

开口薄壁杆件结构稳定分析的 精确单元和两步求解算法

李文雄^{1,2}, 马海涛^{*1}, 高兴军¹

(1. 华南理工大学 土木工程系 亚热带建筑国家重点实验室, 广州 510640;

2. 华南农业大学 水利与土木工程学院, 广州 510642)

摘要:从控制微分方程的通解出发,构造受偏心压力作用开口薄壁杆件的精确形函数,建立用于开口薄壁杆件结构稳定性分析的精确有限元,得到了单元刚度矩阵和几何刚度矩阵的显式表达,提出了计算给定区间内各阶临界荷载以及相应失稳模态的两步计算方法。计算结果表明,与常规单元相比,采用精确单元无需进行网格细分就可以获得精确的数值结果,结合本文的两步求解算法,可以准确获得给定区间内全部临界荷载和失稳模态。

关键词:有限元法;薄壁杆件;稳定分析;刚度矩阵;精确单元

中图分类号:O343 **文献标志码:**A

1 引言

一般地,若在结构稳定性分析中采用常规三次多项式形函数建立单元刚度矩阵,只能得到近似解。为得到较准确的结果,需要增加模型中的单元数目,构造较精确的单元刚度矩阵是提高有限元法在薄壁杆件稳定性分析中的精度的主要方法。

薄壁杆件弯扭稳定性分析的数值计算方法的研究,是一个未能很好解决的问题,国内外学者展开了一系列的研究。吴秋水等^[1]采用线性函数作为横截面翘曲位移的插值函数,构造了适用于任意横截面形状和任意边界条件薄壁杆件的有限杆元。辛克贵和姜美兰^[2]提出了一种基于势能原理的薄壁杆件稳定分析的半离散方法,采用转换 B3 函数模拟杆件横截面的翘曲位移场,并考虑了杆壁中面上剪切变形的影响,适用于任意横截面形状和任意边界条件的薄壁杆件。干沔和徐兴^[3]在梁的基本假定的基础上,通过修改空间等参数单元的弹性矩阵,构造了 20 结点三维退化梁单元,并将该单元用于薄壁杆件的稳定性分析。

建立精确单元刚度矩阵能有效提高分析的精

度,其主要途径之一是构造精确的位移场。Ma^[4,5]提出了一种精确有限元和振动分析的精确算法,对于弹性杆和框架结构振动问题,根据控制微分方程的位移通解形式确定单元的位移形函数,由此构造精确单元刚度矩阵和质量矩阵,并提出精确计算自振频率和相应振动模态的迭代算法,该种单元可方便地在通用有限元软件中实现。陈太聪和马海涛^[6]将该方法推广至框架结构的稳定性分析中,根据杆件屈曲控制微分方程的位移通解确定单元的位移形函数,继而构造精确单元刚度矩阵和几何刚度矩阵,并通过算例表明其有效性。基于同样的思路,高兴军等^[7]研究了弹性地基上 Timoshenko 梁的静力分析问题,提出了能正确表示横向位移和截面转角耦合特性的位移场,取得了理想的效果。文献^[8]将薄壁杆件弯扭稳定性控制微分方程组转换成一阶常系数微分方程组,以其特征值和特征向量为基础构造位移场,从而建立用于弯扭稳定性分析的刚度矩阵并得到临界荷载。文献^[9]将文献^[8]的方法推广至薄壁杆件动力分析,构造出动力刚度阵。周华强和聂孟喜^[10]采用特征值和特征向量的方法求薄壁杆件弯扭耦合静力分析方程组的精确解,并建立精确刚度矩阵。

文献^[8]在建立单元的弹性刚度阵和几何刚度阵时,需计算特征方程的广义特征值,其最终的单元刚度阵难以显式表达,因此,其算法难以在通用有限元软件中实现。本文在现有研究基础上,根据

收稿日期:2011-05-20;修改稿收到日期:2011-10-31.

基金项目:华南理工大学亚热带建筑科学国家重点实验室
自主研究课题项目.

作者简介:李文雄(1979-),男,博士生,讲师;
马海涛*(1962-),男,教授
(E-mail: maht@scut.edu.cn);
高兴军(1985-),男,博士生.

开口薄壁杆件弯扭稳定性分析的控制微分方程的通解建立位移函数的显式表达;利用能量原理导出精确弹性刚度阵和几何刚度阵,提出求解非线性特征值问题的两步算法,可准确地确定各阶临界荷载。

2 薄壁杆件稳定性分析的精确单元

2.1 控制方程及其通解

针对开口薄壁杆件稳定性分析问题,已经建立了相应的控制微分方程^[11-13],若将轴向变形分开考虑并忽略翘曲的非线性部分的影响,偏心受压开口薄壁杆件弯扭稳定性控制微分方程为^[13]

$$\tilde{A}u^{(4)} + \tilde{B}u^{(2)} + \tilde{C}\theta^{(2)} = 0 \quad (1)$$

$$\tilde{D}v^{(4)} + \tilde{B}v^{(2)} + \tilde{E}\theta^{(2)} = 0 \quad (2)$$

$$\tilde{C}u^{(2)} + \tilde{E}v^{(2)} + \tilde{F}\theta^{(2)} + \tilde{G}\theta^{(4)} = 0 \quad (3)$$

式中 u, v 和 θ 为杆件两个横向位移和绕杆轴的扭转角,均为杆纵轴坐标 z 的函数,上标括号内数字表示对杆纵轴坐标 z 导数的阶次, $\tilde{A} = EI_y, \tilde{B} = -P, \tilde{C} = P(e_y - y_0), \tilde{D} = EI_x, \tilde{E} = P(x_0 - e_x), \tilde{F} = -(Pr^2 + 2Pe_y\beta_y + 2Pe_x\beta_x + GI_d), \tilde{G} = EI_\omega$ 。其中, E 和 G 分别为材料的弹性模量和剪切模量, P 为轴向力(拉力取为正), e_x 和 e_y 为横截面沿 x 和 y 轴的轴向力偏心距, I_x, I_y 和 I_ω 分别为绕 x, y 轴的惯性矩和翘曲惯性矩, x_0 和 y_0 为截面剪心坐标, I_d 为圣维南扭转惯性矩, β_x, β_y 和 r^2 分别定义为

$$\beta_x = \int_A x(x^2 + y^2) dA / 2I_y - x_0$$

$$\beta_y = \int_A y(x^2 + y^2) dA / 2I_x - y_0$$

$$r^2 = (I_x + I_y) / A + x_0^2 + y_0^2$$

根据解的具体耦合情况,式(1~3)中的微分方程组的求解可分四种情况进行。

(1) u, v, θ 相互耦联

此时, $\tilde{C} \neq 0, \tilde{E} \neq 0$ 。对微分方程组进行消元后,可得关于 u 的 8 阶常系数常微分方程:

$$\bar{A}u^{(8)} + \bar{B}u^{(6)} + \bar{C}u^{(4)} + \bar{D}u^{(2)} = 0 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \tilde{A}\tilde{D}\tilde{G}, \bar{B} = \tilde{B}\tilde{D}\tilde{G} + \tilde{A}\tilde{B}\tilde{G} + \tilde{A}\tilde{D}\tilde{F} \\ \bar{C} &= \tilde{B}^2\tilde{G} + \tilde{B}\tilde{D}\tilde{F} + \tilde{A}\tilde{B}\tilde{F} - \tilde{C}^2\tilde{D} - \tilde{E}^2\tilde{A} \\ \bar{D} &= \tilde{B}^2\tilde{F} - \tilde{C}^2\tilde{B} - \tilde{E}^2\tilde{B} \end{aligned}$$

其特征方程为

$$\lambda^2(\bar{A}\lambda^6 + \bar{B}\lambda^4 + \bar{C}\lambda^2 + \bar{D}) = 0 \quad (5)$$

此方程除 2 个零特征根外,有 3 对 6 个非零特征根,这 6 个特征根可通过求解关于 λ^2 的三次方程确定,将其记为 $\lambda_1 \sim \lambda_6$ 。这样,方程(4)的通解可表示为

$$\begin{aligned} u(z) &= ae^{\lambda_1 z} + be^{\lambda_2 z} + ce^{\lambda_3 z} + de^{\lambda_4 z} + \\ & ee^{\lambda_5 z} + fe^{\lambda_6 z} + gz + h \end{aligned} \quad (6)$$

式中 a, b, \dots, h 为待定常数,再利用式(1,3)可得

$$\begin{aligned} \theta(z) &= \xi_1 ae^{\lambda_1 z} + \xi_2 be^{\lambda_2 z} + \xi_3 ce^{\lambda_3 z} + \xi_4 de^{\lambda_4 z} + \\ & \xi_5 ee^{\lambda_5 z} + \xi_6 fe^{\lambda_6 z} + sz + t \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} v(z) &= \zeta_1 ae^{\lambda_1 z} + \zeta_2 be^{\lambda_2 z} + \zeta_3 ce^{\lambda_3 z} + \zeta_4 de^{\lambda_4 z} + \\ & \zeta_5 ee^{\lambda_5 z} + \zeta_6 fe^{\lambda_6 z} + mz + n \end{aligned} \quad (8)$$

式中 $\xi_i = -(\tilde{A}\lambda_i^2 + \tilde{B})/\tilde{C} \quad (i=1, 2, \dots, 6)$

$$\zeta_i = -(\tilde{G}\xi_i\lambda_i^2 + \tilde{F}\xi_i + \tilde{C})/\tilde{E} \quad (i=1, 2, \dots, 6)$$

其中 m, n, s, t 分别为积分常数。

(2) u, θ 耦联, v 独立

此时, $\tilde{C} \neq 0, \tilde{E} = 0$ 。由式(2)可独立求出 v 的通解形式即

$$v(z) = ce^{\lambda_3 z} + de^{\lambda_4 z} + mz + n \quad (9)$$

式中 λ_3 和 λ_4 为特征方程的非零根。

对式(1,3)进行消元,可得到关于 u 的 6 阶方程:

$$\bar{A}u^{(6)} + \bar{B}u^{(4)} + \bar{C}u^{(2)} = 0 \quad (10)$$

式中 $\bar{A} = \tilde{A}\tilde{G}, \bar{B} = \tilde{B}\tilde{G} + \tilde{A}\tilde{F}, \bar{C} = \tilde{B}\tilde{F} - \tilde{C}^2$, 该方程除 2 个零特征根外,有 2 对 4 个非零特征根,记为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_5, \lambda_6$, 则 u 和 θ 的解可以写为

$$u(z) = ae^{\lambda_1 z} + be^{\lambda_2 z} + ee^{\lambda_5 z} + fe^{\lambda_6 z} + gz + h \quad (11)$$

$$\theta(z) = \xi_1 ae^{\lambda_1 z} + \xi_2 be^{\lambda_2 z} + \xi_5 ee^{\lambda_5 z} + \xi_6 fe^{\lambda_6 z} + sz + t \quad (12)$$

式中 $\xi_i = -(\tilde{A}\lambda_i^2 + \tilde{B})/\tilde{C} \quad (i=1, 2, 5, 6)$, a, b, e, f, g, h, s, t , 分别为积分常数。

(3) v, θ 耦联, u 独立

此时, $\tilde{C} = 0, \tilde{E} \neq 0$ 。参照情况 2 的做法,可得 u, v, θ 的通解。限于篇幅,不详细列出。

(4) u, v, θ 相互独立

此时, $\tilde{C} = \tilde{E} = 0$, 式(1~3)可分别求解。限于篇幅,这里也不细述。

基于以上四种情况的推导结果,可以统一将位移通解写成以下的一般表达式:

$$d(z) = \mathbf{X}_\alpha(z)\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{X}_\beta(z)\boldsymbol{\beta} \quad (13)$$

式中各项可表示为

$$\begin{aligned} d(z) &= \{u(z) \quad v(z) \quad \theta(z)\}^T \\ \boldsymbol{\alpha} &= \{a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f\}^T \\ \boldsymbol{\beta} &= \{g \quad h \quad m \quad n \quad s \quad t\}^T \end{aligned}$$

$$\mathbf{X}_\alpha(z) = \mathbf{M}\mathbf{E}(z)$$

$$\mathbf{X}_\beta(z) = \begin{bmatrix} z & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z & 1 \end{bmatrix}$$

式中 $\mathbf{E}(z)$ 为 6 阶对角矩阵, $\mathbf{E}(z) = \text{diag}(e^{\lambda_1 z}, e^{\lambda_2 z},$

..., e^{6z}), \mathbf{M} 为 3×6 阶矩阵, 四种情况下分别取以下形式。

(1) u, v, θ 相互耦联

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \xi_3^{-1} & \xi_4^{-1} & \xi_5^{-1} & \xi_6^{-1} \\ \xi_1 & \xi_2 & 1 & 1 & \xi_3 \xi_5^{-1} & \xi_6 \xi_5^{-1} \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \xi_5^{-1} & \xi_4 \xi_5^{-1} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) u, θ 耦联, v 独立

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \xi_5^{-1} & \xi_6^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \xi_1 & \xi_2 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(3) v, θ 耦联, u 独立

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \xi_5^{-1} & \xi_6^{-1} \\ 0 & 0 & \xi_3 & \xi_4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(4) u, v, θ 相互独立

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2 形函数矩阵

基于式(13), 可定义位移通解矩阵, $\mathbf{X}(z) = [\mathbf{X}_\alpha(z) \quad \mathbf{X}_\beta(z)]$ 。很明显, $\mathbf{X}(z)$ 对讨论的四种情况取不同的具体形式, 而通过 $\mathbf{X}(z)$, 式(1~3)中的控制微分方程的通解可表示为

$$\mathbf{d}(z) = \mathbf{X}(z)\delta = [\mathbf{X}_\alpha(z) \quad \mathbf{X}_\beta(z)]^T \delta \quad (14)$$

式中 δ 为有 12 个分量的列向量, 子矩阵 $\mathbf{X}_\alpha(z)$ 、 $\mathbf{X}_\beta(z)$ 和 $\mathbf{X}_\theta(z)$ 皆为 1×12 矩阵。

因为将轴向变形分开考虑, 只需考虑三个位移分量, 取单元位移插值函数表达式为

$$\mathbf{d}(z) = \{u(z) \quad v(z) \quad \theta(z)\}^T = \mathbf{N}(z)\mathbf{\Delta} \quad (15)$$

式中 \mathbf{N} 为形函数矩阵, $\mathbf{\Delta}$ 为节点位移向量

$$\mathbf{\Delta} = \{u_1 \quad u'_1 \quad v_1 \quad v'_1 \quad \theta_1 \quad \theta'_1 \quad u_2 \quad u'_2 \quad v_2 \quad v'_2 \quad \theta_2 \quad \theta'_2\}^T$$

为保证位移场满足控制方程, 将形函数矩阵 $\mathbf{N}(z)$ 取成其通解的线性组合。注意到 $\mathbf{X}(z)$ 的每一列为一个独立的解, 可将插值函数矩阵表示为

$$\mathbf{N}(z) = \mathbf{X}(z)\mathbf{T} \quad (16)$$

式中 \mathbf{T} 为 12 阶常数方阵, 其每一列定义了通解的一种线性组合, 利用插值函数在节点上应满足的条件可确定具体的组合系数。考虑全部 12 个节点位移自由度后, 可得

$$\mathbf{T}_b \times \mathbf{T} = \mathbf{I} \quad (17)$$

式中 \mathbf{I} 为 12 阶单位矩阵, \mathbf{T}_b 由位移通解子矩阵及其对轴向坐标 z 的一阶导数在节点处的取值构成,

可表示为

$$\mathbf{T}_b = [\mathbf{T}_{b1} \quad \mathbf{T}_{b2}]^T \quad (18)$$

式中

$$\mathbf{T}_{b1} = [\mathbf{X}_\alpha(0) \quad \mathbf{X}'_\alpha(0) \quad \mathbf{X}_\beta(0) \quad \mathbf{X}'_\beta(0) \quad \mathbf{X}_\theta(0) \quad \mathbf{X}'_\theta(0)]^T$$

$$\mathbf{T}_{b2} = [\mathbf{X}_\alpha(l) \quad \mathbf{X}'_\alpha(l) \quad \mathbf{X}_\beta(l) \quad \mathbf{X}'_\beta(l) \quad \mathbf{X}_\theta(l) \quad \mathbf{X}'_\theta(l)]^T$$

这样, 可得到满足控制微分方程的形函数矩阵:

$$\mathbf{N}(z) = \mathbf{X}(z)\mathbf{T}_b^{-1} \quad (19)$$

注意到如此构造的位移插值函数与轴力有关, 并能够正确反映不同位移分量间的耦合关系。

2.3 精确刚度矩阵

不计入与轴向变形相关部分时, 单元能量泛函可表示为

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l [EI_y u''^2 + EI_x v''^2 + EI_w \theta''^2 + GI_d \theta'^2] dz + \frac{P}{2} \int_0^l [(u'^2 + v'^2) + 2(y_0 - e_y) u' \theta' + 2(e_x - x_0) v' \theta' + (r^2 + 2e_y \beta_y + 2e_x \beta_x) \theta'^2] dz$$

将位移插值函数代入, 根据能量原理可得到屈曲临界平衡方程:

$$(\mathbf{K}_e(P) + P \times \mathbf{K}_g(P)) \{\mathbf{\Delta}\} = 0 \quad (20)$$

式中 $\mathbf{K}_e(P)$ 和 $P \times \mathbf{K}_g(P)$ 分别为单元弹性刚度矩阵和几何刚度矩阵, 可表示为

$$\mathbf{K}_e(P) = EI_y \mathbf{Z}_{22}^u + EI_x \mathbf{Z}_{22}^v + EI_w \mathbf{Z}_{22}^\theta + GI_d \mathbf{Z}_{11}^\theta$$

$$\mathbf{K}_g(P) = \mathbf{Z}_{11}^u + \mathbf{Z}_{11}^v + (r^2 + 2e_y \beta_y + 2e_x \beta_x) \mathbf{Z}_{11}^\theta +$$

$$(e_x - x_A)(\mathbf{Z}_{11}^\theta + \mathbf{Z}_{11}^{\theta T}) + (y_A - e_y)(\mathbf{Z}_{11}^\theta + \mathbf{Z}_{11}^{\theta T})$$

式中

$$\mathbf{Z}_{22}^u = \int_0^l \mathbf{N}_u''(z)^T \mathbf{N}_u''(z) dz, \quad \mathbf{Z}_{22}^v = \int_0^l \mathbf{N}_v''(z)^T \mathbf{N}_v''(z) dz$$

$$\mathbf{Z}_{22}^\theta = \int_0^l \mathbf{N}_\theta''(z)^T \mathbf{N}_\theta''(z) dz, \quad \mathbf{Z}_{11}^\theta = \int_0^l \mathbf{N}_\theta'(z)^T \mathbf{N}_\theta'(z) dz$$

$$\mathbf{Z}_{11}^u = \int_0^l \mathbf{N}_u'(z)^T \mathbf{N}_u'(z) dz, \quad \mathbf{Z}_{11}^v = \int_0^l \mathbf{N}_v'(z)^T \mathbf{N}_v'(z) dz$$

$$\mathbf{Z}_{11}^{\theta u} = \int_0^l \mathbf{N}_v'(z)^T \mathbf{N}_\theta'(z) dz, \quad \mathbf{Z}_{11}^{\theta v} = \int_0^l \mathbf{N}_u'(z)^T \mathbf{N}_\theta'(z) dz$$

3 薄壁杆件结构稳定临界荷载的计算

薄壁结构稳定临界荷载可通过找出满足下式的荷载参数计算:

$$|\mathbf{K}(P)| = |\mathbf{K}_e(P) + P \times \mathbf{K}_g(P)| = 0 \quad (21)$$

这是关于临界荷载 P 的非线性特征方程, 一般可以有无穷多个特征值。

Wittrick 和 Williams 在 20 世纪 70 年代初便针对动力刚度法计算结构固有振动频率问题提出了 Wittrick-Williams 算法^[14-16], 简称 W-W 算法。动力

刚度法建立的是非线性特征方程,与本文求解的问题具有相同的数值性质,因此可以将 W-W 算法用于稳定性分析中临界荷载的计算。按照 W-W 算法,在结构的所有临界荷载中,小于给定值 P^* 的临界荷载的个数 J 由下式给出:

$$J(P^*) = J_0(P^*) + J_K(P^*) \quad (22)$$

式中 J_0 是所有小于 P^* 的两端固定单元临界荷载的数目总和, J_K 代表将 $\mathbf{K}(P^*)$ 进行 \mathbf{LDL}^T 分解后的对角阵主对角线上负元素的个数。

从实施上看, J_K 的计算比较简单,而 J_0 的计算却是困难的。在实际计算中,可以选用适当的有限元网格保证所有单元在两端固定的情况下的第一阶临界荷载都大于设定的荷载范围的上限值作用下使该单元产生的轴力,也就是保证 $J_0=0$,这样计算的 J_K 就是小于给定值 P^* 的临界荷载个数。

可采用二分法计算给定区间 (P_L, P_U) 内的各阶临界荷载值,其基本步骤:(1) 比较各单元两端固定时的第一阶临界荷载 P_0 ,若 P_0 小于 P_U 作用时相应单元的轴力,则将该单元划分为两个或更多个等长单元,直至所有单元两端固定时的第一阶临界荷载值均大于 P_U 作用时相应单元的轴力,由此保证在给定区间内所有荷载值,式(22)中的 J_0 等于零;(2) 令 $P_l = P_L, P_u = P_U$;(3) 计算 $J(P_l)$ 和 $J(P_u)$,若 $J(P_u) > J(P_l)$,区间 (P_l, P_u) 内有解,继续计算;否则,停止对该区间的计算;(4) 对存在解的区间 (P_l, P_u) ,令 $\bar{P} = (P_l + P_u)/2$,并计算 $J(\bar{P})$ 。若 $J(\bar{P}) > J(P_l)$,说明区间 (P_l, \bar{P}) 内有特征值,需继续考虑该子区间,对应的 $P_u = \bar{P}$;若 $J(P_u) > J(\bar{P})$,则区间 (\bar{P}, P_u) 内有特征值,需继续考虑,对应的 $P_l = \bar{P}$ 。对所有存在特征值的子区间,重复此计算。当某一子区间的长度足够小,即 $|P_u - P_l| \leq \text{Tol}$ (Tol 为用户给定误差限) 成立时,即可停止对其进行剖分,此时对应的 $J(P_u) - J(P_l)$ 为在此区间内的临界荷载个数。当全部生成的子区间长度都满足误差限要求时,即可停止计算。

以上基于二分法的算法存在两点不足:一是其收敛速度慢,二是只能求得屈曲荷载,无法直接求得相应的屈曲模态。

针对以上问题,本文提出了改进方法是,首先,用 W-W 算法确定各阶临界荷载所在的子区间,此时 Tol 可设为相对较大值;然后,在各临界荷载子区间内用迭代法^[6]进行计算,其基本步骤:先选定初值 P^0 ,计算 $\mathbf{K}_e(P^0)$ 和 $\mathbf{K}_g(P^0)$,从而将 \mathbf{K}_e 和 \mathbf{K}_g

P 相关的非线性特征方程转化为 \mathbf{K}_e 和 \mathbf{K}_g 与 P 无关的线性广义特征值问题并进行求解,再用求得特征解中与 P^0 最接近的一个代替 P^0 ,从而逐步更新 P 值,最终求出临界荷载和屈曲模态。每次更新 P 值应保证不超出子区间范围,若 P 值超出子区间,则将 P 取为前一次迭代的 P 值与相应边界的平均值,若 P 值最终不断趋于边界,则在子区间范围内随机重新生成一个初值并重新计算。

4 数值算例

本节给出两个数值算例,采用常规单元与算法进行比较,用以说明所提出的精确单元和算法的精度和效率。常规单元使用与本文单元具有相同节点自由度进行位移插值,取三次多项式位移函数:

$$u(z) = a + bz + cz^2 + dz^3$$

$$v(z) = e + fz + gz^2 + hz^3$$

$$\theta(z) = m + nz + sz^2 + tz^3$$

单元刚度矩阵和几何刚度矩阵按常规方法生成,具体算法可见文献[13]。

算例 1 槽钢轴心受压的稳定性分析

考虑轴心受压柱的稳定性问题,其截面如图 1 所示,几何参数: $A = 22.28 \text{ cm}^2$, $I_x = 835.8 \text{ cm}^4$, $I_y = 131.0 \text{ cm}^4$, $I_w = 4699 \text{ cm}^6$, $I_d = 4.796 \text{ cm}^4$, $x_0 = -5.123 \text{ cm}$, $y_0 = 0$, $r^2 = 69.64 \text{ cm}^2$, $e_x = e_y = 0$; 材料常数: $E = 2.1 \times 10^4 \text{ kN/cm}^2$, $G = 0.4 E$,柱长 $l = 200 \text{ cm}$,考虑两种支承条件:(1) 两端简支;(2) 一端简支一端固定。要求确定出在 (1, 6000) kN 范围内的临界荷载值。

精确单元方法分两步计算:第一步取误差限为 100,用二分法确定临界荷载的子区间;第二步在确定的子区间内用一个单元通过迭代计算临界荷载值。计算结果见表 1 和表 2(图表中长度单位均为 cm,荷载单位均为 kN)。

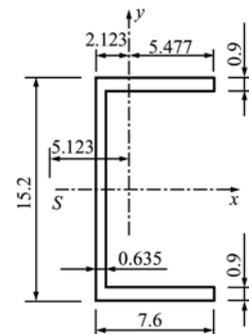


图 1 算例 1 杆件截面图

Fig. 1 Member cross section for example 1

表1 算例1 两端简支情况下临界荷载计算结果

Tab.1 Results for example 1 with pin supports

阶次	常规单元			精确单元	
	1个单元	10个单元	20个单元	第一步:3个单元	第二步:1个单元
1	825.30	678.79	678.78	[657.14,704.01]	678.78
2	928.65	849.92	849.91	[848.82,859.16]	849.91
3	2596.89	1890.08	1889.81	[1823.07,1903.40]	1889.80
4	4126.52	2715.70	2715.16	[2671.51,2735.52]	2715.21
5	9132.05	3591.24	3588.25	[3551.64,3602.65]	3588.04
6	43993.27	5978.46	5962.23	[5925.08,5962.54]	5961.08

表2 算例1 一端简支一端固定情况下
临界荷载计算结果

Tab.2 Results for example 1 with mixed supports

阶次	常规单元			精确单元	
	1个单元	10个单元	20个单元	第一步:3个单元	第二步:1个单元
1	1561.98	1220.32	1220.29	[1219.55,1266.41]	1220.28
2	2063.25	1388.70	1388.62	[1377.36,1395.85]	1388.62
3	22197.23	2586.83	2585.91	[2546.89,2618.83]	2585.85
4	-	4106.43	4104.58	[4098.09,4150.92]	4104.46
5	-	4628.78	4621.72	[4613.19,4670.97]	4621.23

算例2 T形钢偏心受压的稳定性分析

如图2所示 T形钢截面的几何参数: $A=40 \text{ cm}^2$, $I_x = 1769.2 \text{ cm}^4$, $I_y = 666.7 \text{ cm}^4$, $I_w \approx 0$, $I_d = 13.33 \text{ cm}^4$, $r^2 = 88.46 \text{ cm}^2$, $\beta_y = 7.23 \text{ cm}$, $e_x = 0$, $e_y = -2.5 \text{ cm}$, $x_0 = 0$, $y_0 = -5.25 \text{ cm}$;材料常数: $E=20600 \text{ kN/cm}^2$, $G=7900 \text{ kN/cm}^2$, 柱长 $l=400 \text{ cm}$, 考虑两端简支支承条件。求出在(1, 2000)kN范围内的临界荷载值。精确单元求解方法的设置与算例1相同,计算结果见表3(图表中长度单位均为 cm,荷载单位均为 kN)。

由以上两例的计算结果可知,应用常规单元每根杆件只划分为一个单元时,各阶临界荷载值都存在较大误差,因此必须细分网格才能得到较理想的效果,而划分10单元的结果与划分20单元接近,可以划分20单元的结果作为本文精确单元分析结

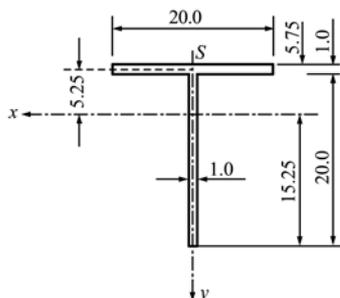


图2 算例2 杆件截面图
Fig.2 Member cross section for example 2

表3 算例2 临界荷载计算结果

Tab.3 Results for example 2

阶次	常规单元			精确单元	
	1个单元	10个单元	20个单元	第一步:3个单元	第二步:1个单元
1	918.62	776.68	776.67	[750.63,813.09]	776.67
2	1862.15	1745.96	1745.88	[1703.27,1777.46]	1745.88
3	2639.22	1921.82	1921.71	[1888.73,1944.36]	1921.70
4	2733.41	1968.84	1968.67	[1944.36,1972.18]	1968.66
5	6513.61	1989.67	1989.41	[1986.09,1993.05]	1989.39

果的参照。应用本文精确单元进行分析,每根杆件只用一个单元表示即可得到准确结果。由于临界荷载的确定属于非线性特征值问题,有无穷多解,求解过程中容易出现漏根。对于大型结构,用常规单元即使细分网格后也无法保证高阶临界荷载的正确性,实际应用中往往需要依靠经验和通过试算的方法来确定细分网格的数量,反复试算将增加计算成本,这给实际应用带来不便。采用本文方法,只要给定荷载范围,即可确定该范围内各阶临界荷载的子区间,再结合求解广义特征值的迭代法,可准确地确定全部临界荷载值和屈曲模态。算例1 一端简支一端固定时,如果要精确计算(1,30000)范围内的全部临界荷载(精确到个位),精确单元方法耗时约1.97秒,而常规单元方法则需要划分为约100单元,计算耗时约6.87秒,可见当要求精确计算高阶临界荷载时,本文算法在效率上有较大优势。

5 结 论

对于薄壁杆件弯扭稳定性问题,常规三次多项式单元未能准确地反映单元的变形形状,只能得到问题的近似解。因此,采用一个单元模拟一个杆件时往往会有较大误差,为准确计算高阶失稳模态,有必要加密有限元网格。

本文从薄壁杆件稳定性的控制微分方程出发,应用方程的通解构造位移模式,进而建立单元刚度矩阵和几何刚度矩阵,得到薄壁杆件稳定性分析的精确刚度矩阵的显式表达,应用此精确单元时,只需一个单元模拟一个杆件,就可以得到精确数值解。

若采用常规单元,即使用较密的有限元网格,也难保证高阶临界荷载的准确性。相比之下,用精确单元建立的非线性特征方程存在无穷多特征解,理论上用一个单元模拟一个杆件也可准确地计算高阶屈曲模态。本文结合 W-W 算法和广义特征值

求解提出的迭代算法,能准确计算出给定荷载范围内的所有临界荷载值,并得到相应的屈曲模态,具有其特殊的优越性。

参考文献(References):

- [1] 吴秀水,辛克贵,姜美兰. 横向荷载作用下薄壁杆件稳定性分析的有限杆元法[J]. 工程力学, 2001, **18**(1): 47-55. (WU Xiu-shui, XIN Ke-gui, JIANG Mei-lan. Lateral buckling analysis of thin-walled members by finite member method[J]. *Engineering Mechanics*, 2001, **18**(1): 47-55. (in Chinese))
- [2] 辛克贵,姜美兰. 薄壁杆件稳定分析的样条有限杆元法[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2001, **41**(4/5): 235-239. (XIN Ke-gui, JIANG Mei-lan. Buckling analysis of thin-walled members using the spline finite member element method[J]. *Journal of Tsinghua University(Science and Technology)*, 2001, **41**(4/5): 235-239. (in Chinese))
- [3] 干 沔,徐 兴. 薄壁杆件稳定分析的三维退化梁单元法[J]. 浙江大学学报(工学版), 2003, **37**(3): 337-34. (GAN mian, XU Xing. Stability analysis of thin-walled members by degenerated three-dimensional beam element method[J]. *Journal of Zhejiang University (Engineering Science)*, 2003, **37**(3): 337-340. (in Chinese))
- [4] Ma H. Exact solutions of axial vibration problems of elastic bars[J]. *Int J Num Meth Engng*, 2008, **75**: 241-252.
- [5] Ma H. Exact solutions of vibration problems of frame structures[J]. *Int J Numer Meth Biomed Engng*, 2010, **26**: 587-596.
- [6] 陈太聪,马海涛. 框架结构屈曲的精确有限元求解[J]. 力学学报. 2009, **41**(6): 953-960. (CHEN Tai-cong, MA Hai-tao. Exact finite element solutions of buckling analysis of frame structures [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2009, **41**(6): 953-960. (in Chinese))
- [7] 高兴军,马海涛,陈太聪. 弹性地基上 Timoshenko 梁的精确数值解[J]. 计算力学学报, 2011, **28**(6): 904-908. (GAO Xing-jun, MA Hai-tao, CHEN Tai-cong. Exact numerical solutions of Timoshenko beams on elastic foundations[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2011, **28**(6): 904-908. (in Chinese))
- [8] Kim N I, Shin D K, Kim M Y. Improved flexural-torsional stability analysis of thin-walled composite beam and exact stiffness matrix[J]. *Int J Mech Sci*, 2007, **49**: 950-969.
- [9] Kim N I, Shin D K, Park Y S. Dynamic stiffness matrix of thin-walled composite I-beam with symmetric and arbitrary laminations[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, **318**: 364-388.
- [10] 周华强,聂孟喜. 薄壁梁结构一维有限元精确刚度矩阵[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2009, **49**(9): 71-74. (ZHOU Hua-qiang, NIE Meng-xi. One-dimensional FEM exact stiffness matrix for thin-walled beam-column structures [J]. *Journal of Tsinghua University(Science and Technology)*, 2009, **49**(9): 71-74. (in Chinese))
- [11] 童根树,张 磊. 薄壁构件弯扭失稳的一般理论[J]. 建筑结构学报. 2003, **24**(3): 16-24. (TONG Gen-shu, ZHANG Lei. A general theory for the flexural-torsional buckling of thin-walled members [J]. *Journal of Building Structures*, 2003, **24**(3): 16-24. (in Chinese))
- [12] 张学军,许金余,赵 靖. 关于薄壁构件总势能方程的理论探讨[J]. 工程力学. 2009, **26**(6): 58-64. (ZHANG Xue-jun, XU Jin-yu, ZHAO Jing. A discussion on the total potential energy equation of thin-walled members[J]. *Engineering Mechanics*, 2009, **26**(6): 58-64. (in Chinese))
- [13] 包世华,周 坚. 薄壁杆件结构力学[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2006. (BAO Shi-hua, ZHOU Jian. *Mechanics of Thin-Walled Structures*[M]. Beijing, China Building Industry Press, 2006. (in Chinese))
- [14] Williams F W, Wittrick W H. An automatic computational procedure for calculating natural frequencies of skeletal structures[J]. *Int J Mech Sci*, 1970, **12**(9): 781-791.
- [15] Wittrick W H, Williams F W. A general algorithm for computing natural frequencies of elastic structures [J]. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 1971, **24**(3): 263-284
- [16] 袁驹,叶康生, F W Williams, D Kennedy. 杆系结构自由振动精确求解的理论和算法[J]. 工程力学, 2005, **22**(增): 1-6. (YUAN Si, YE Kang-sheng, Williams F W, Kennedy D. Theory and algorithm of the exact method for free vibration problems of skeletal structures[J]. *Engineering Mechanics*, 2005, **22**(S1): 1-6. (in Chinese))

An exact finite element and a two-step algorithm for stability analysis of frame structures with open thin-walled sections

LI Wen-xiong^{1,2}, MA Hai-tao^{*1}, GAO Xing-jun¹

(1. State Key Laboratory of Subtropical Building Science & Department of Civil Engineering,

South China University of Technology, Guangzhou 510640, China;

2. School of Water Conservancy and Civil Engineering, South China Agricultural University, Guangzhou 510642, China)

Abstract: Based on general solutions of the homogeneous governing equation for the stability analysis of thin-walled member with open section under eccentric axial load, new shape functions are constructed and a new finite element is formulated. The explicit expressions of element stiffness matrix and geometric stiffness matrix are derived. A two-step algorithm is proposed for stability analysis of thin-walled structures. The numerical examples are presented, confirming that exact solutions can be obtained even when each member is modeled with one element. All the critical loads and buckling modes in a given range can be determined with the proposed two-step algorithm.

Key words: finite element method; thin-walled member; stability analysis; stiffness matrix; exact element

~~~~~  
(上接第 404 页)

## Mode importance measures under multiple failure modes and their solutions

ZHOU Chang-cong<sup>\*</sup>, LÜ Zhen-zhou, WANG Qi

(School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract:** For structural system with multiple failure modes extensively present in engineering practice, effects of failure modes on the system uncertainties need to be considered, upon which the design work can be improved. Enlightened by the concept of importance measures for basic variables, three mode importance measures are established to reflect the effects of failure modes on the system uncertainties, i. e. importance measures of failure modes on the system failure probability, importance measures of failure modes on the probabilistic distribution of the system response, and the correlation coefficient between the single failure mode and the system. Properties of these three mode importance measures are discussed, as well as the numerical simulation method employed to solve them. Based on the theories proposed here, the ranking of the contributions of failure modes can be obtained, thus providing design guidelines for engineers. Numerical and engineering examples are probed into later, to demonstrate the feasibility and rationality of the proposed mode importance measures.

**Key words:** multiple modes; mode importance measure; probabilistic distribution; system uncertainty