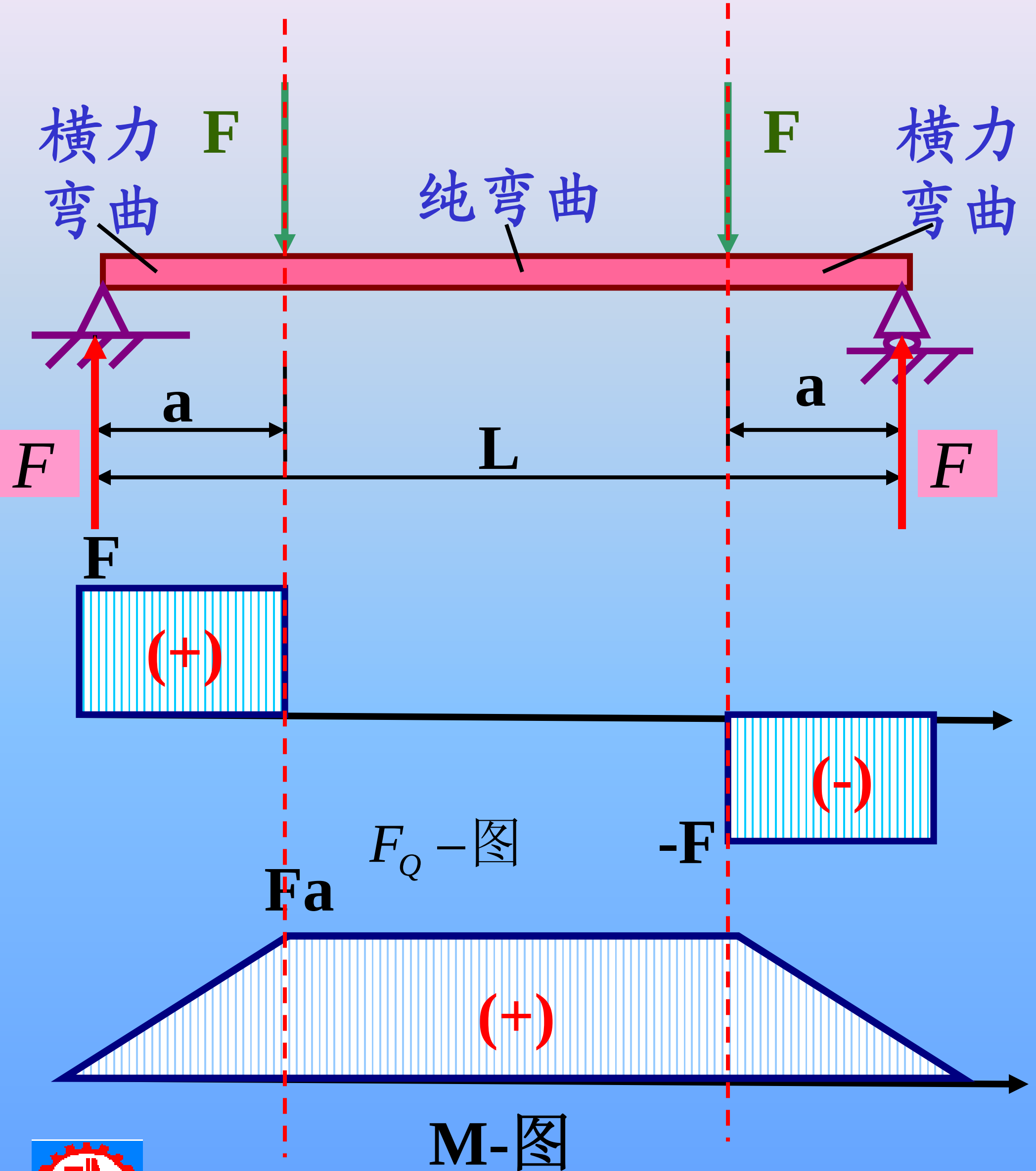
第六章 弯曲应力

一、纯弯曲时梁横截面上的正应力



纯弯曲——梁弯曲变形时，横截面上只有弯矩而无剪力（ $M \neq 0, F_Q = 0$ ）。

横力弯曲——梁弯曲变形时，横截面上既有弯矩又有剪力（ $M \neq 0, F_Q \neq 0$ ）。

正应力分析方法

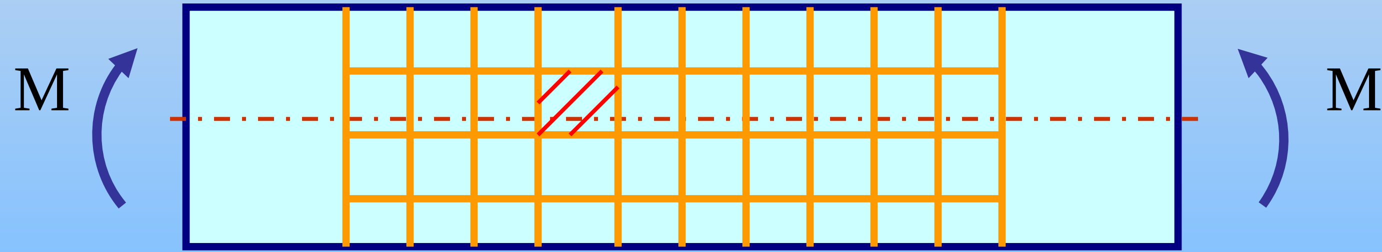
1. 外力分析（确定约束反力）
2. 内力分析（绘剪力图、弯矩图）
3. 平面假定与变形协调方程
4. 应变分布与应力分布
5. 应用静力学方程确定待定常数
6. 正应力表达式

1、研究对象：等直细长对称截面梁

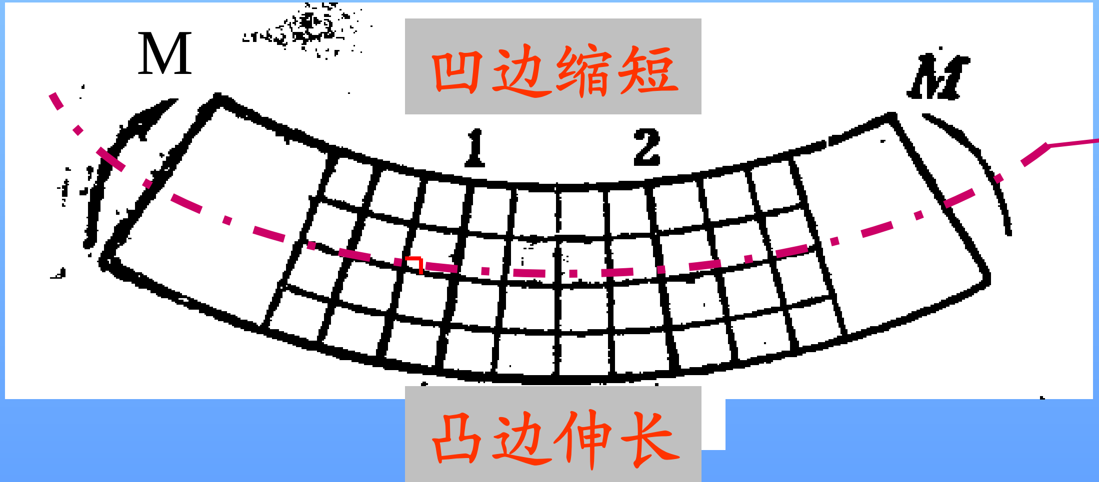
2、前提：(a) 小变形——在弹性变形范围内，

(b) 满足平面弯曲条件，（c）纯弯曲。

3、实验观察：



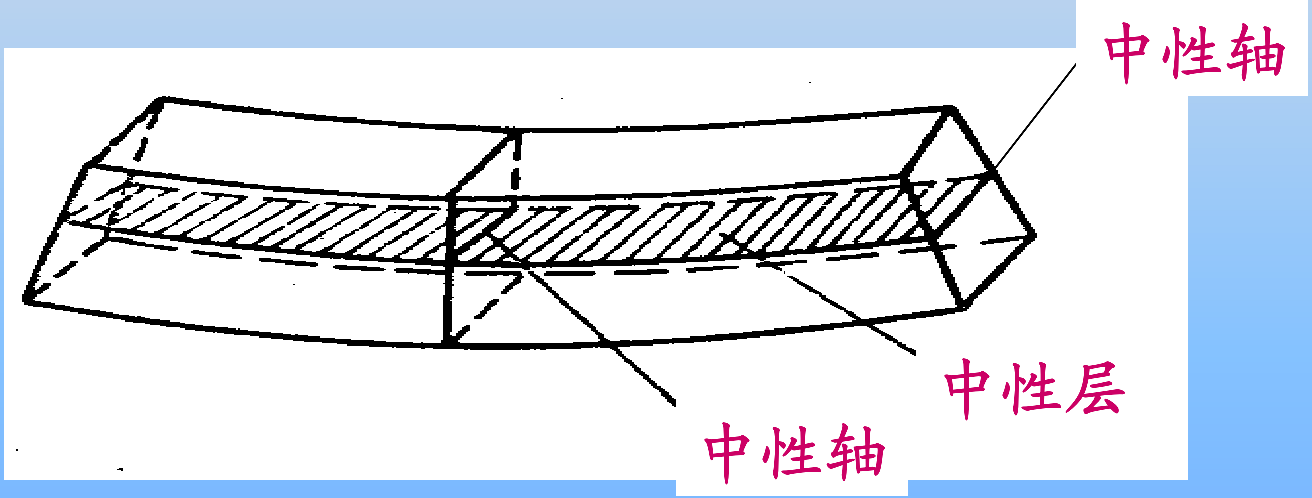
横截面上只有正应力无剪应力



纵向纤维间无挤压作用

中性层——杆件弯曲变形时，其纵向线段既不伸长又不缩短的曲面。

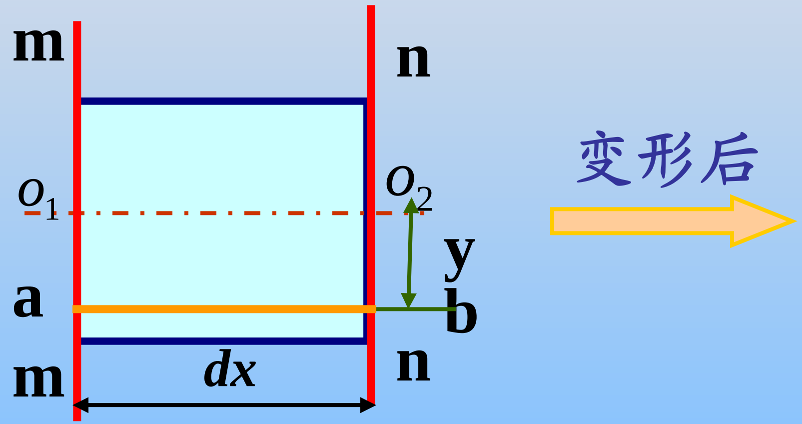
中性轴——中性层与横截面的交线。

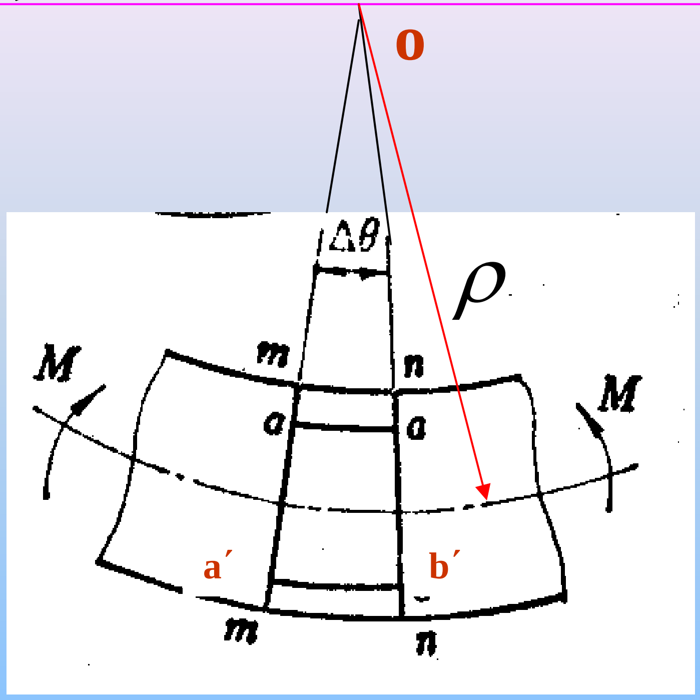


4、平面截面假设——横截面变形后保持为平面，只是绕中性轴旋转了一角度。

5、理论分析

（1）变形分布规律





ρ——中性层O_1O_2的曲率半径， o——曲率中心，

y——任意纵向纤维至中性层的距离

纵向纤维bb: 变形前 $\overline{ab}=\overline{O_1O_2}=dx=\rho d\theta$

变形后 $\overline{a'b'}=(\rho+y)d\theta$

所以纵向纤维ab的应变为:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\overline{ab}}{\overline{ab}} = \frac{(\rho+y)d\theta - \rho d\theta}{dx} = \frac{y d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho} \qquad \text{(a)}$$

——横截面上距中性轴为y处的轴向变形规律。

曲率 $\frac{1}{\rho}(\uparrow)$, 则 $\varepsilon(\uparrow)$; 曲率 $\frac{1}{\rho}(\downarrow)$, 则 $\varepsilon(\downarrow)$; $\frac{1}{\rho} = C, \varepsilon \propto y$.

当 $y = 0$ 时, $\varepsilon = 0$; $|y| = y_{\max}$ 时, $\varepsilon = |\varepsilon_{\max}|$.

——与实验结果相符。

（2）应力分布规律

在线弹性范围内，应用胡克定律

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{y}{\rho} \qquad \text{(b)}$$

对一定材料，**E=C**；对一定截面，$\boxed{\frac{1}{\rho} = C.}$

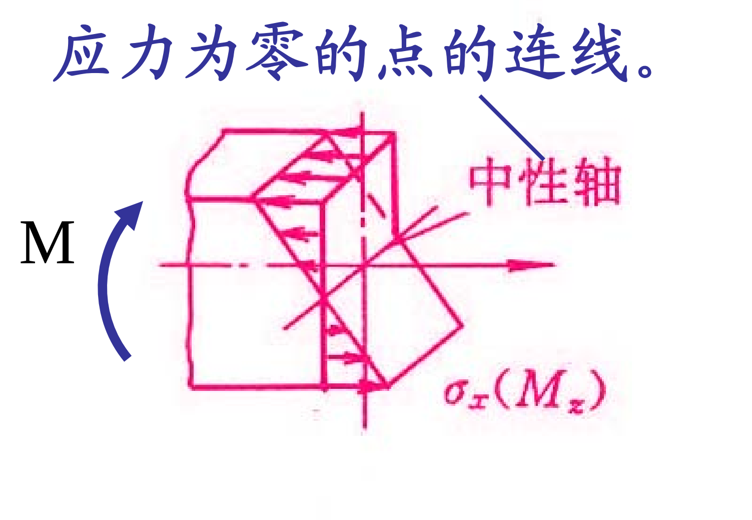
$$\therefore \sigma \propto y$$

——横截面上某点处的应力与此点距中性轴的距离y成比例。

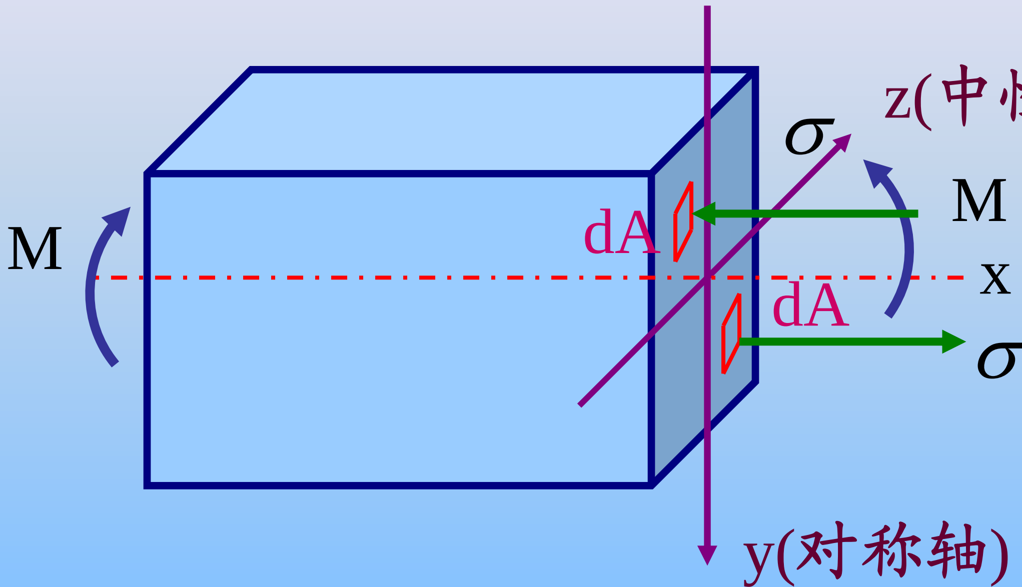
当 $y = 0$ 时，$\sigma = 0$；

$|y| = y_{\max}$ 时，$\sigma = |\sigma_{\max}|$.

——————与实验结果相符。



（3）由静力平衡方程确定中性轴的位置及应力计算公式



由 $\sum F_x = 0$ 得

$$\int_A \sigma dA = 0$$

将(b)式代入，得

$$\int_A E\frac{y}{\rho}dA = 0$$

$$\rightarrow \frac{E}{\rho}\underline{\int_A ydA} = 0 \rightarrow \frac{E}{\rho}S_z = 0 \rightarrow \boxed{S_z = 0} \qquad \text{(c)}$$

因此z轴通过截面形心，即中性轴通过形心，并垂直于载荷作用面。

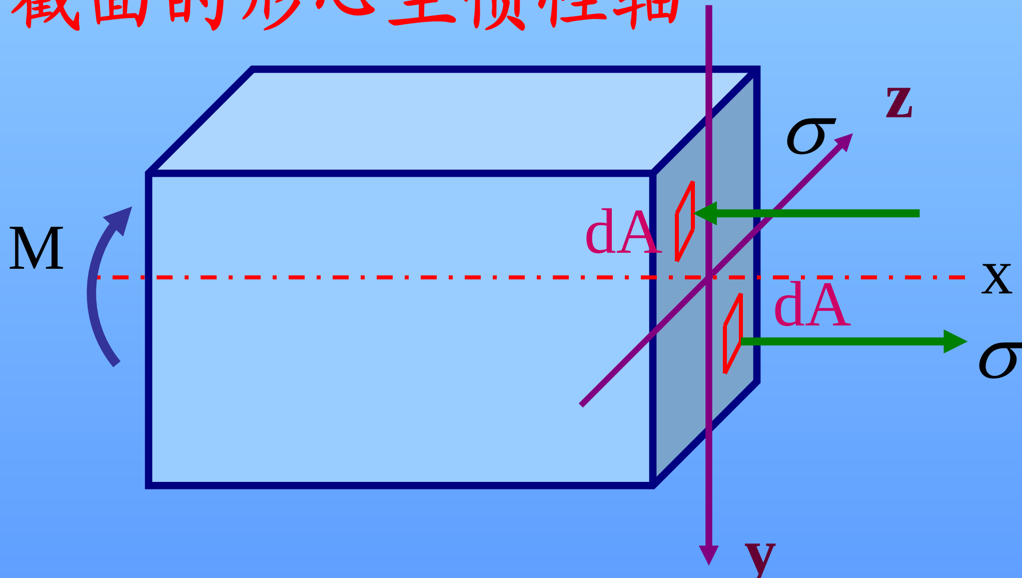
静力平衡条件 $\sum F_y = 0,\ \sum F_z = 0,\ \sum M_x = 0$ 自动满足。

考虑平衡条件 $\sum M_y = 0$

$$M_y = \int_A (\sigma dA) \cdot z = \int_A E \frac{yz}{\rho} dA = \frac{E}{\rho} \int_A yzdA = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{I_{yz} = 0} \qquad \textbf{(d)}$$

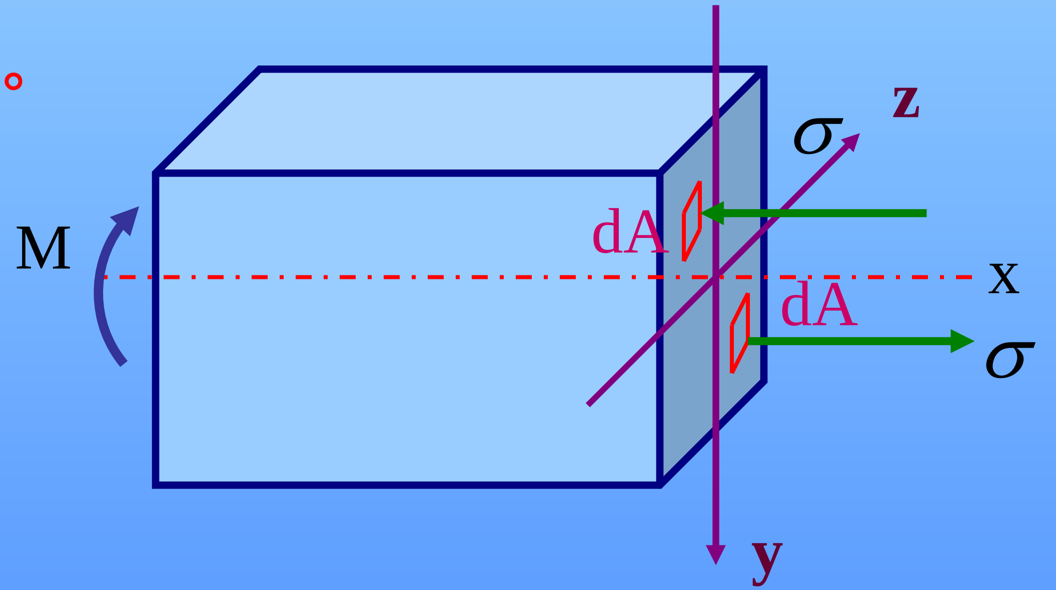
——y、z轴为截面的形心主惯性轴



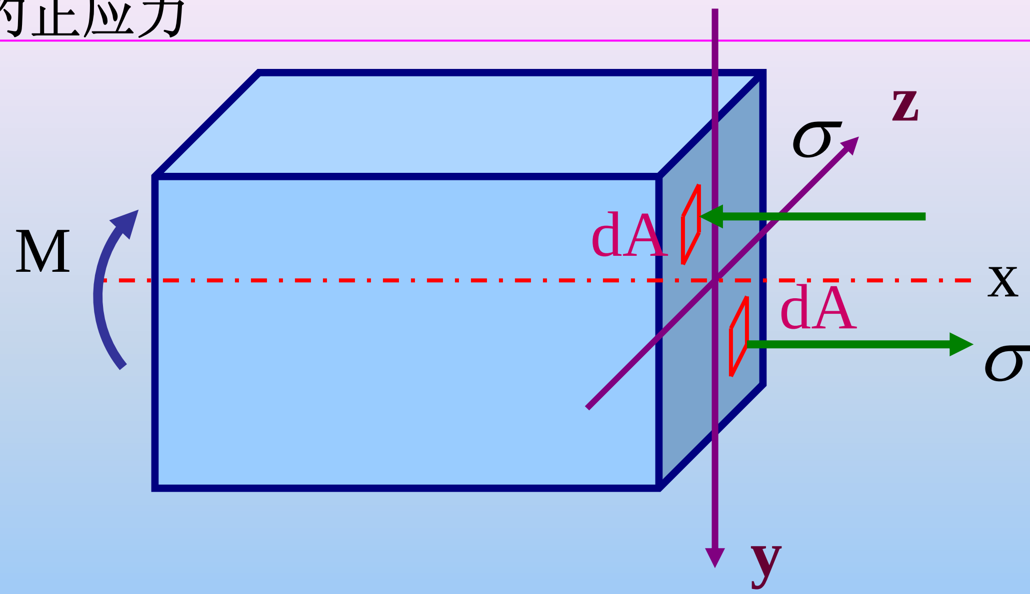
对于实心截面，若截面无对称轴，要使梁产生平面弯曲，亦必须满足 $I_{yz}=0$ 。即y、z轴为截面的形心主惯性轴。所以只要外力作用在形心主惯性平面内同样可产生平面弯曲。

中性轴的特点：

平面弯曲时梁横截面上的中性轴一定是形心主轴，它与外力作用面垂直，即中性轴是与外力作用面相垂直的形心主轴。



考虑平衡条件



$$\sum M_z = M$$

$$M_z = \int_A (\sigma dA) \cdot y$$

$$= \int_A E \frac{y^2}{\rho} dA$$

$$= \frac{E}{\rho} \underbrace{\int_A y^2 dA}_{\boxed{I_z}} = M \qquad \therefore \frac{E}{\rho} I_z = M \qquad \text{(e)}$$

I_z 为截面对中性轴的惯性矩。

可得挠曲轴的曲率方程:

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}}$$

ρ为常数，挠取轴是一条圆弧线

EI_z——抗弯刚度。

正应力的计算公式为

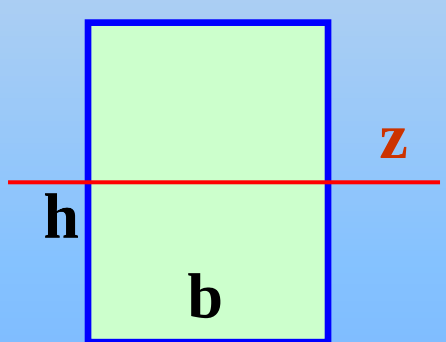
$$\boxed{\sigma = \frac{My}{I_z}}$$

横截面上最大正应力为

$$\boxed{\sigma_{\max} = \frac{My_{\max}}{I_z} = \frac{M}{I_z / y_{\max}} = \frac{M}{W_z}}$$

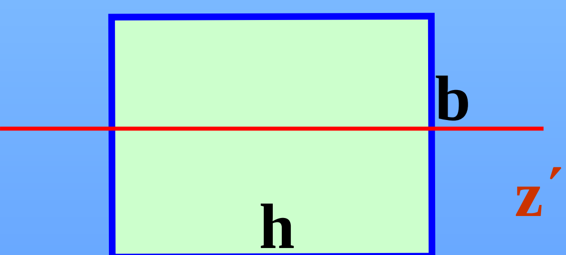
$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}$$ ——截面的**抗弯截面模量**，反映了截面的几何形状、尺寸对强度的影响。

矩形、圆形截面对中性轴的惯性矩及抗弯截面模量：



竖放：

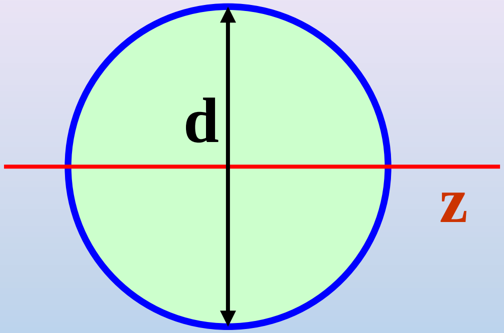
$$I_z = \frac{1}{12}bh^3,\ W_z = \frac{1}{6}bh^2$$



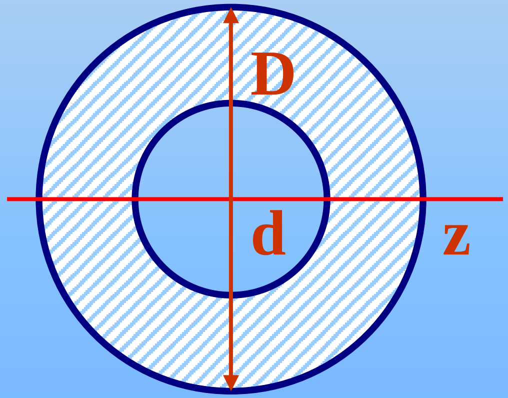
平放：

$$I_z' = \frac{1}{12}hb^3,\ W_z' = \frac{1}{6}hb^2$$

若h>b，则 $W_z' < W_z$ 。



$$I_z = \frac{\pi}{64} d^4, \quad W_z = \frac{\pi}{32} d^3,$$



$$I_z = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) = \frac{\pi}{64} D^4 (1 - \alpha^4)$$

$$(\alpha = \frac{d}{D})$$

$$W_z = \frac{\pi}{32} D^3 (1 - \alpha^4)$$

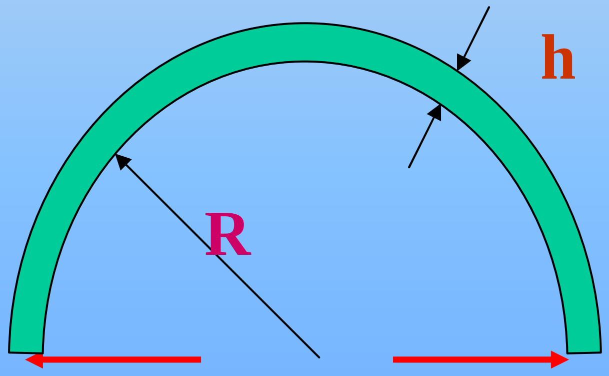
- 由纯弯曲推导得到的结果可推广到横力弯曲的梁：

(a) 横力弯曲的细长梁，即梁的宽高比:$L/h>5$时，其误差不大；

（b） 对$R/h>5$的曲率梁，可使用直梁公式。

非纯弯曲时的挠曲轴的曲率方程为：

$$\boxed{\frac{1}{\rho(x)}=\frac{M(x)}{EI}}$$



正应力计算公式为

$$\boxed{\sigma(x)=\frac{M(x)}{I}y}$$

♣ 注意:

（1）在计算正应力前，必须弄清楚所要求的是哪个截面上的正应力，从而确定该截面上的弯矩及该截面对中性轴的惯性矩；以及所求的是该截面上哪一点的正应力，并确定该点到中性轴的距离。

（2）要特别注意正应力在横截面上沿高度呈线性分布的规律，在中性轴上为零，而在梁的上下边缘处正应力最大。

（3）梁在中性轴的两侧分别受拉或受压，正应力的正负号（拉或压）可根据弯矩的正负及梁的变形状态来确定。

（4）必须熟记矩形截面、圆形截面对中性轴的惯性矩的计算式。

6、弯曲正应力强度条件：

$$\boxed{\sigma_{\max}=\frac{M_{\max}}{W_z}\le[\sigma]}$$

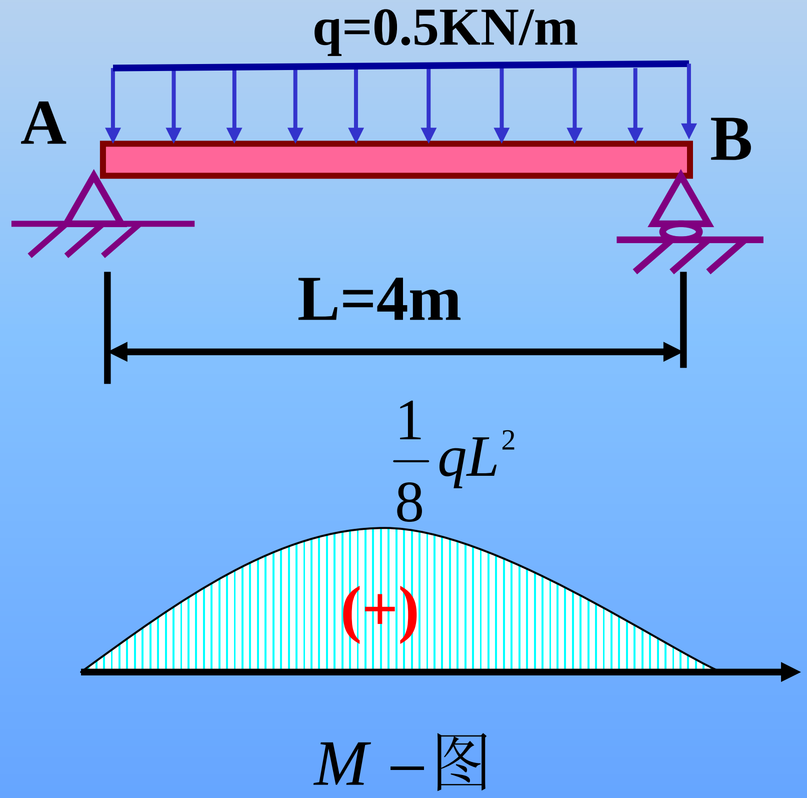
可解决三方面问题：

（1）强度校核，即已知 $M_{\max},[\sigma],W_z$，检验梁是否安全；

（2）设计截面，即已知 $M_{\max},[\sigma]$，可由 $W_z\ge\dfrac{M_{\max}}{[\sigma]}$ 确定截面的尺寸；

（3）求许可载荷，即已知 $W_Z,[\sigma]$，可由 $M_{\max}\le W_z[\sigma]$ 确定。

例6-1 一简支梁受力如图所示。已知 $[\sigma]=12MPa$ 空心圆截面的内外径之比 $\alpha=\dfrac{d}{D}=0.8$ ，试选择截面直径**D**；若外径**D**增加一倍，比值α不变，则载荷 **q** 可增加到多大？



解:

$$M_{\max} = \frac{1}{8}qL^2 = 1.0\times10^3\,N.m$$

由强度条件

$$W_z = \frac{\pi}{32}D^3(1-\alpha^4) \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}$$

$$\therefore D \geq 0.113\,m$$

若外径**D**增加一倍，则 $D' = 0.226\,m$,仍由强度条件，得

$$M_{\max} = \frac{1}{8}qL^2 \leq W_z[\sigma] = \frac{\pi}{32}D'^3(1-\alpha^4)[\sigma]$$

$$\therefore q \leq 4.0KN.m$$

例6-2 已知 材料的$[\sigma^{+}]=[\sigma^{-}]=70MPa$ ，由**M**图知:

$M_{\max}=1.2\times10^{5}N.m$，试校核其强度。

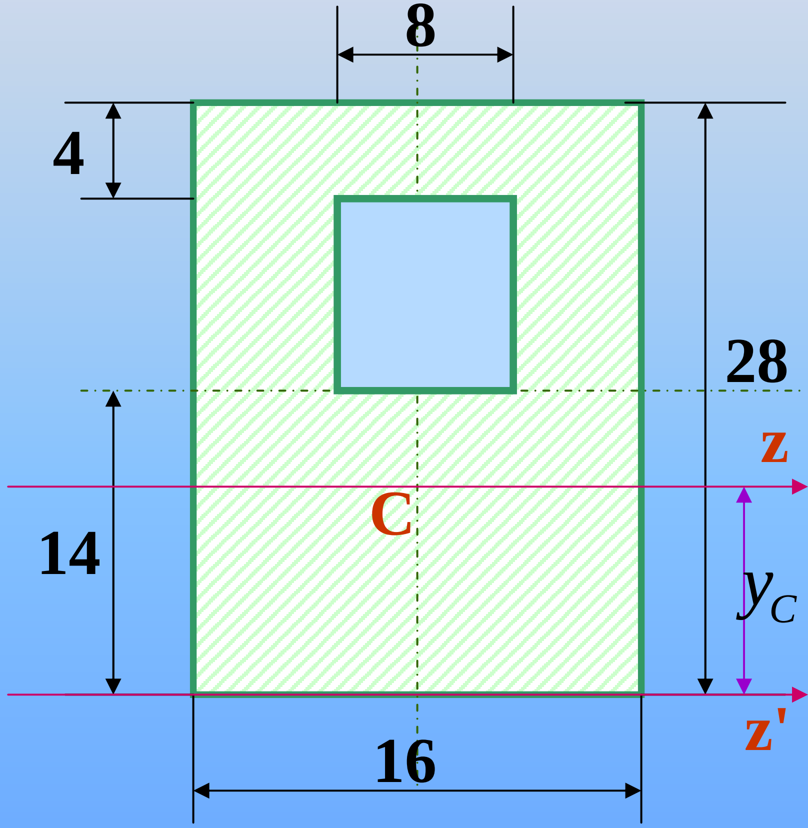
解:（1）确定中性轴的位置

$$S_z=A\cdot y_C$$

$$\therefore y_C=\frac{S_z}{A}=\frac{28\times16\times14-8\times10\times(14+5)}{28\times26-8\times10}$$

$$=13cm$$

（2）求 W_z



单位：**cm**

$$I_z=[\frac{1}{12}\times16\times28^3+16\times28\times(14-13)^2]-[\frac{1}{12}\times8\times10^3+18\times10\times(19-13)^2]$$

$$=26200\ cm^4$$

$$W_z=\frac{I_z}{y_{\max}}=\frac{26200}{(28-13)}=1748\,cm^3$$

（3）正应力校核

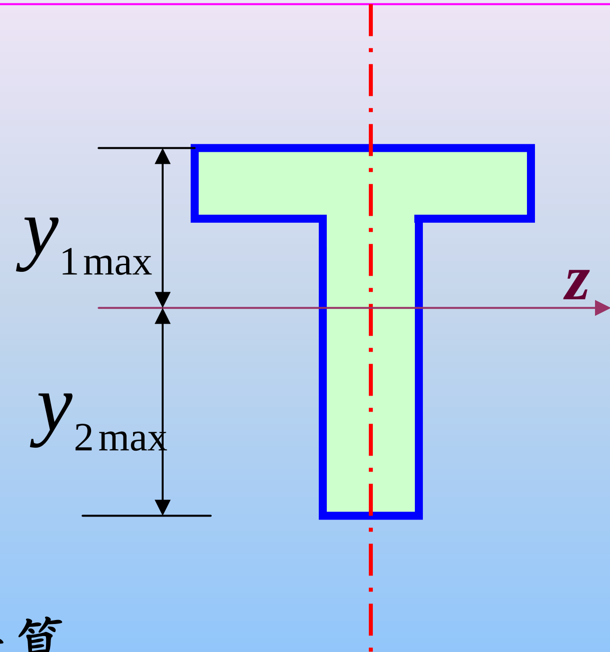
$$\sigma_{\max}=\frac{M}{W_z}=\frac{1.2\times10^5}{1748\times10^{-6}}=68.65\,MPa$$

所以结构安全。

问题：若材料为铸铁，截面这样放置是否合理？

对于T字形截面，$y_{1\max} \neq y_{2\max}$，则

$$W_{z1} = \frac{I_z}{y_{1\max}}, \quad W_{z2} = \frac{I_z}{y_{2\max}}$$



$$\therefore \sigma^{+}_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{z2}}, \quad \sigma^{-}_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{z1}}$$

对于低碳钢等材料，$[\sigma^{+}]=[\sigma^{-}]$，因此只需计算

$$\left|\sigma^{+}_{\max}\right| = \frac{M_{\max}}{W_{z1}} \leq [\sigma]$$

对于铸铁材料，$[\sigma^{+}]\neq[\sigma^{-}]$，因此需计算

$$\sigma^{+}_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{z2}} \leq [\sigma^{+}], \quad \sigma^{-}_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{z1}} \leq [\sigma^{-}]$$

二、弯曲时的剪应力

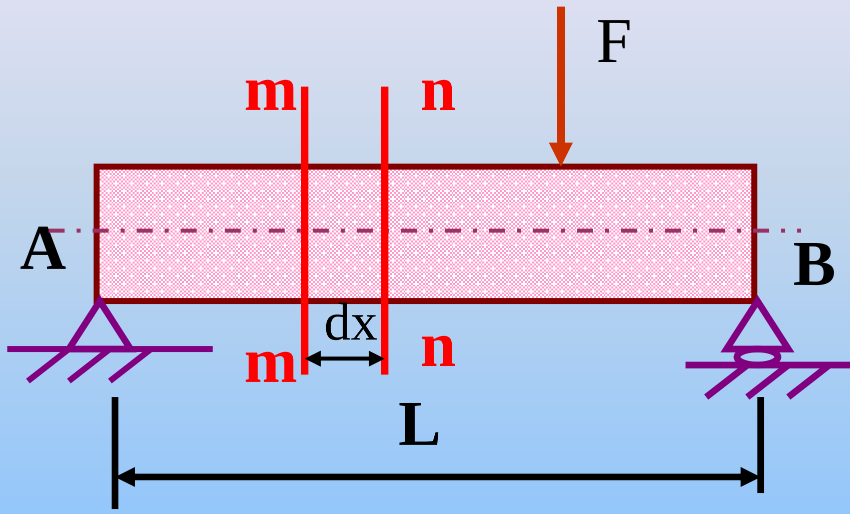
假 设

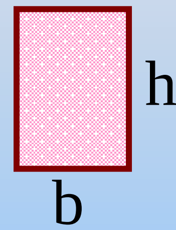
- 在有剪应力存在的情形下，
  弯曲正应力公式依然存在

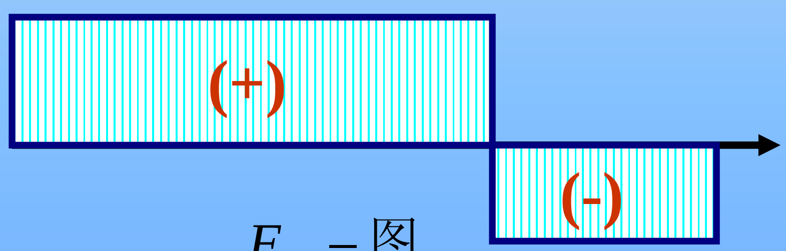
- 剪应力方向与剪力的方向相同，并沿截面宽度方向切应力均匀分布（对于狭长的矩形截面适用）

在上述前提下，可由平衡直接确定横截面上的切应力，而无须应用“平衡，变形协调和物性关系”。

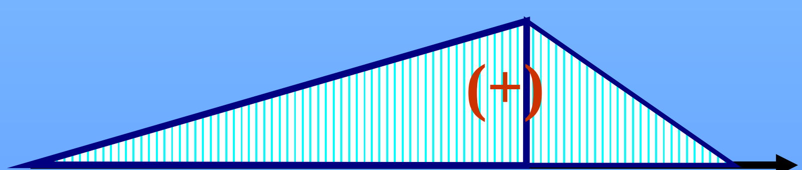
（一）矩形截面







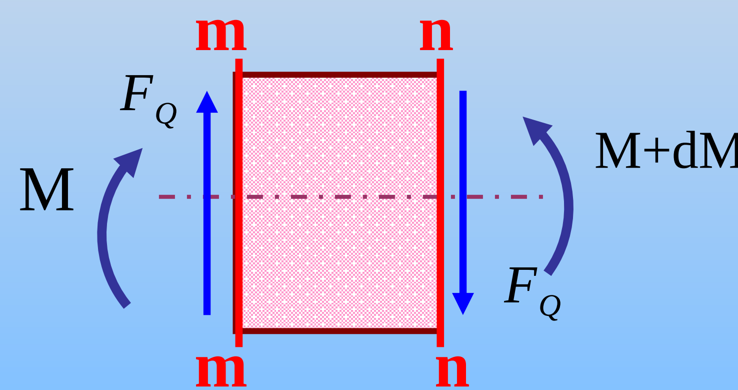
F_Q –图

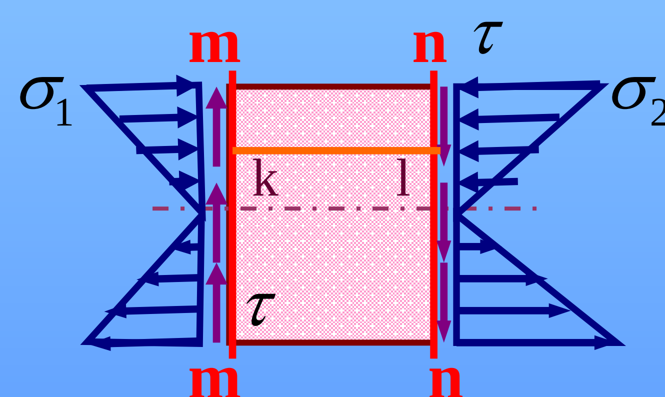


M –图

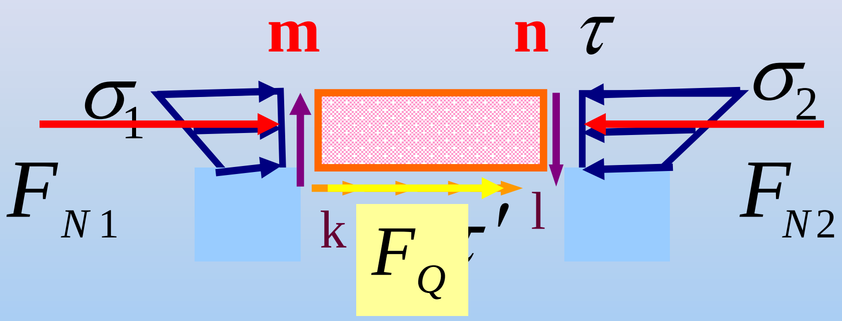
分析方法（截面法）：

1、沿 **mm,nn** 截面截开，取微段dx。





2、沿 **kl** 截面截开，根据剪应力的互等定理：



$$\tau = \tau'$$

$\because$ **dx**很小，在 ***kl*** 面上可认为均布。

3、列平衡方程，由 $\sum F_x = 0$ ：

$$F_{N1} + F_Q - F_{N2} = 0$$

即

$$\int_{A_1} \sigma_1 dA + \tau'(bdx) - \int_{A_2} \sigma_2 dA = 0$$

而

$$\sigma_1 = \frac{My_1}{I_z}, \qquad \sigma_2 = \frac{(M + dM)y_1}{I_z}$$

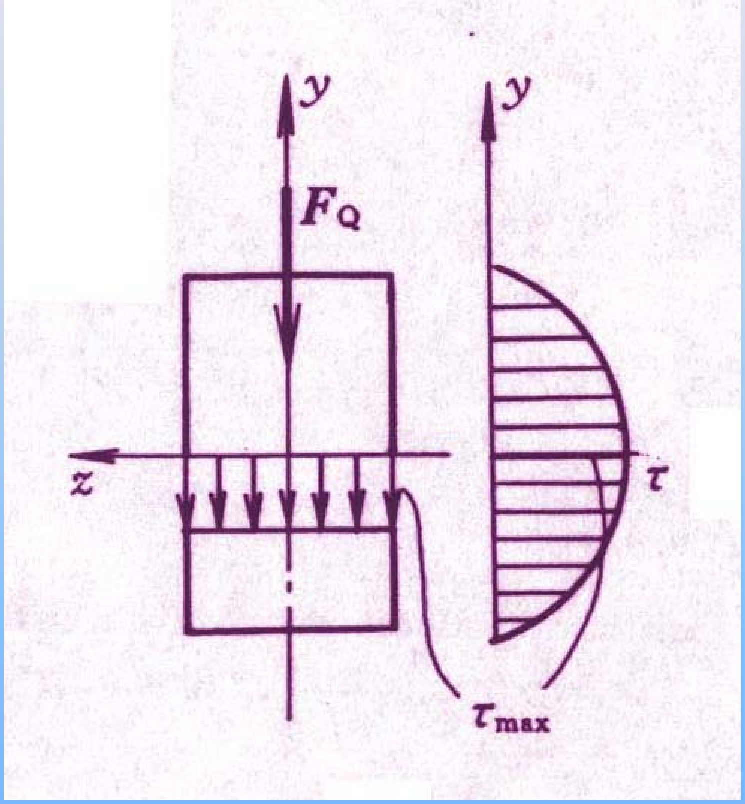
代入得:

$$\frac{M}{I_z}\int_{A_1} y_1 dA + \tau' b dx - \frac{M + dM}{I_z}\int_{A_1} y_1 dA = 0$$

$$\tau' b dx = \frac{dM}{I_z}\underbrace{\int_{A_1} y_1 dA}_{S_z^*}$$

$$\therefore \ \tau = \underbrace{\frac{dM}{dx}}_{F_Q}\frac{S_z^*}{bI_z} = \frac{F_Q S_z^*}{bI_z}$$

$$\boxed{\tau = \tau' = \frac{F_Q S_z^*}{b I_z}}$$



♉式中符号意义：

τ：截面上距中性轴y处的剪应力

S_z^*：y以外面积对中性轴的静矩

I_z：整个截面对中性轴的惯性矩

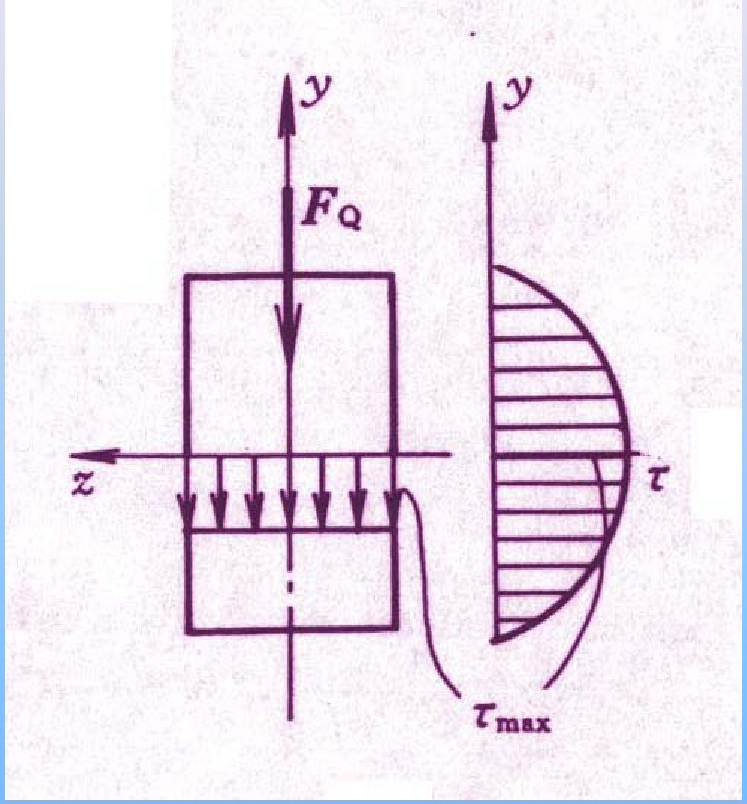
b：y处的宽度

♣对于矩形：

$$S_z^* = A^* \cdot y_c = b\left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \left[y + \frac{\frac{h}{2} - y}{2}\right] = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

而 $$I_z = \frac{1}{12}bh^3$$

$$\therefore \tau = \tau' = \frac{6F_Q}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$



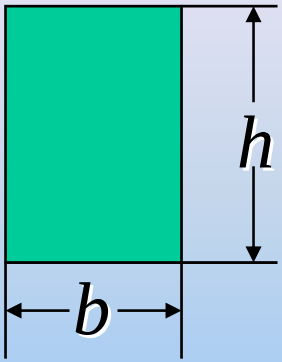
因此矩形截面梁横截面上的剪应力的大小沿着梁的高度按**抛物线**规律分布。

并且

$$y = \pm\frac{h}{2}, \tau = 0;$$

$$y = 0, \tau = \tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{F_Q}{bh} = \frac{3}{2}\frac{F_Q}{A}$$

实心截面梁的弯曲切应力误差分析



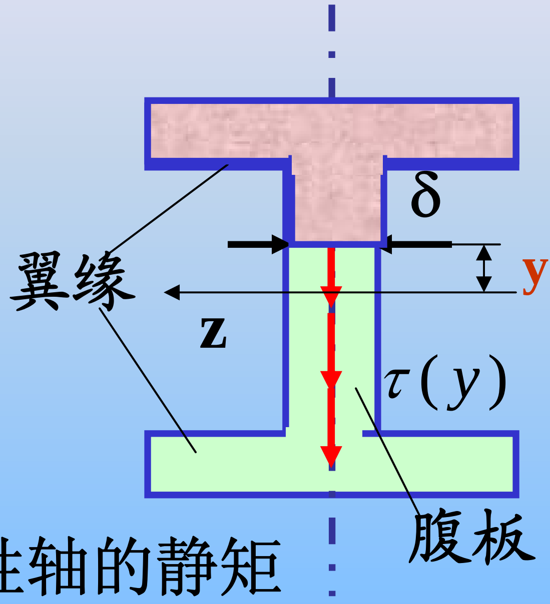
精确解 $\tau = \tau' = \beta \dfrac{F_Q S_z^*}{bI_z}$

h/b	∞	2/1	1/1	1/2	1/4
β	1.0	1.04	1.12	1.57	2.30

（二）工字形截面梁的弯曲切应力

1、腹板

$$\tau(y)=\frac{F_Q S_z^*}{\delta I_z}$$



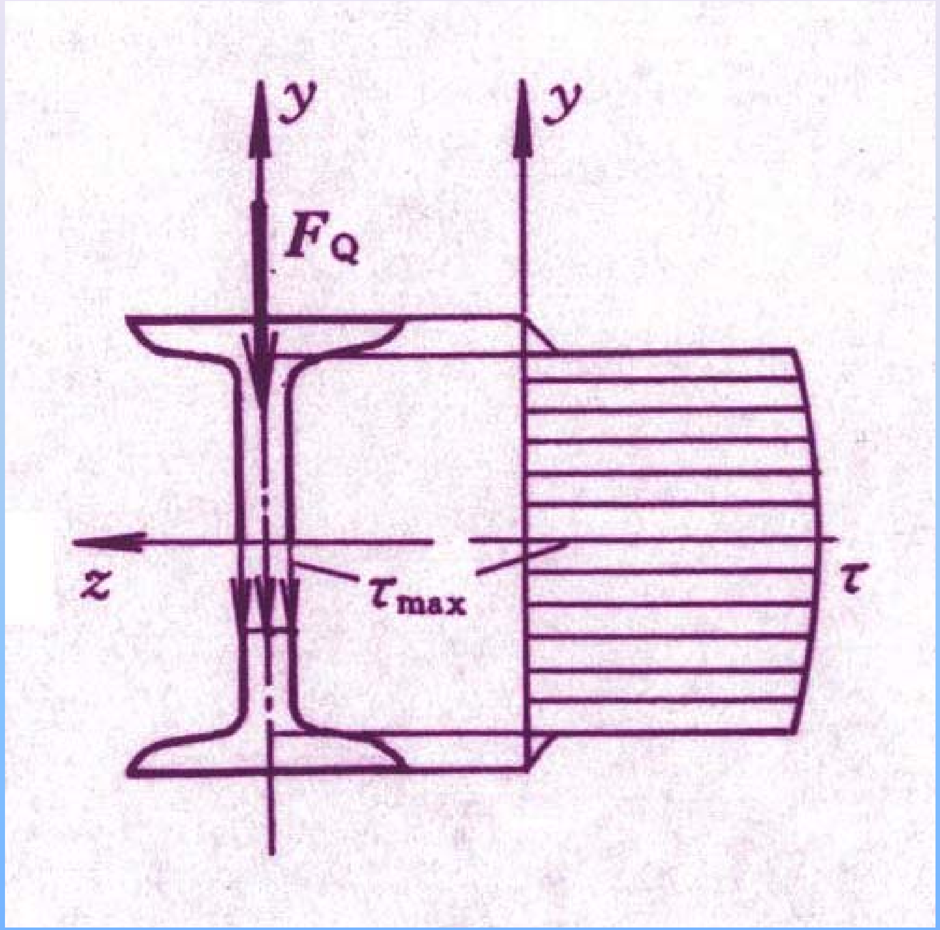
式中

τ(y)：截面上距中性轴y处的剪应力

S_z^*：y处横线一侧的部分面积ω对中性轴的静矩

I_z：整个截面对中性轴的惯性矩

δ：y处的宽度

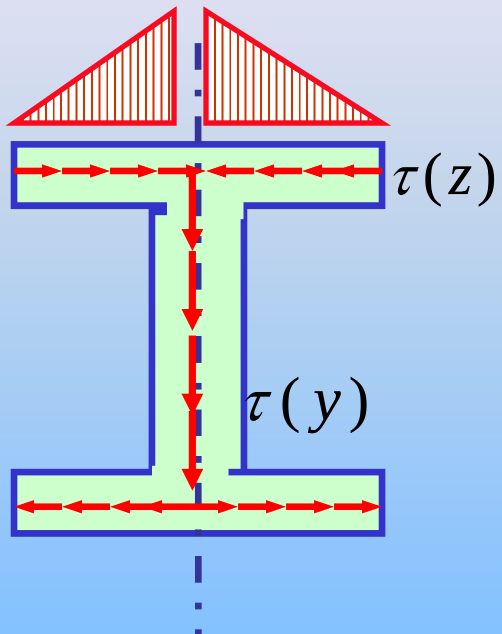


$$\tau_{max} = \frac{F_Q S_{z,max}}{\delta I_z}$$

$$= \frac{F_Q}{\delta (I_z / S_{z,max})}$$

腹板上的剪应力呈抛物线变化，腹板部分的剪应力合力占总剪力的95~97%。

2、翼缘

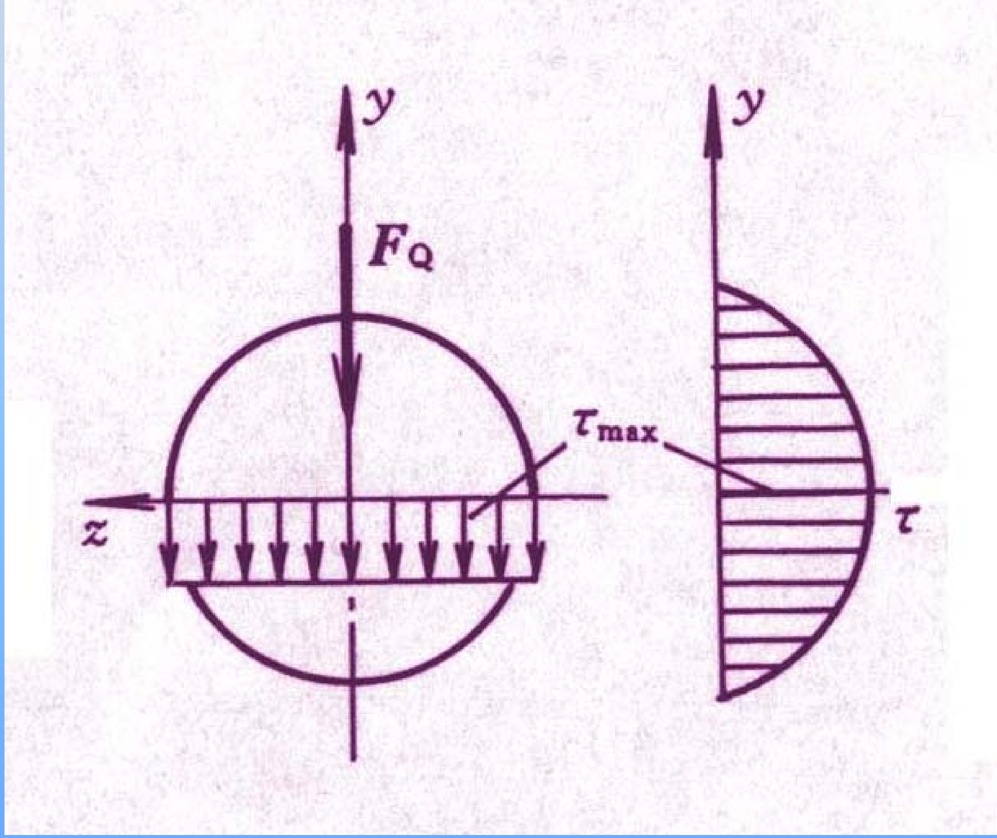


- 翼缘部分的水平剪应力沿翼缘宽度按直线规律变化，并与腹板部分的竖向剪力形成“剪应力流”。
- 翼缘部分的剪应力强度计算时一般不予考虑。

- 腹板与翼缘交界处的应力较复杂，在连接处的转角上发生应力集中，为了避免这一点，以圆弧连接，使这里的剪应力实际值接近以腹板剪应力公式所得到的结果。

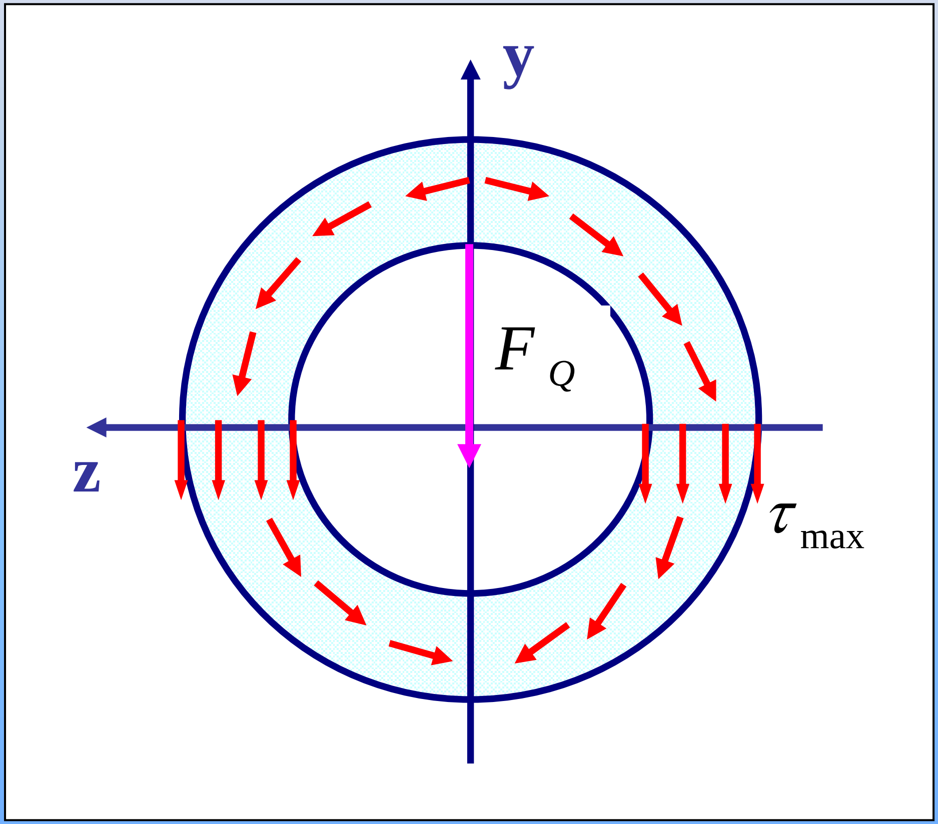
（三）其它形状截面梁的弯曲切应力

圆截面



$$\tau_{max} = \frac{4}{3}\frac{F_Q}{A}$$

圆环截面



$$\tau_{max} = 2.0\,\frac{F_Q}{A}$$

（四）切应力强度条件

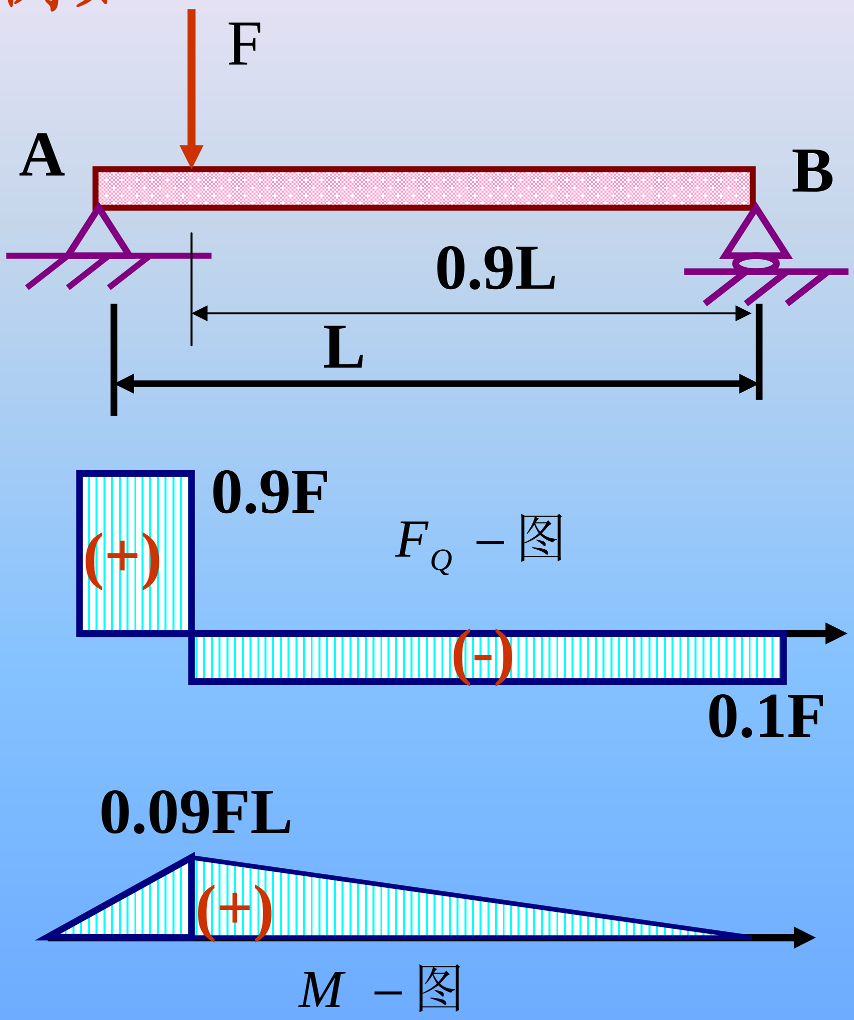
$$\tau_{\max} = \left(\frac{F_Q S_{z,\max}}{\delta I_z}\right)_{\max} \le [\tau]$$

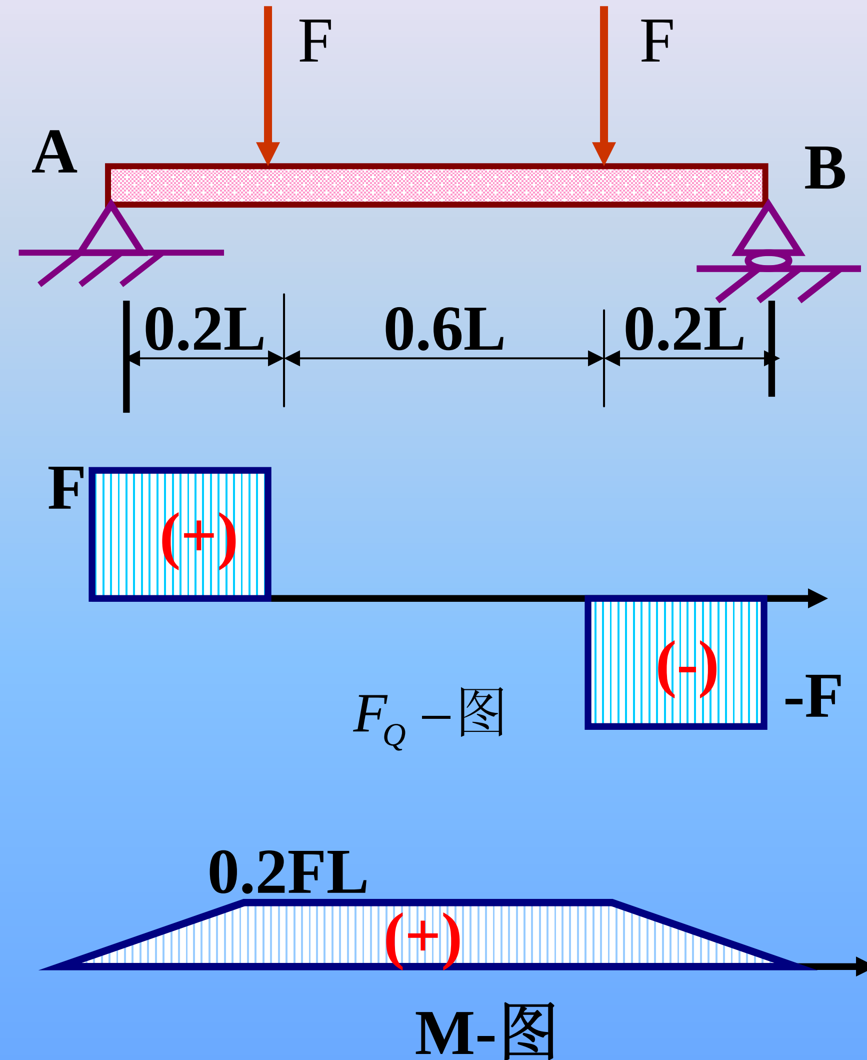
对于等宽度截面，$\tau_{\max}$发生在中性轴上；对于宽度变化的截面，$\tau_{\max}$不一定发生在中性轴上。

♉在进行梁的强度计算时，需注意以下问题：

（1）对于细长梁的弯曲变形，正应力的强度条件是主要的，剪应力的强度条件是次要的。但对于较粗短的梁，当集中力较大时，截面上的剪力较大而弯矩较小，或是薄壁截面梁时，也需要较核剪应力强度。

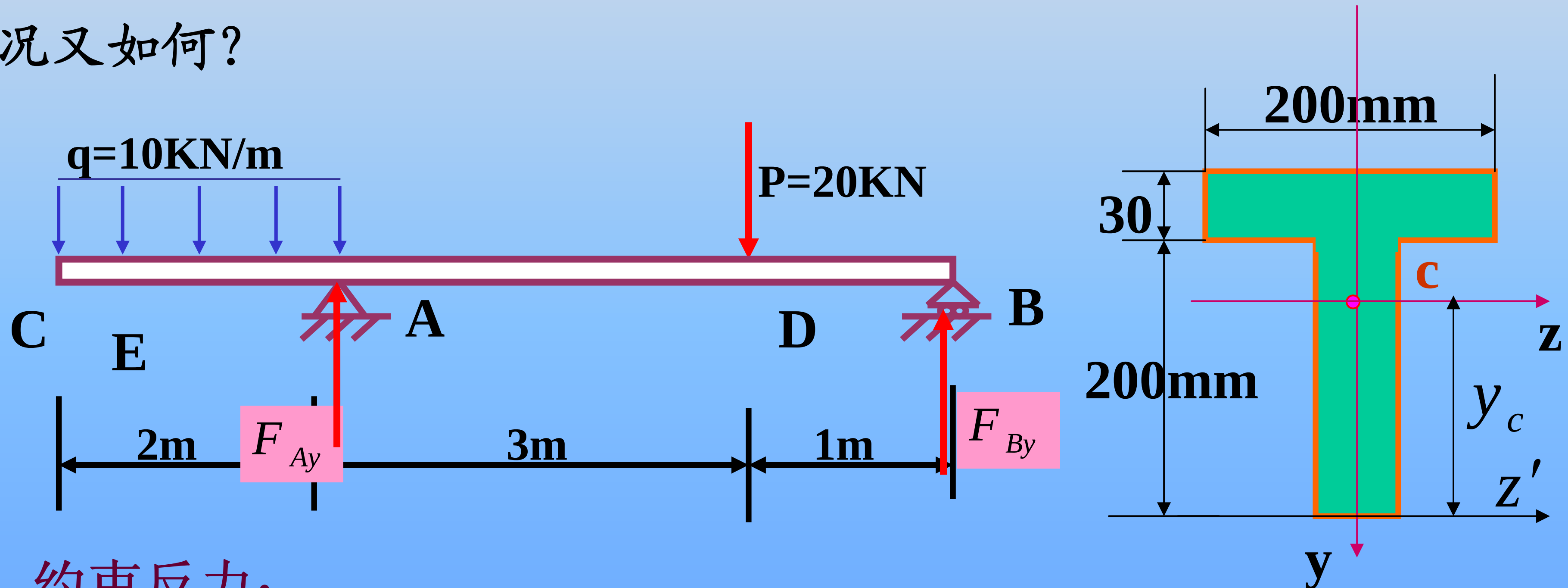
例如





（2）正应力的最大值发生在横截面的上下边缘，该处的剪应力为零；剪应力的最大值发生在中性轴上，该处的正应力为零。对于横截面上其余各点，同时存在正应力、剪应力。这些点的强度计算，应按强度理论进行计算。

例6-3 铸铁梁的截面为T字形，受力如图。已知材料许用拉应力为$[\sigma^+]=40MPa$，许用压应力为$[\sigma^-]=100MPa$，$[\tau]=35MPa$。试校核梁的正应力强度和剪应力强度。若将梁的截面倒置，情况又如何?



约束反力：

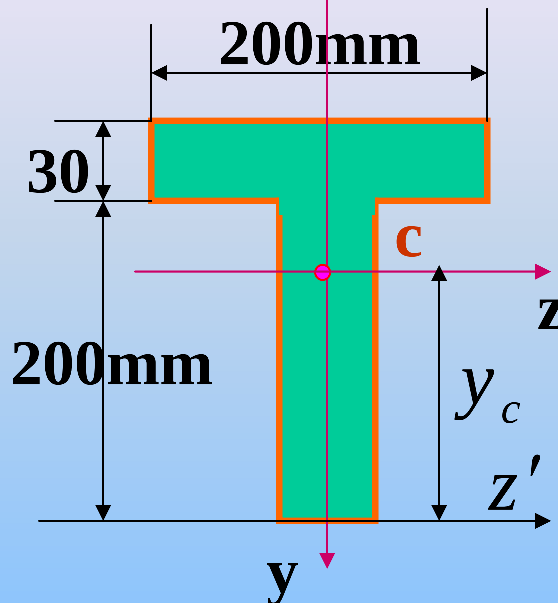
$$F_{Ay}=30KN,\qquad F_{By}=10KN,$$

解：（1）确定中性轴的位置

$$S_{z'} = A \cdot y_C$$

$$\therefore y_C = \frac{S_{z'}}{A} = \frac{3\times 20\times 21.5 + 3\times 20\times 10}{20\times 3\times 2}$$

$$= 15.75cm$$



$$I_z = \frac{1}{12}\times 3\times 20^3 + 3\times 20\times(15.75-10)^2$$

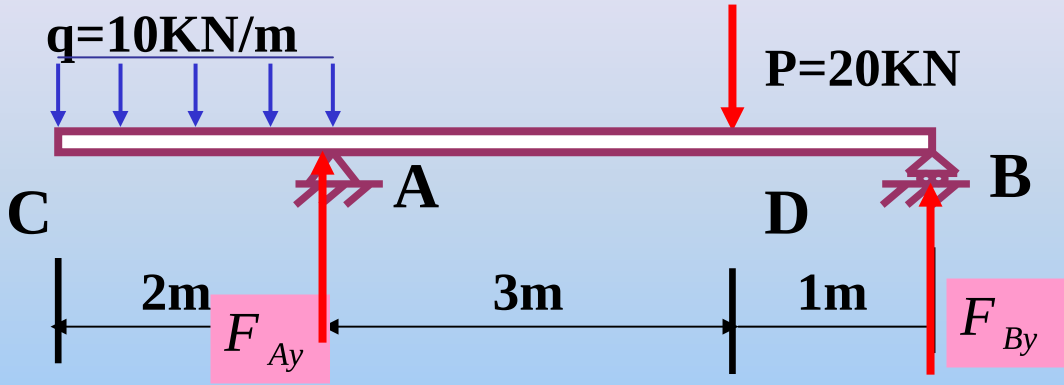
$$+\frac{1}{12}\times 20\times 3^3 + 20\times 3\times[(20-15.75)+1.5]^2$$

$$= 6013\ cm^4$$

最大静矩:

$$S_{z,\max} = 3\times 15.75\times 7.88 = 372\ cm^3$$

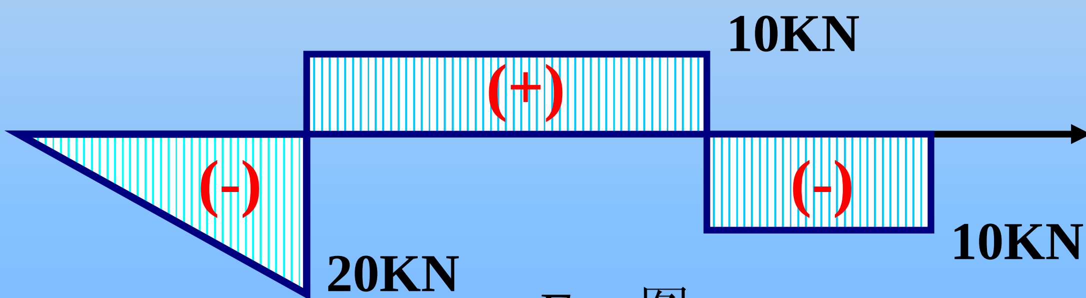
（2）绘剪力图、弯矩图



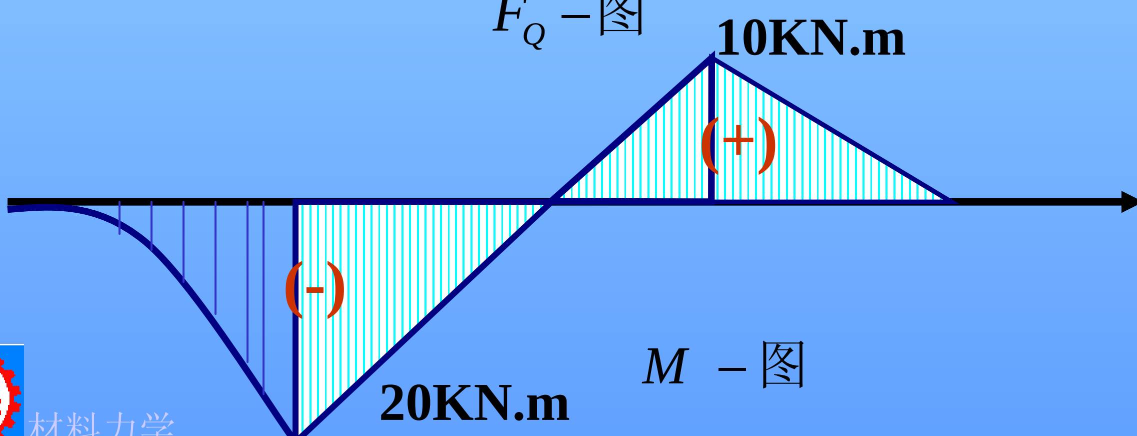
约束反力：

$$F_{Ay}=30KN,$$

$$F_{By}=10KN,$$



F_Q –图



M –图

由 F_Q–图、M–图知：

$$F_{Q,\max}=F_{QA左}=20KN,$$

$$|M_A|=20KN.m,$$

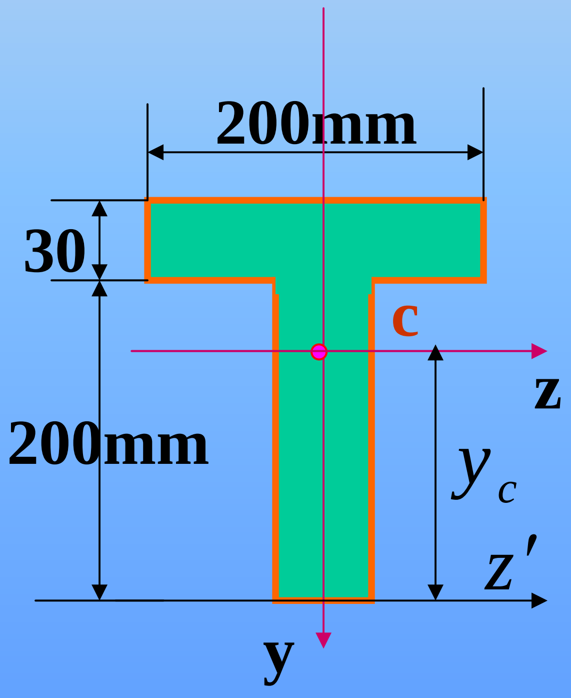
$$M_D=10KN.m$$

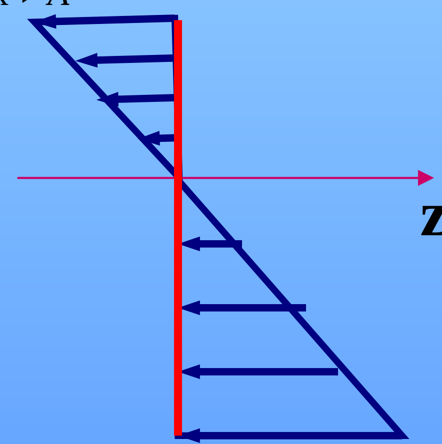
（3）正应力强度校核

对于A截面：

$$(\sigma_{\max}^{+})_A = \frac{M_A \cdot (4.25+3)\times 10^{-2}}{6.013\times 10^{-8}} = 24.1MPa$$

$$(\sigma_{\max}^{-})_A = \frac{M_A \cdot 15.75\times 10^{-2}}{6.013\times 10^{-8}} = 52.4MPa$$

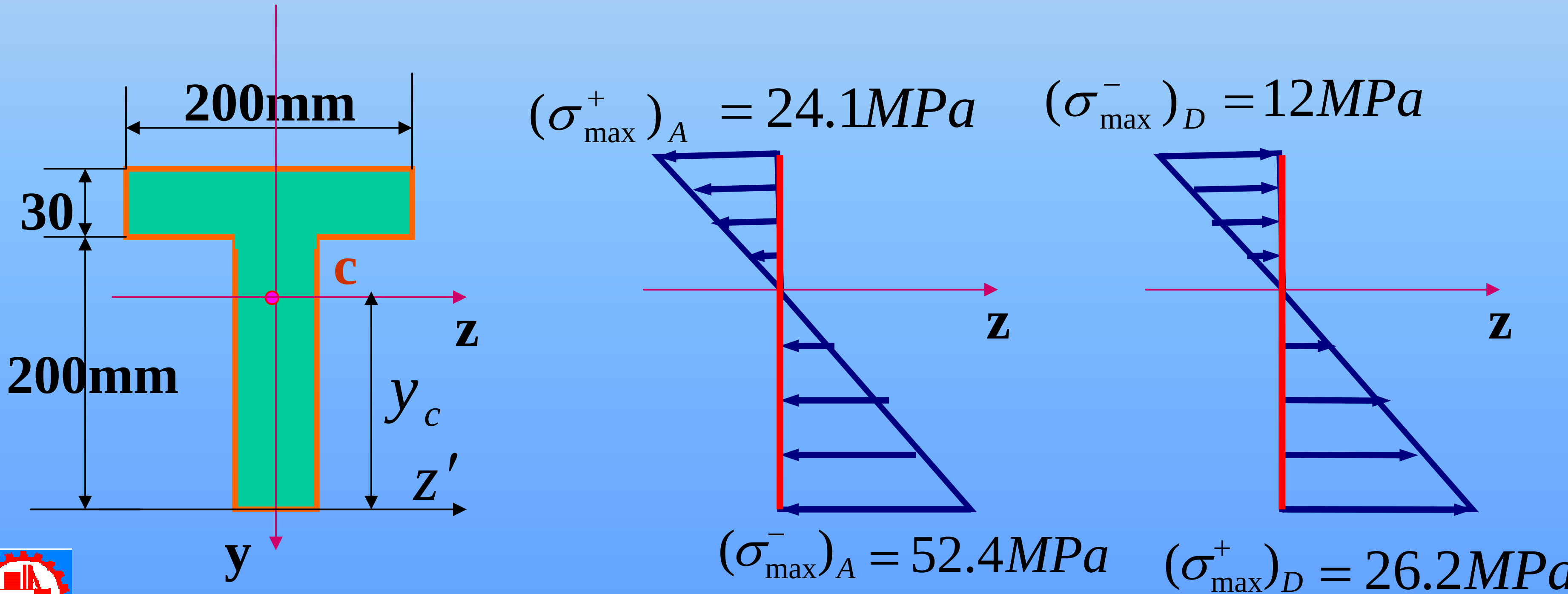




对于D截面：

$$(\sigma_{\max}^{+})_D = \frac{M_D \cdot 15.75\times10^{-2}}{6.013\times10^{-8}} = 26.2MPa$$

$$(\sigma_{\max}^{-})_D = \frac{M_D \cdot 7.25\times10^{-2}}{6.013\times10^{-8}} = 12MPa$$



因此

$$\sigma_{\max}^{+}=(\sigma_{\max}^{+})_D=26.2MPa\le[\sigma^{+}]=40Mpa$$

$$\sigma_{\max}^{-}=(\sigma_{\max}^{-})_D=52.4MPa\le[\sigma^{-}]=100Mpa$$

∴正应力强度足够。

（4）剪应力强度校核

在A截面：

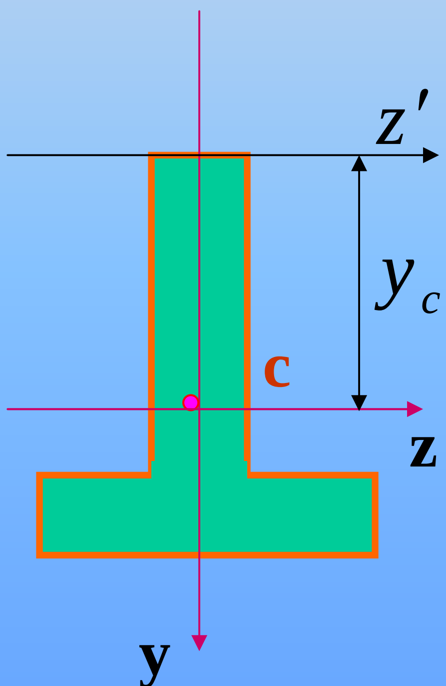
$$\tau_{\max}=\frac{F_{Q,\max}S_{z,\max}}{\delta I_z}=\frac{20\times10^{3}\cdot372\times10^{-6}}{0.03\times6.013\times10^{-5}}=4.12MPa\ \le[\tau]$$

∴剪应力强度足够。

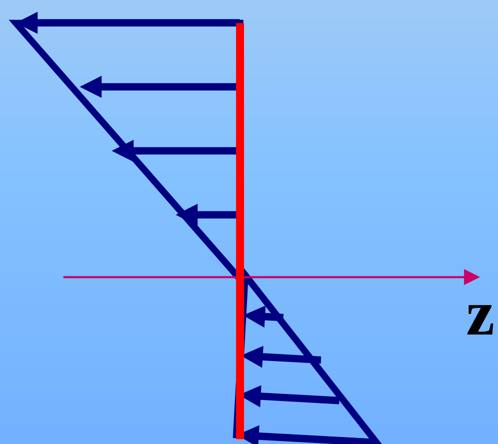
（5）若将梁的截面倒置，则

$$\sigma_{\max}^{+}=(\sigma_{\max}^{+})_A=52.4MPa\geq[\sigma^{+}]$$

此时强度不足会导致破坏。



$(\sigma_{\max}^{+})_A=52.4MPa$



$(\sigma_{\max}^{-})_A=24.1MPa$

三、提高弯曲强度的一些措施

弯曲正应力强度条件：

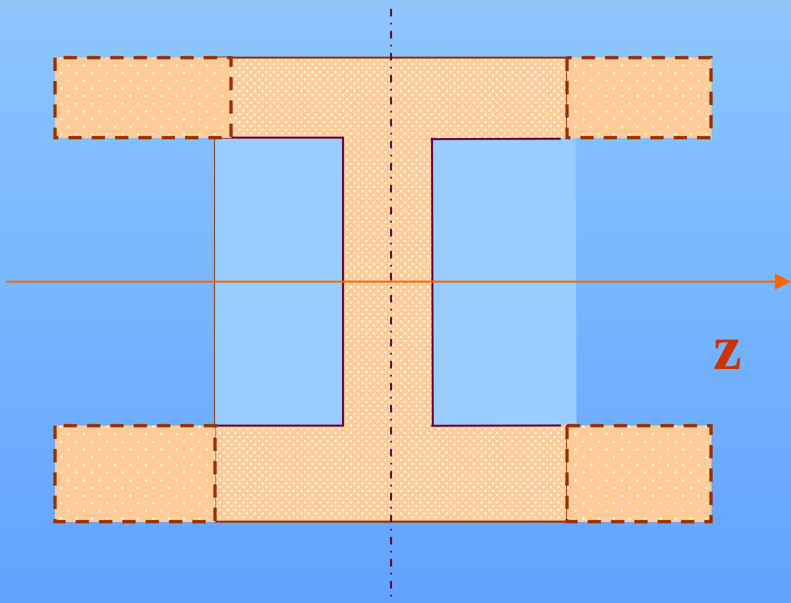
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \le [\sigma]$$

在[σ]一定时，提高弯曲强度的主要途径： $\uparrow W_z, \downarrow M_{\max}$

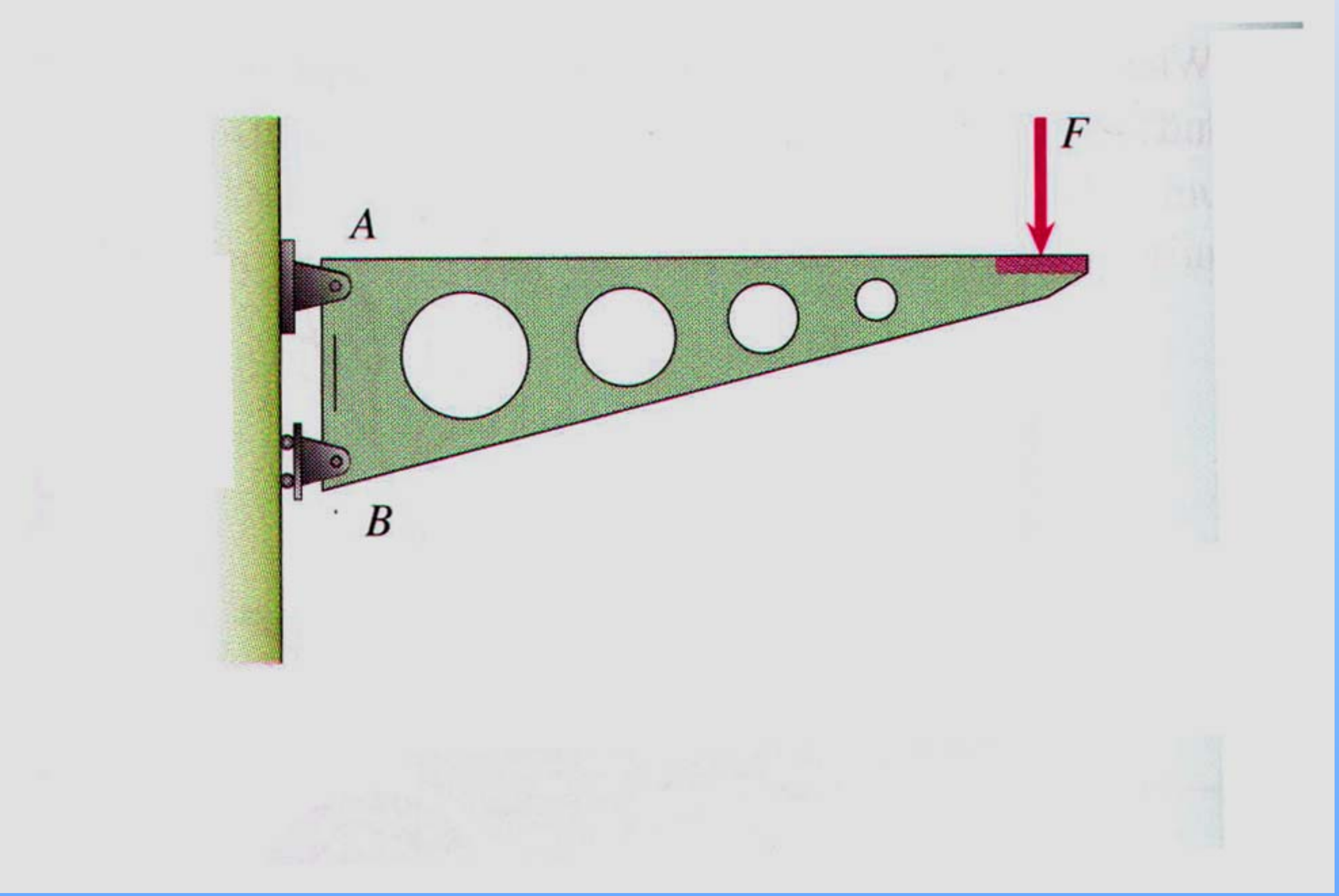
（一）、选择合理截面

1、根据应力分布的规律选择：

（1）矩形截面中性轴附近的材料未充分利用，工字形截面更合理。



（2）为降低重量，可在中性轴附近开孔。



2、根据截面模量选择：

为了比较各种截面的合理性，以 $\frac{W_z}{A}$来衡量。$\frac{W_z}{A}$ 越大，截面越合理。

截面形状	矩形	圆形	槽钢	工字钢
$\frac{W_z}{A}$	0.167h	0.125d	(0.27~0.31)h	(0.27~0.31)h

(d=h)

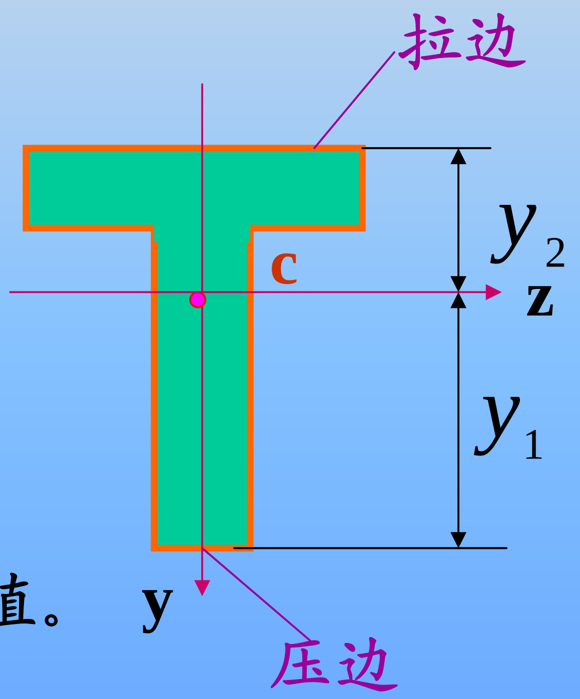
2、根据材料特性选择：

塑性材料：　$[\sigma^+]=[\sigma^-]$，宜采用中性轴为对称轴的截面。

脆性材料：　$[\sigma^+]<[\sigma^-]$，宜采用中性轴为非对称轴的截面，

例如T字形截面：

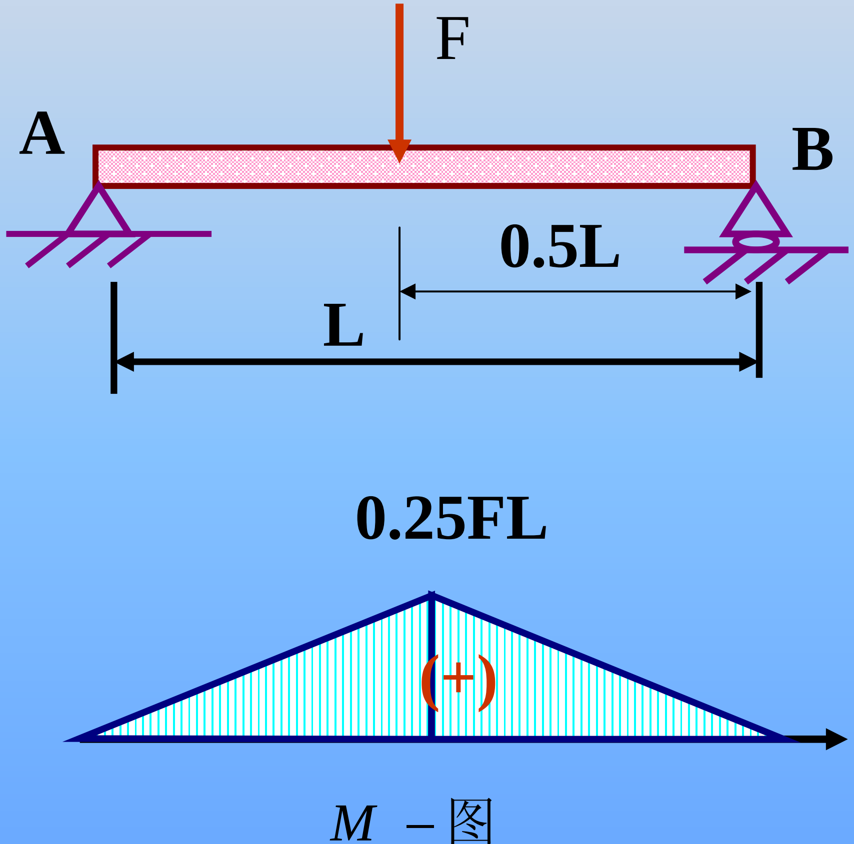
$$\frac{\sigma^-_{\max}}{\sigma^+_{\max}}=\frac{\dfrac{My_1}{I_z}}{\dfrac{My_2}{I_z}}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{[\sigma^-]}{[\sigma^+]}$$

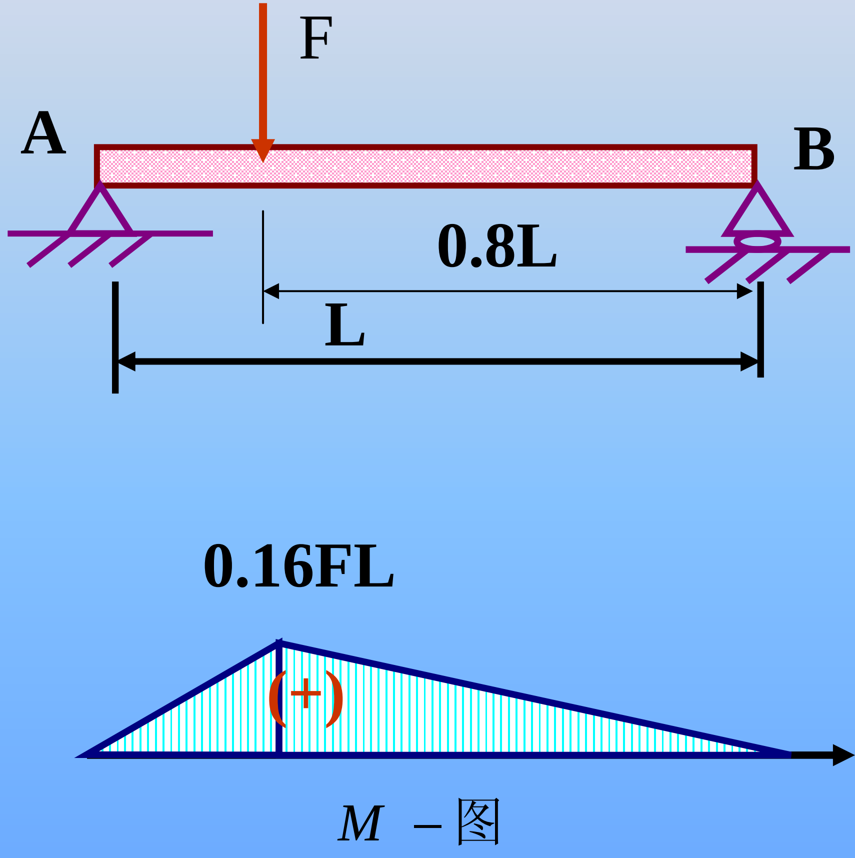


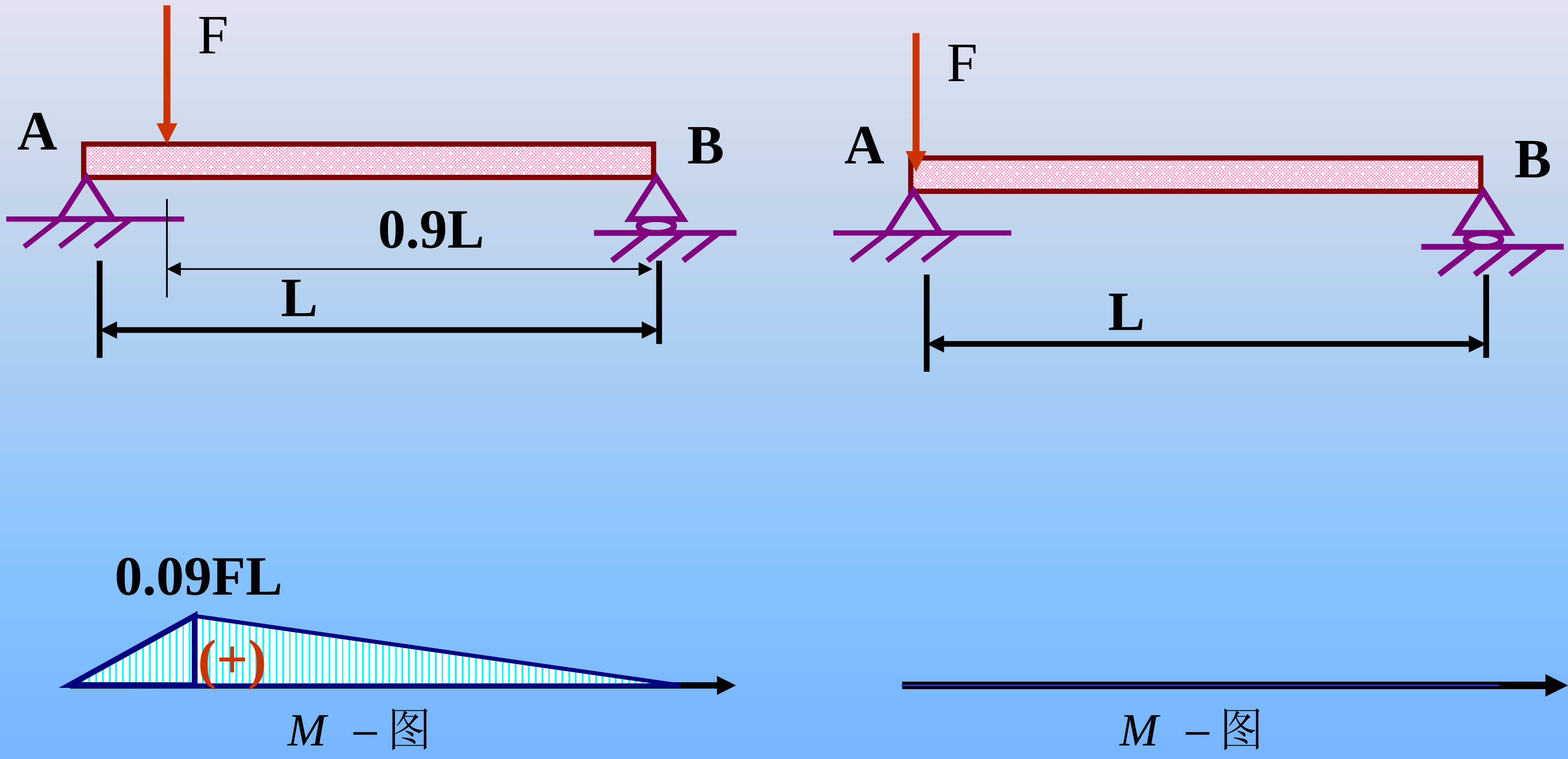
即使最大拉、压应力同时达到许用应力值。

（二）、合理安排载荷和支承的位置，以降低 M_{max} 值。

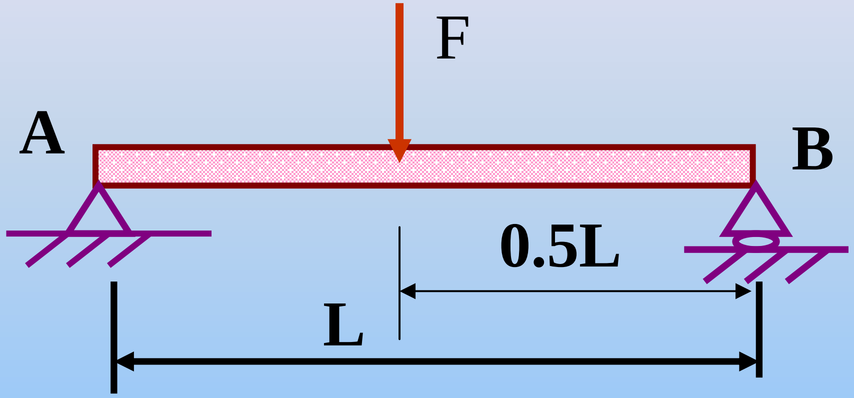
1、载荷尽量靠近支座：

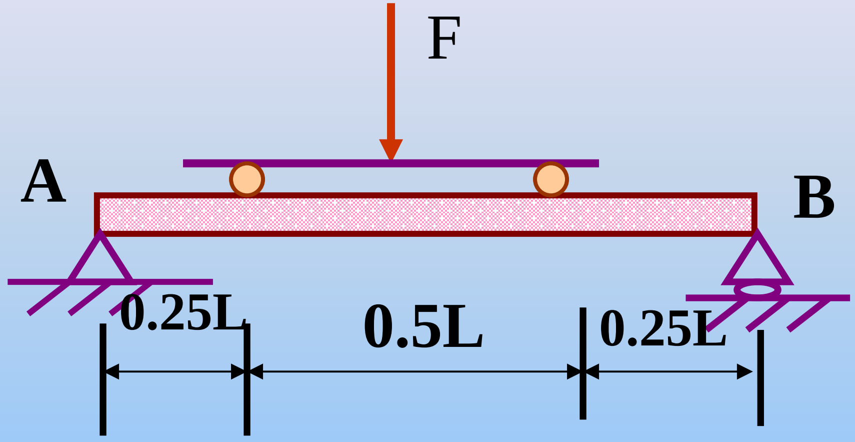


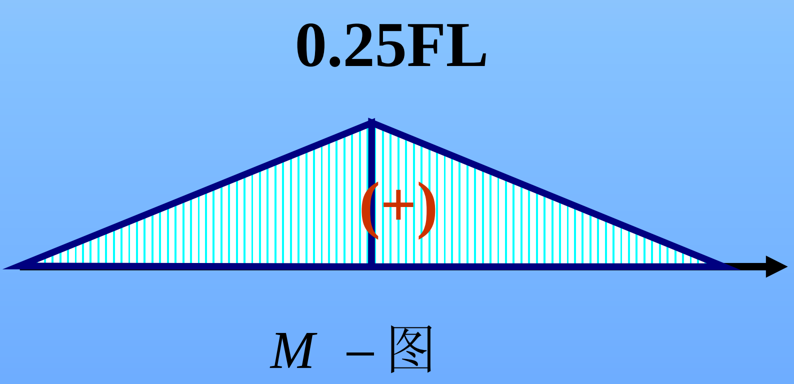


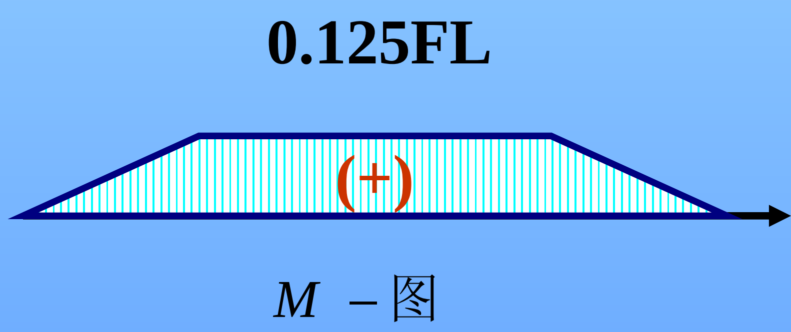

F
A
B
0.9L
L
F
A
B
L
0.09FL
(+)
M –图
M –图

2、将集中力分解为分力或均布力。

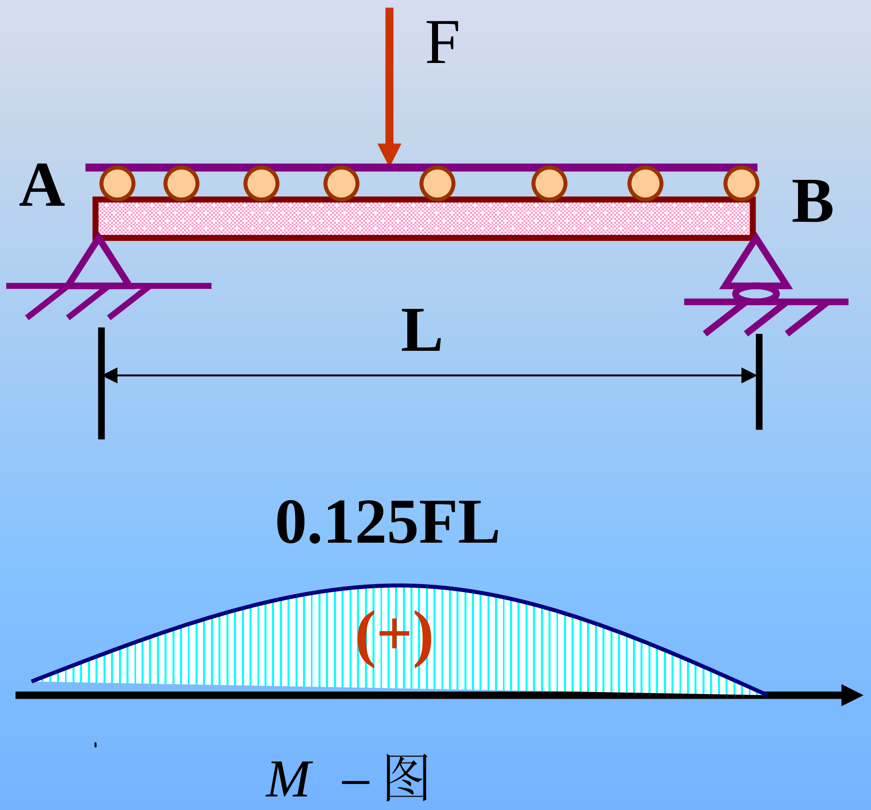


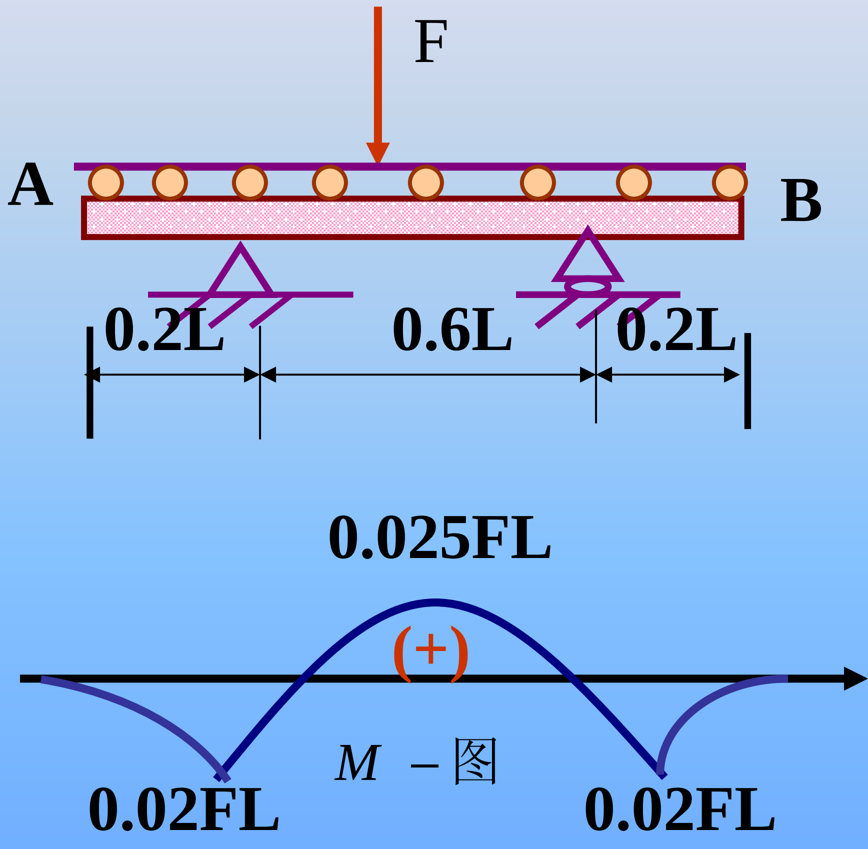




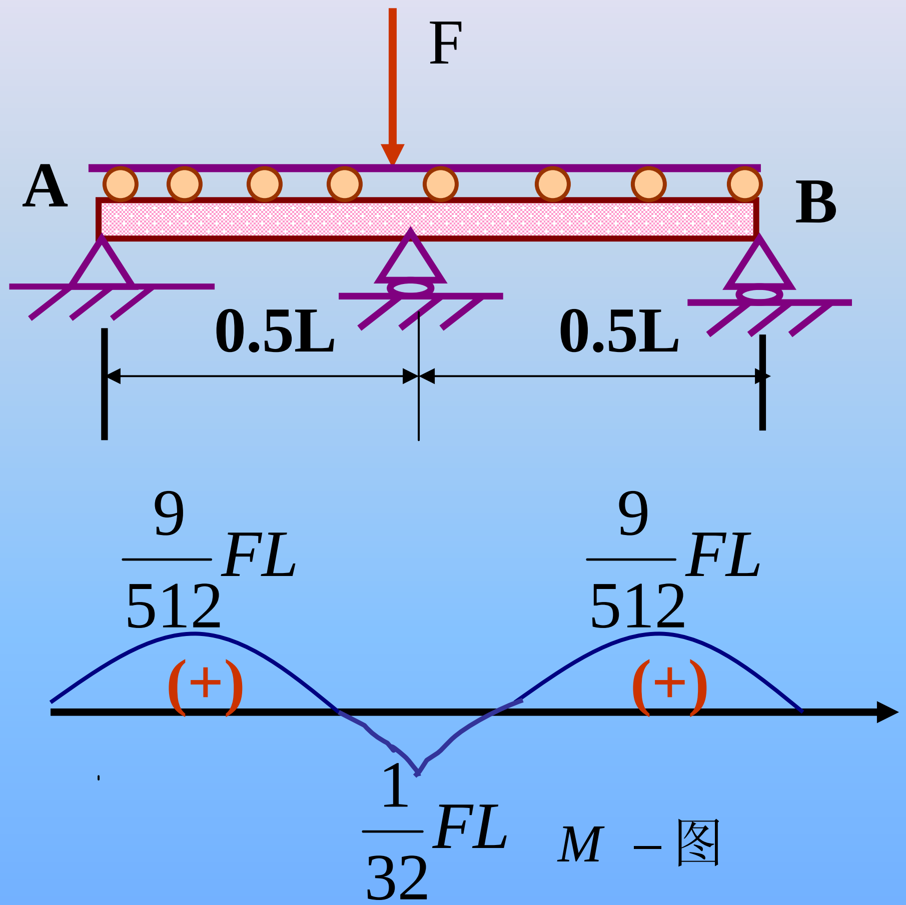


3、合理安排支座位置及增加支座——减小跨度，减小M_{max}。





增加支座



（三）、选用合理结构

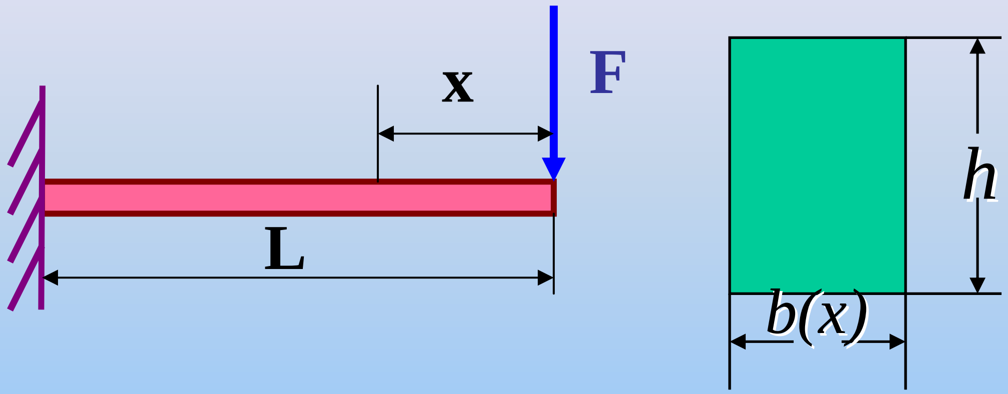
1、等强度梁

设计思想：按M(x)的变化来设计截面，采用变截面梁——横截面沿着梁轴线变化的梁。

$$\boxed{\sigma_{\max}=\frac{M(x)}{W_z(x)}=[\sigma]}$$

$$\Rightarrow \quad W_z(x)=\frac{M(x)}{[\sigma]}$$

例如矩形截面悬臂梁，设h=const,b=b(x), 则



$$W_z(x)=\frac{1}{6}b(x)h^2=\frac{M(x)}{[\sigma]}$$

$$=\frac{Fx}{[\sigma]}$$

$$\therefore b(x)=\frac{6Fx}{[\sigma]h^2}$$ （沿梁轴线呈线性分布）

x=0时，b=0，但要有足够的面积承受剪力。因此

$$\tau_{\max}=\frac{3}{2}\frac{F_s}{A}\le[\tau],$$ 而 $A=b_{\min}h$

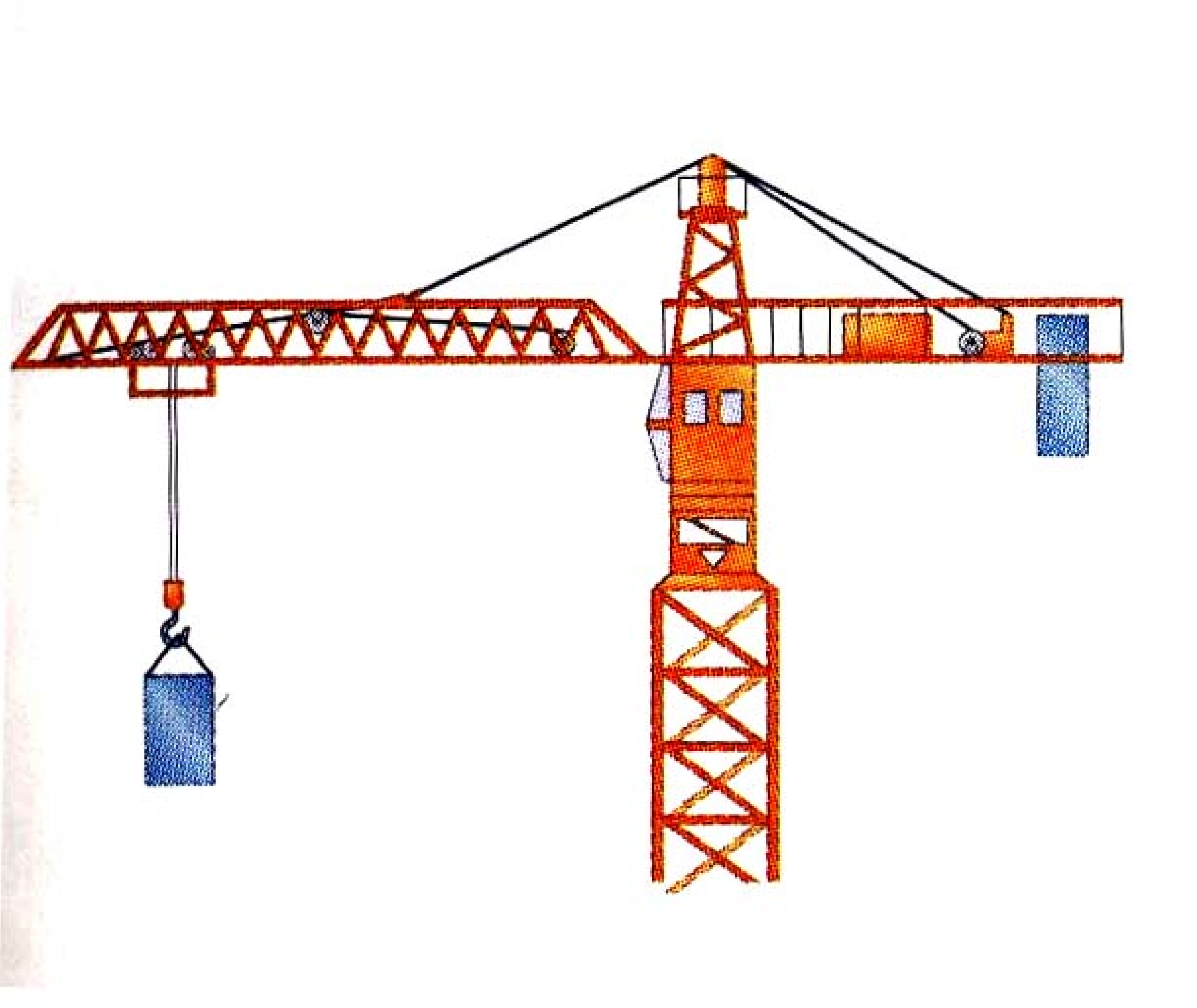
$$\therefore b_{\min}=\frac{3F}{2[\tau]h}$$

2、桁架

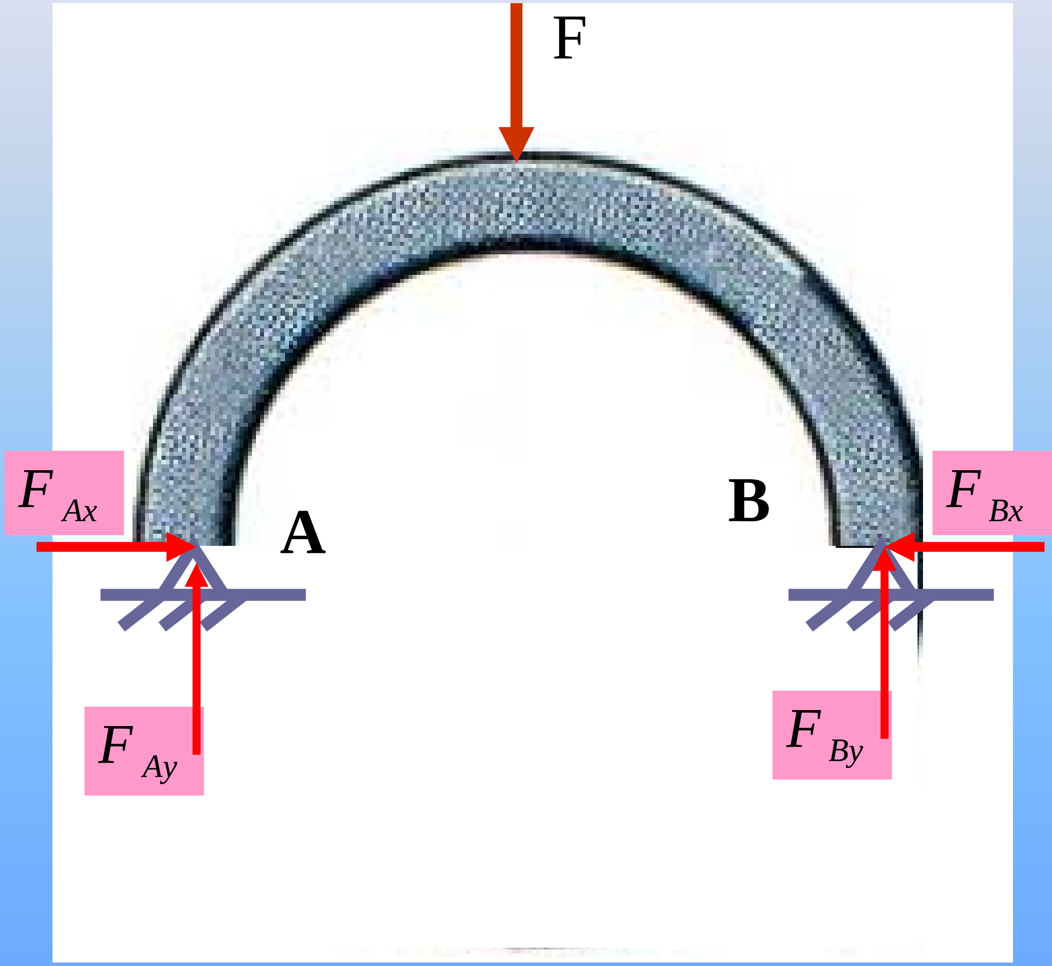
整体桁架——受弯构件

桁架中单个杆件——受轴向拉压

工程中的桁架结构——屋盖



3、拱



$\downarrow\downarrow M_{\max}$, ——提高强度

$F_{AX} \rightarrow F_N$

——压应力使截面上拉应力降低，可使抗拉能力差的材料充分利用。