

旋转悬臂梁的刚柔耦合动力学建模与频率分析

方建士^{1,2}, 章定国^{*2}

(1. 南京工程学院 材料工程学院, 南京 211167; 2. 南京理工大学 理学院, 南京 210094)

摘要:对固结于转动刚体上外接柔性梁的刚柔耦合动力学建模和频率特性进行了研究,在精确描述柔性梁非线性变形的基础上,利用 Hamilton 变分原理和假设模态法,在计入柔性梁由于横向变形而引起的轴向变形二阶耦合量的条件下,推导出考虑“动力刚化”项的一次近似耦合模型。首先忽略柔性梁纵向变形的影响,给出一次近似简化模型,引入无量纲变量,对简化模型做无量纲化处理,分析梁固有频率对模态截断数的依赖性;其次研究在一次近似简化模型和零次近似简化模型下,调谐角速度与共振现象的关系;最后分析一次近似耦合模型的动力特性。研究发现,为保证计算的精度,模态截断数应随无量纲角速度的增大而增加,合理的模态截断数具有收敛值;一次近似简化模型下悬臂梁横向弯曲振动不存在共振调谐角速度,一次耦合模型下柔性梁并没有出现屈曲失稳现象。现有典型文献的相关结论是值得商榷的。

关键词:悬臂梁;刚柔耦合;一次近似耦合模型;一次近似简化模型;频率分析

中图分类号:O313.7;O326 **文献标志码:**A

1 引言

旋转悬臂柔性梁的动力学建模和振动分析在航天器、机器人及高速旋转机构等工程技术领域具有独特的理论和应用价值。很多工程实例可以理想化为旋转悬臂梁,比如涡轮叶片、直升机机翼和卫星天线等。建立大范围旋转悬臂梁的动力学模型需要考虑结构柔性在运动中所产生的重大影响,传统的柔性多体系统动力学理论和方法由于无法捕捉到大范围运动引起的动力刚化项,从而造成仿真结果的偏差甚至错误^[1,2]。1987年,Kane^[1]指出传统零次近似模型在计算高速旋转机构的动力学问题时将产生错误,并提出“动力刚化”的概念。随后,众多学者对动力刚化问题进行大量研究,并在此基础上对柔性体变形及其大位移运动之间的刚柔耦合问题开展了广泛而深入的研究^[3-9],并逐渐形成了以计入横向变形引起的纵向缩短的二阶耦合变形量为主要方法的刚柔耦合动力学建模法。这些动力学方程在结构上都比传统的零次耦合模

型增加了由二阶耦合变形量引入的关于广义坐标的一阶或更高阶的量,假如忽略更高阶量而保留一阶量,这样的模型就成为一次近似耦合模型。理论分析和实验都证明了一次近似耦合模型的合理性。

柔性系统振动特性一直是众多学者感兴趣的研究方向。Southwell等^[10]利用 Rayleigh 能量理论对旋转运动梁的固有频率进行研究,推导出著名的 Southwell 方程。随后,Wright等^[11]采用 Hamilton 原理和 Frobenius 方法推导梁固有频率和振型的精确解。Yoo等^[12]采用达朗贝尔原理和瑞利-里兹假设模态法研究旋转悬臂梁固有频率和振型的数值解,吴胜宝等^[13]研究了刚体-微梁系统的动力学特性。

本文针对固结在转动刚体上柔性梁的刚柔耦合动力学建模及其固有频率进行研究。利用 Hamilton 变分原理和假设模态法,在计入柔性梁由于横向变形而引起的轴向变形的二阶耦合量的条件下,推导出系统的一次近似耦合动力学方程,进而给出一次近似简化模型。首先基于一阶近似简化模型,分析梁固有频率对模态截断数的依赖性;其次讨论共振调谐角速度与共振现象的关系,最后分析一次近似耦合模型的动力学特性。本文还就现有典型文献中值得商榷的相关结论进行了分析和探讨。

收稿日期:2010-11-18;修改稿收到日期:2011-06-28.

基金项目:国家自然科学基金(10772085,11132007);
江苏省自然科学基金(BK2007205);江苏省
青蓝工程;江苏省“333工程”;南京工程学院
科研基金(KXJ08102)资助项目.

作者简介:方建士(1982-),男,讲师;
章定国*(1967-),男,教授,博士生导师
(E-mail:zhangdg419@mail.njust.edu.cn).

2 柔性悬臂梁的变形描述

考虑如图 1 所示的在水平面内做旋转运动的刚柔耦合系统,其中 Hub(刚体)作定轴转动,在其上以悬臂的方式外接一根柔性梁。Hub 上受到力矩 $M(t)$ 的作用,过 Hub 圆心建立惯性坐标系 $O-XY$,在柔性梁上建立浮动坐标系 $o-xy$,其中 o 为 Hub 与柔性梁的连接处, x 轴沿未变形时梁的轴线,其反向延长线通过转轴 O ;Hub 绕转轴 O 的转动惯量为 J_{oh} ,半径为 a ,均质柔性梁的长度为 L ,单位长度质量为 ρA_0 ,梁的抗弯刚度为 EI ,拉压刚度为 EA_0 。本文采用等截面的 Euler-Bernoulli 梁模型,作旋转运动的平面柔性梁如图 2 所示, r_0 为浮动坐标系相对于惯性坐标系的矢径, r_1 为未变形时梁轴线上任意一点 p_0 点在浮动坐标系下的矢径, u 为 p_0 点变形位移矢量,则 p 点相对于惯性坐标系的矢径可写为

$$r_p = r_0 + A(r_1 + u) \tag{1}$$

式中 A 为浮动基相对于惯性坐标系的方向余弦矩阵。将式(1)对时间求导,得在惯性坐标系下 p 点的速度矢量如下。

$$\dot{r}_p = \dot{r}_0 + A\tilde{I}(r_1 + u)\dot{\theta} + A\dot{u} \tag{2}$$

式中 $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, $\tilde{I} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $r_1 = (x \ 0)^T$

$$u = \begin{bmatrix} u_x(x, t) \\ u_y(x, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1(x, t) - \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\partial w_2}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \\ w_2(x, t) \end{bmatrix} \tag{3}$$

式中 $w_1(x, t)$ 为实际的轴向变形量, $w_2(x, t)$ 为横向弯曲挠度, $w_c = -\frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\partial w_2}{\partial \xi} \right)^2 d\xi$ 是横向弯曲引起的纵向变形量,称为耦合变形量;该耦合变形量在传统的零次近似方法中是不考虑的,但在某些条件下它会对系统的动力学特性产生重要影响。

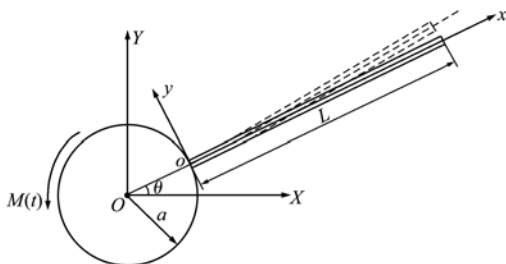


图 1 旋转悬臂柔性梁系统

Fig. 1 Flexible cantilever beam system with rotation motion

采用假设模态法来描述柔性梁的变形:

$$w_1(x, t) = \varphi_1(x) B_1(t), w_2(x, t) = \varphi_2(x) B_2(t) \tag{4}$$

式中 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 分别为梁的轴向和横向振动模态函数行向量, $B_1(t)$ 和 $B_2(t)$ 分别为梁的轴向和横向振动模态坐标列阵。

3 系统刚柔耦合动力学方程

图 1 所示,旋转悬臂柔性梁系统的动能可写为

$$T = \frac{1}{2} J_{oh} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \int_0^L \rho A_0 \dot{r}_p^T \dot{r}_p dx \tag{5}$$

由于考虑系统在水平面内运动,所以系统势能只有弹性变形能,可写为

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EA_0 \left(\frac{\partial w_1(x, t)}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 w_2(x, t)}{\partial x^2} \right)^2 dx \tag{6}$$

根据 Hamilton 变分原理,

$$\int_0^t (\delta T - \delta V + \delta W_F) dt = 0 \tag{7}$$

式中 δT 和 δV 分别为系统动能和势能的变分, δW_F 为作用在转动刚体上的外力矩 $M(t)$ 所做虚功,可表示为 $\delta W_F = M(t) \delta\theta$ 。

如图 1 所示,式(1)中 $r_0 = (a \cos\theta \ a \sin\theta)^T$ 。在式(5)展开时,考虑到变形耦合项 w_c 是横向弯曲挠度 w_2 的二阶小量,故可以作适当简化,舍去与 w_c 相关的一些高阶量。根据式(7)可得系统的动力学方程:

$$\begin{bmatrix} M_{\theta\theta} & M_{\theta 1} & M_{\theta 2} \\ M_{1\theta} & M_{11} & 0 \\ M_{2\theta} & 0 & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{B}_1 \\ \ddot{B}_2 \end{bmatrix} + 2\dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{23} \\ 0 & G_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{B}_1 \\ \dot{B}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

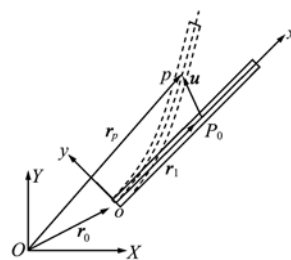


图 2 作大范围运动的柔性梁

Fig. 2 Flexible beam in large overall motion

式中

$$M_{\theta\theta} = J_{\theta h} + J_1 + 2\mathbf{R}_1 \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1^T \mathbf{D}_1 \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2^T \mathbf{D}_2 \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_2^T \mathbf{S} \mathbf{B}_2 \quad (9)$$

$$\mathbf{M}_{1\theta} = \mathbf{M}_{\theta 1}^T = -\mathbf{P} \mathbf{B}_2$$

$$\mathbf{M}_{\theta 2} = \mathbf{M}_{2\theta}^T = \mathbf{R}_2 + \mathbf{B}_1^T \mathbf{P} \quad (10)$$

$$\mathbf{M}_{11} = \mathbf{D}_1 = \int_0^L \rho A_0 \boldsymbol{\Phi}_1^T \boldsymbol{\Phi}_1 dx \quad (11)$$

$$\mathbf{M}_{22} = \mathbf{D}_2 = \int_0^L \rho A_0 \boldsymbol{\Phi}_2^T \boldsymbol{\Phi}_2 dx \quad (12)$$

$$\mathbf{G}_{23} = -\mathbf{G}_{32}^T = -\mathbf{P} \quad (13)$$

$$\mathbf{k}_{22} = \mathbf{K}_1 - \dot{\theta}^2 \mathbf{D}_1, \quad \mathbf{k}_{33} = \mathbf{K}_2 - \dot{\theta}^2 (\mathbf{D}_2 - \mathbf{S}) \quad (14)$$

$$\mathbf{Q}_\theta = -2\dot{\theta} [\mathbf{R}_1 \dot{\mathbf{B}}_1 - \mathbf{B}_2^T \mathbf{S} \dot{\mathbf{B}}_2 + \mathbf{B}_1^T \mathbf{D}_1 \dot{\mathbf{B}}_1 + \mathbf{B}_2^T \mathbf{D}_2 \dot{\mathbf{B}}_2] \quad (15)$$

$$\mathbf{Q}_1 = \dot{\theta}^2 \mathbf{R}_1^T \quad (16)$$

需要指出的是,在传统零次近似模型中,由于直接套用了结构动力学的小变形假设,认为纵向与横向变形之间没有耦合,因此在建立的动力学方程中并不包含式(9,14,15)中的下划线项。其中,式(14)中的 $\dot{\theta}^2 \mathbf{S}$ 项称为“动力刚化”项。

在研究非惯性系下的动力学问题时,系统大范围运动往往是已知和不用求解的。这种情况下的柔性梁动力学模型可由式(8)忽略大范围运动方程而得到。在式(8)中忽略第一行,可得柔性梁的动力学方程。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{B}}_1 \\ \dot{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix} + 2\dot{\theta} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{G}_{23} \\ \mathbf{G}_{32} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{B}}_1 \\ \dot{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \dot{\theta} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{1\theta} \\ \mathbf{M}_{2\theta} \end{bmatrix} \quad (17)$$

式(17)称为考虑横纵耦合效应的一次近似耦合模型。若在式(17)中忽略柔性梁的纵向振动效应,可得到简化的动力学方程为

$$\mathbf{M}_{22} \ddot{\mathbf{B}}_2 + [\dot{\theta}^2 (\mathbf{S} - \mathbf{D}_2) + \mathbf{K}_2] \mathbf{B}_2 = -\dot{\theta} \mathbf{R}_2^T \quad (18)$$

式(18)称为未考虑横纵耦合效应的一次近似简化模型。若忽略式(18)中的下划线项,即可转化为零次近似简化模型。

4 一次近似简化模型的动力特性分析

由式(18)可得一次近似简化模型下的柔性梁的横向自由振动微分方程:

$$\mathbf{M}_{22} \ddot{\mathbf{B}}_2 + [\dot{\theta}^2 (\mathbf{S} - \mathbf{D}_2) + \mathbf{K}_2] \mathbf{B}_2 = \mathbf{0} \quad (19)$$

对式(19)进行无量纲化处理,引入无量纲变量和参数:

$$\zeta = t/T^*, \quad \xi = x/L, \quad \mathbf{k}_2 = \mathbf{B}_2/L, \quad \delta = a/L, \quad \gamma = T^* \dot{\theta}$$

式中 $T^* = \left(\frac{\rho A_0 L^4}{EI} \right)^{1/2}$, 式(19)可写为

$$\bar{\mathbf{M}}_{22} \ddot{\mathbf{k}}_2 + [\gamma^2 (\bar{\mathbf{S}} - \bar{\mathbf{D}}_2) + \bar{\mathbf{K}}_2] \mathbf{k}_2 = \mathbf{0} \quad (20)$$

$$\text{式中} \quad \bar{\mathbf{M}}_{22} = \bar{\mathbf{D}}_2 = \int_0^1 \boldsymbol{\Phi}_2^T \boldsymbol{\Phi}_2 d\xi \quad (21)$$

$$\bar{\mathbf{S}} = \int_0^1 (\delta + \xi) \bar{\mathbf{H}}(\xi) d\xi, \quad \bar{\mathbf{K}}_2 = \int_0^1 \boldsymbol{\Phi}_2'^T \boldsymbol{\Phi}_2' d\xi \quad (22)$$

$$\text{式中} \quad \bar{\mathbf{H}}(\xi) = \int_0^\xi \left[\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_2}{\partial \eta} \right]^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_2}{\partial \eta} \right] d\eta$$

引入关于无量纲时间量 ζ 的调和函数:

$$\mathbf{k}_2 = e^{j\omega\zeta} \boldsymbol{\Theta} \quad (23)$$

式中 j 为虚数, ω 为无量纲固有频率, $\boldsymbol{\Theta}$ 为常数列阵。

将式(23)代入式(20)可得特征值问题,

$$\omega^2 \mathbf{M} \boldsymbol{\Theta} = \mathbf{K}^C \boldsymbol{\Theta} \quad (24)$$

式中 \mathbf{M} 和 \mathbf{K}^C 为对称矩阵,表示为

$$\mathbf{M} = \bar{\mathbf{M}}_{22}, \quad \mathbf{K}^C = \gamma^2 (\bar{\mathbf{S}} - \bar{\mathbf{D}}_2) + \bar{\mathbf{K}}_2 \quad (25)$$

4.1 模态截断数对固有频率分析的影响

表1给出中心刚体半径比率 $\delta=0$ (即中心刚体半径为0)时,采用本文一次近似简化模型的前四阶和前十阶模态计算的第一阶无量纲固有频率,以及文献[14](采用前四阶模态)所提供的部分结果,通过比较,发现本文用前四阶模态所得结果与文献[14]基本一致。采用前十阶模态与前四阶模态的结果存在差异,并且它们之间的差异随着 γ 的增大而增大。当 $\gamma=10$ 时,前四阶模态与前十阶模态所得结果相差大约0.288%,说明此时计算结果随模态数已经相对收敛。表2为 $\delta=0$ 且 $\gamma=100$ (即高速旋转)情况下,采用不同模态截断数计算前三阶固有频率的结果。由表2可知,随着计算所用模态数的不断增加,计算所得的固有频率会收敛于某一值。当 $\gamma=100$ 时,取模态数为4和10时的频率计算的结果相差甚大。图3为无量纲角速度 γ 和模态截断数的收敛值曲线。从图3可以看出,随着无量纲角速度 γ 的增大,为获得频率的收敛值,所取模态截断数的收敛值也在增大,最终的收敛值为10。由此可知,在一般情况下模态截断数取10可以满足频率分析的精度要求。本文采用前十阶模态来计算。

表 1 梁横向弯曲振动的第一无量纲固有频率的比较($\delta=0$)

Tab. 1 Comparison of the first dimensionless natural frequencies in chord-wise bending vibration ($\delta=0$)

γ	第一固有频率		
	本文		文献[14]
	前四阶模态	前十阶模态	
0	3.516015	3.516015	3.51602
1	3.543237	3.543236	3.54324
2	3.621815	3.621797	3.62182
3	3.743609	3.743518	3.74361
4	3.898042	3.897729	3.89804
5	4.074710	4.073908	4.07471
6	4.264984	4.263252	4.26498
7	4.462521	4.459200	4.46251
8	4.663051	4.657254	4.66305
9	4.863981	4.854529	4.86398
10	5.063836	5.049273	5.06384

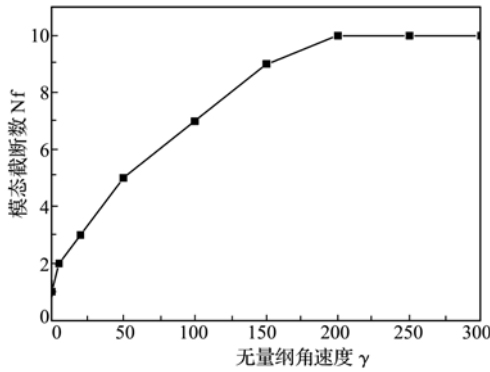


图 3 模态截断数的收敛值
Fig. 3 Convergence of number of modes

4.2 共振调谐角速度与柔性梁的共振现象

文献[12]是振动领域内关于旋转柔性梁振动分析的一篇重要论文。该文认为当旋转运动的无量纲角速度等于悬臂梁的无量纲一阶固有频率时,柔性梁将发生共振现象,横向振动的振幅会变得很大。称引起共振的角速度为调谐角速度。文献[12]给出了调谐角速度的求法,其数学式为 $\gamma = \omega$ 。图 4 为中心刚体半径比率 δ 分别取 0、1 和 5 时采用一次近似简化模型,以及中心刚体半径比率 δ 取 0 时采用零次近似简化模型的横向弯曲振动的第一阶无量纲固有频率随角速度 γ 的变化轨迹。其中采用一次近似简化模型的结果与文献[12]给出的结果相同,但文献[12]没有给出图 4 中采用零次近似简化模型的相关计算结果。从图 4 可以看出,在一次近似简化模型中,当 $\delta=0$ 时,梁的无量纲固有频率曲线与 $\gamma = \omega$ 直线相交,交于 $\gamma = 3.877450$,文献[12]称此时的 γ 为调谐角速度,调谐角速度 $\gamma = 3.88$,文献[14]的调谐角速度 $\gamma = 3.8786$ 。在零次

表 2 梁横向弯曲振动的前三阶无量纲固有频率($\delta=0, \gamma=100$)

Tab. 2 Convergence of the dimensionless chord-wise bending natural frequencies vs number of modes ($\delta=0, \gamma=100$)

NO. of modes	第一固有频率 (first)	第二固有频率 (second)	第三固有频率 (third)
1	44.111175	—	—
2	32.828099	236.929589	—
3	27.142551	236.800630	415.680469
4	23.888732	230.901116	409.471945
5	21.720442	230.704264	394.201242
6	20.198838	229.237571	393.876154
7	19.074229	229.004919	390.013335
8	18.223770	228.439160	390.011623
9	17.564426	228.258478	388.718818
10	17.046855	227.986073	388.657860

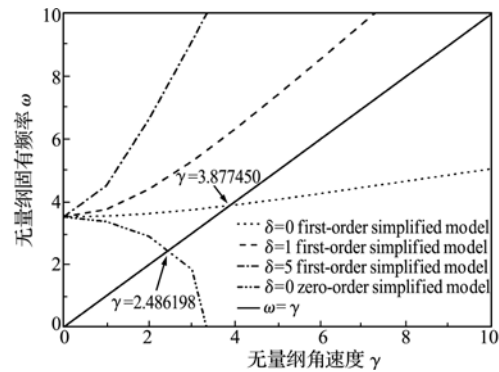


图 4 梁横向弯曲振动的调谐角速度
Fig. 4 Tuned angular speed in the chord-wise bending vibration

近似简化模型中,当 $\delta=0$ 时,按文献[12]给出的方法计算而得的调谐角速度为 $\gamma = 2.486198$;同时,从图 4 还可以看出,一次近似简化模型的一阶无量纲固有频率随角速度增大而增大;而零次近似简化模型的一阶无量纲固有频率却随角速度增大而减小,当 $\gamma > 3.5160152$ 时,频率将由正实数过渡到虚数。

假设文献[12]的结论正确,按上述频率分析的结果。当如图 1 所示刚体-柔性梁系统的中心刚体半径 $a=0$ m,角速度 $\gamma=3.877450$ 时,采用一次近似简化模型的悬臂柔性梁将发生共振现象;角速度 $\gamma=2.486198$ 时,采用零次近似简化模型的悬臂柔性梁将发生共振现象,横向振动振幅将变大,甚至可能产生破坏性影响。

为此,取如图 1 所示刚体-柔性梁旋转系统参数:中心刚体半径 $a=0$ m,悬臂梁长度 $L=10$ m,线密度 $\rho A_0=1.2$ kg/m,截面抗弯刚度 $EI=14000$ N·m², $EA_0=686000$ Pa·m²。假定中心刚体由静止

开始做大范围运动,其运动角速度规律取为

$$\dot{\theta} = \begin{cases} \frac{\omega_0 t}{T} - \left(\frac{\omega_0}{2\pi}\right) \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right), & 0 < t \leq T \\ \omega_0, & t > T \end{cases} \quad (26)$$

式中 $T = 15 \text{ s}$, 柔性梁在 $T = 15 \text{ s}$ 时达到角速度 ω_0 , ω_0 的取值为 $\omega_0 = \dot{\theta} = \gamma/T^*$ 。

图 5 给出了系统取不同无量纲角速度时,采用一次近似简化模型进行仿真,柔性梁末端 y 方向的变形位移,图 5(b) 为 $15 \leq t \leq 20$ 时间区域内的响应放大图。从图 5 可以看出,当 $\gamma = 3.877450$ 时,柔性梁横向振动振幅未出现急剧增大的现象。

图 6 为采用零次近似简化模型仿真时,柔性梁末端 y 方向的变形位移。从图 6(a) 可以看出,在零次近似模型的调谐角速度 $\gamma = 2.486198$ 时柔性梁并未出现变形位移过大或发散等现象,说明系统在该角速度时未出现共振现象。从图 6(b) 可以看出,当 $\gamma \approx 3.52$ 时,柔性梁的末端变形由收敛过渡到发散,此角速度值正好与一阶无量纲固有频率由正实数过渡到虚数的角速度值吻合,也刚好等于柔性梁在无大位移运动时一阶固有频率(见表 1)。众多研究表明,当系统角速度增大到某一临界值时,零次近似模型的仿真结果将发散。本文通过频率分析得到了零次近似模型发散的临界角速度,即梁一阶固

有频率由正变负时的柔性梁的旋转角速度,该角速度刚好等于柔性梁在无大位移运动时的一阶固有频率。

上述计算结果与文献[12]的结果并不一致,本文研究发现文献[12]关于调谐角速度的概念和计算方法都是值得商榷的。其实,在一次近似简化模型下,中心刚体-外接旋转柔性梁系统根本不存在使得梁发生变形共振的调谐角速度,因为在这个模型中,柔性梁的固有频率都是正的,并且随角速度的增大而增大,找不到使梁的固有频率变负的角速度。用文献[12]方法得到的所谓调谐角速度只是一个与梁固有频率相等的旋转角速度而已,并不具有特殊物理意义。进一步分析发现,这种概念性错误主要缘于传统的零次简化模型,在传统的零次简化模型中由于梁的大位移旋转运动有“动力柔化”作用,存在一个使得柔性梁的一阶固有频率由正变负的临界角速度,并且这个角速度刚好等于柔性梁在无大位移运动时的一阶固有频率。文献[12]直接将这个结论移植到了一次近似简化模型下,从而导致了错误。该文中提供的调谐角速度的计算方法,即使在存在调谐角速度的零次简化模型下也是值得商榷的。

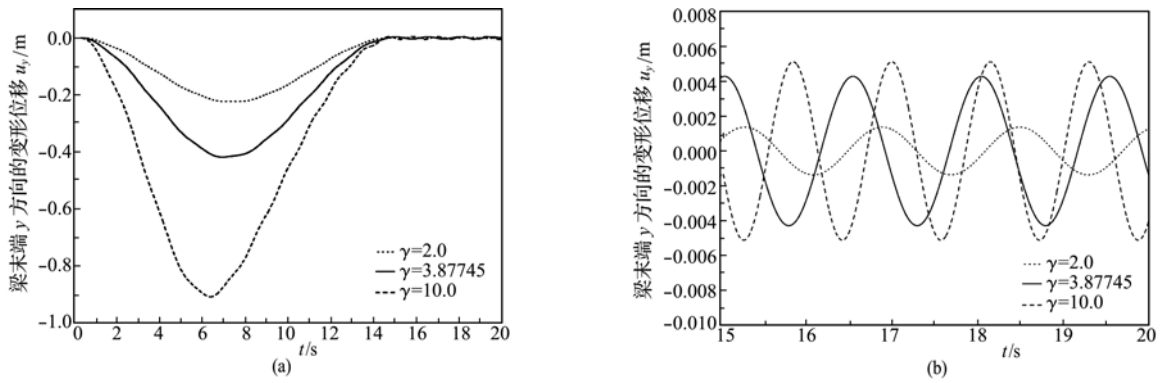


图 5 一次近似简化模型的梁末端 y 方向的变形位移
Fig. 5 Time history of tip deformation of the FOAS model

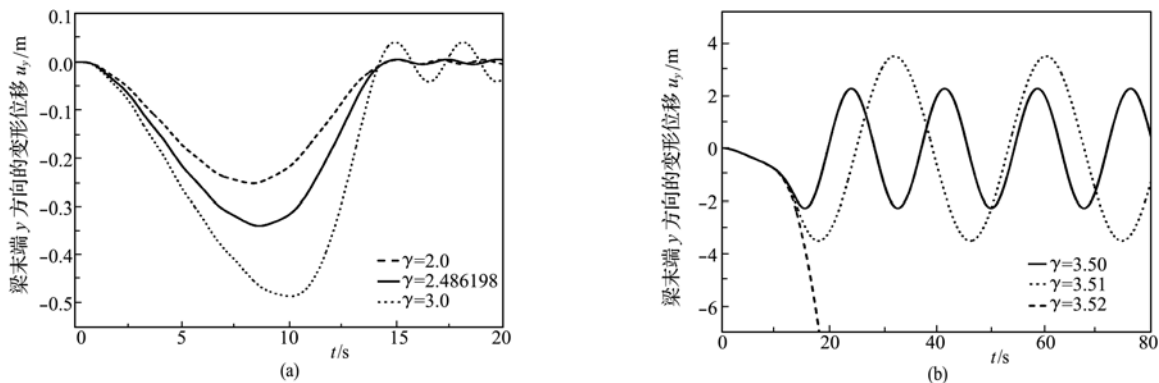


图 6 零次近似简化模型的梁末端 y 方向的变形位移
Fig. 6 Time history of tip deformation of the ZOAS model

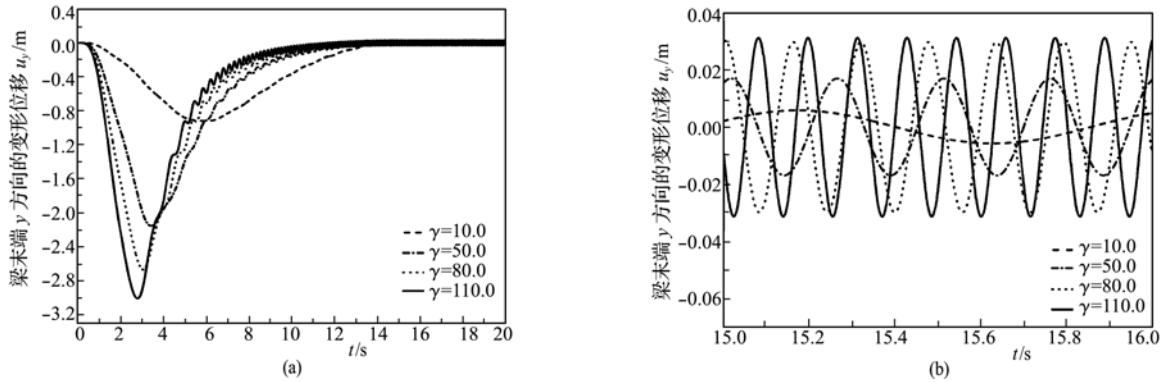


图7 一次近似耦合模型的梁末端 y 方向的变形位移
Fig. 7 Time history of tip deformation of the FOAC model

5 一次近似耦合模型的动力特性分析

文献[12]认为当使用式(17),即考虑横纵耦合效应时,柔性梁一阶横向弯曲固有频率随无量纲角速度 γ 的增大不再是单调上升,而是随 γ 的增大先增大后减小到某一角速度时,该频率变为零,并认为梁此时出现屈曲(buckling),称此时的角速度为梁的屈曲角速度。取与文献[12]中考虑横纵耦合效应时相同的物理模型,大范围运动规律如式(26)所示。图7为采用本文中一次近似耦合模型(即式(17))进行仿真时的柔性梁末端的横向变形位移的响应时程,图7(b)为 $15 \leq t \leq 16$ 时间区域内的响应放大图。图7中的4个无量纲角速度为文献[12]中具有代表性的角速度,能够反映一阶横向弯曲频率的变化趋势。从图7(b)可以看出,随着无量纲角速度 γ 的增大柔性梁末端的响应频率也在增大,并未出现文献[12]中一阶固有频率的变化趋势。在文献[12]所谓的屈曲角速度 $\gamma = 110$ 附近反复计算和分析,均未发现系统计算失稳的迹象。因为,假如一阶横向弯曲固有频率为零,数值计算理应发散。

6 结论

本文以中心刚体与外接柔性梁组成的刚柔耦合系统为对象,推导出系统的刚柔耦合一次近似耦合动力学方程,并对其动力学特性进行了研究。研究发现,为保证计算的精度,计算时所取模态截断数应随无量纲角速度的增大而增加,且模态数具有收敛值,模态截断数取10能满足系统动力特性对精度的要求;一次近似简化模型中,外接悬臂梁横向弯曲振动不存在共振现象和调谐角速度,零次近似简化模型中,横向弯曲振动存在共振现象和调谐角速度,该调谐角速度可以通过频率分析求得;现

有典型文献[12]中关于梁弯曲振动的共振和调谐角速度的概念及调谐角速度的计算等结论有不完善之处;文献[12]中关于同时考虑纵、横变形时有关柔性梁的横向振动的分析,其结果与本文研究结果不符。因此,文献[12]的相关结论值得商榷。

参考文献(References):

- [1] Kane T R, Ryan R R, Banerjee A K. Dynamics of a cantilever beam attached to a moving base[J]. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1987, **10**(2): 139-151.
- [2] Choura S, Jayasuriya S, Medick M A. On the modeling and open-loop control of a rotating thin flexible beam[J]. *Journal of Dynamic System, Measurement, and Control*, 1991, **113**(1): 26-33.
- [3] Zhang D J, Huston R L. On dynamic stiffening of flexible bodies having high angular velocity[J]. *Mechanics of Structures and Machines*, 1996, **24**(3): 313-329.
- [4] 蒋丽忠, 洪嘉振. 作大范围运动弹性梁的动力刚化分析[J]. *计算力学学报*, 1998, **15**(4): 407-413. (JIANG Li-zhong, HONG Jia-zhen. Dynamics of an elastic beam in large overall motion[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 1998, **15**(4): 407-413. (in Chinese))
- [5] 杨辉, 洪嘉振, 余征跃. 刚柔耦合建模理论实验验证[J]. *力学学报*, 2003, **35**(2): 253-256. (YANG Hui, HONG Jia-zhen, YU Zheng-yue. Experiment validation on modeling theory for rigid-flexible coupling system[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, **35**(2): 253-256. (in Chinese))
- [6] 杨辉, 洪嘉振, 余征跃. 刚-柔耦合多体系统动力学建模与数值仿真[J]. *计算力学学报*, 2003, **20**(4): 402-408. (YANG Hui, HONG Jia-zhen, YU Zheng-

- yue, Dynamics modeling and numerical simulation for a rigid-flexible coupling multibody system[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2003, **20**(4): 402-408. (in Chinese))
- [7] Liu J Y, Hong J Z. Geometric stiffening effect on rigid-flexible coupling dynamics of an elastic beam[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, **278**: 1147-1162.
- [8] 蔡国平,洪嘉振. 旋转柔性梁的假设模态法研究[J]. 力学学报, 2005, **37**(1): 48-56. (CAI Guo-ping, HONG Jia-zhen, Assumed mode method of a rotating flexible beam[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2005, **37**(1): 48-56. (in Chinese))
- [9] 章定国,余纪邦. 做大范围运动的柔性梁的动力学分析[J]. 振动工程学报, 2006, **19**(4): 475-480. (ZHANG Ding-guo, YU Ji-bang, Dynamical analysis of a flexible cantilever beam with large overall motions[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2006, **19**(4): 475-480. (in Chinese))
- [10] Southwell R, Gough F. The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades[R]. British A. R. C. Report and Memoranda, 1921, No. 766.
- [11] Wright A, Smith C, Thresher R, et al. Vibration modes of centrifugally stiffened beams[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1982, **49**: 197-202.
- [12] Yoo H H, Shin S H. Vibration analysis of rotating cantilever beams[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, **212**(5): 807-828.
- [13] 吴胜宝,章定国,康新. 刚体-微梁系统的动力学特性[J]. 机械工程学报, 2010, **46**(3): 76-82. (WU Sheng-bao, ZHANG Ding-guo, KANG Xin, Dynamic properties of hub-microbeam system[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2010, **46**(3): 76-82. (in Chinese))
- [14] Cheng J L, Xu H, Yan A Z. Frequency Analysis of a rotating cantilever beam using assumed mode method with coupling effect[J]. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 2006, **34**: 25-47.

Rigid-flexible coupling dynamic modeling and frequency analysis of a rotating cantilever beam

FANG Jian-shi^{1,2}, ZHANG Ding-guo^{*2}

(1. School of Materials Engineering, Nanjing Institute of Technology, Nanjing 211167, China;

2. School of Sciences, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract: The rigid-flexible coupling dynamics and frequency analysis of a cantilever beam attached to a rotating hub is studied. Based on the accurate description of non-linear deformation of the flexible beam, the first-order approximation coupling(FOAC) model with the dynamic stiffening terms are derived from Hamilton theory and assumed mode method, taking the second-order coupling quantity of axial displacement caused by transverse displacement of the beam into account. The first-order approximation simplified(FOAS) model which neglects the effect of axial deformation of a beam is presented. The simplified model is transformed into dimensionless form in which dimensionless parameters are identified. Firstly, the dependence of natural frequency of a flexible beam on number of modes is analyzed. Then, the relation between the tuned angular speed and the resonant phenomenon is studied. Finally, the dynamic characteristic of the first-order approximation coupling model is analyzed. Generally, as the dimensionless angular speed increases, the used number of modes should increase properly to obtain the adequate accuracy, and it has a convergent value. There is no tuned angular speed of a cantilever beam in the first-order approximation simplified model. And there is also no the so called buckling unstable phenomenon. The results in the typical existing references are arguable.

Key words: cantilever beam; rigid-flexible coupling; first-order approximation coupling(FOAC) model; first-order approximation simplified(FOAS) model; frequency analysis