

# 广义扩展有限元法及其在裂纹扩展分析中的应用

章青<sup>\*1,2</sup>, 刘宽<sup>1,2</sup>, 夏晓舟<sup>1,3</sup>, 杨静<sup>1,2</sup>

(1. 河海大学 水文水资源与水利工程科学国家重点实验室, 南京 210098;

2. 河海大学 工程力学研究所, 南京 210098; 3. 广东工业大学 土木与交通学院, 广州 510006)

**摘要:**结合广义有限元法(GFEM)和扩展有限元法(XFEM)的特点,提出了一种新的数值方法——广义扩展有限元法(GXFEM)。阐述了广义扩展有限元法的基本原理,对相关公式进行推导,探讨数值实施中需注意的重要问题,给出利用广义扩展有限元法进行断裂分析时应力强度因子的计算方法,编写了广义扩展有限元法程序。通过算例进行了应力强度因子的计算,模拟了结构裂纹的扩展过程。算例结果表明,利用广义扩展有限元法计算裂纹扩展问题,不需要进行过密的网格划分,且网格在裂纹扩展后无需重新剖分,具有相当高的计算精度。

**关键词:**广义扩展有限元法;应力强度因子;裂纹扩展;数值模拟;断裂力学

**中图分类号:** O242.21      **文献标志码:** A

## 1 引言

广义有限元法(GFEM)和扩展有限元法(XFEM)作为传统有限元法框架内的两种新方法,自问世以来引起了学术界的广泛兴趣。广义有限元法将传统有限元节点自由度广义化,通过增加插值函数的阶次,有效提高了计算结果的精度,且在非线性分析方面较传统有限元法更为可靠。广义有限元法的概念由 Babushka<sup>[1]</sup>首次提出,随后 Babuska、Strouboulis、梁国平和 栾茂田<sup>[2-7]</sup>等对广义有限元法进行系统研究,取得了许多重要成果。

扩展有限元法的优势则在于分析不连续问题,1999年, Belytschko<sup>[8]</sup>教授在研究常规有限元框架下富集裂尖渐进位移场形函数的主要项时,首次提出了扩展有限元法的思想。该方法以单位分解法为基础,将非连续结构直接嵌入单元内部,通过增加描述非连续性的附加函数,模拟裂纹的不连续性及裂纹尖端的奇异性,避免了传统有限元法分析不连续问题时需要重新剖分网格的缺点。扩展有限元法问世后在国际上引起了极大关注,得到了快

速发展和广泛的应用<sup>[9-13]</sup>。

在裂纹扩展分析中,一般是依据断裂力学的相关准则判断裂纹是否稳定,解的精度往往成为数值模拟的关键;与传统有限元法相比,扩展有限元法本身对解的精度并没有提高。本文结合上述两种方法各自的特点,提出了一种新的数值方法——广义扩展有限元法(GXFEM)。文中对扩展有限元法中的非连续附加位移函数进行了改进,阐述了广义扩展有限元法的基本原理,推导了相关公式,编写了广义扩展有限元法程序,应用所提出的广义扩展有限元法对裂纹扩展过程进行了计算模拟,有效提高了数值解的精度。

## 2 广义有限元与扩展有限元

### 2.1 广义有限元法简介

传统有限元中位移插值基函数取为  $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ , 单元结点位移向量  $\delta^e = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$ , 则单元任一点的位移可表示为

$$u^h = \Phi \delta^e \quad (1)$$

而广义有限元将传统有限元的结点位移广义化,认为各结点位移具有任意多个广义位移的展开式,即将结点位移表示为广义自由度  $d_i$  的函数,即

$$\delta^e = F d_e \quad (2)$$

式中  $d_e = [d_1, d_2, \dots, d_n]^T$ ,  $F$  是由结点位移插值函数组成的矩阵。

收稿日期: 2010-12-29; 修改稿收到日期: 2011-06-25.

基金项目: 国家自然科学基金(10972072, 11132003, 51179064); 国家科技支撑计划课题(2008BAB29B03); 河海大学水文水资源与水利工程科学国家重点实验室专项基金(2009585912)资助项目.

作者简介: 章青\*(1963-), 男, 博士, 教授, 博士生导师 (E-mail: lxzhangqing@hhu.edu.cn).

将式(2)代入式(1)得到新的插值逼近空间,即

$$u^h = \Phi F d_e = N d_e = \sum_{i=1}^n N_i d_i \quad (3)$$

式中  $d_i = [d_{i,1}, d_{i,2}, \dots, d_{i,k_m}]^T$  为结点的广义位移,  $m_i$  为结点位移展开式的项数,  $k$  为维数,  $N_i$  称为广义形函数。其与传统形函数之间的关系为

$$N_i = F_{(i)} \Phi_i \quad (4)$$

式中  $F_{(i)}$  为结点位移的插值函数,可任意选取,一般取为坐标的多项式函数。

以平面四结点等参单元为例,若结点位移插值函数取为零阶,有

$$F_{(i)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, d_i = \{d_{i,1} \quad d_{i,2}\}^T$$

则每个结点具有两个自由度,即退化为传统有限元法。

若结点位移插值函数取为一阶,有

$$F_{(i)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x & 0 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x & 0 & y \end{bmatrix}$$

$$d_i = [d_{i,1} \quad d_{i,2} \quad \dots \quad d_{i,6}]^T$$

则每个结点具有 6 个自由度。

若结点位移插值函数取为二阶,有

$$F_{(i)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x & 0 & y & 0 & xy & 0 & x^2 & 0 & y^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x & 0 & y & 0 & xy & 0 & x^2 & 0 & y^2 \end{bmatrix}$$

$$d_i = [d_{i,1} \quad d_{i,2} \quad \dots \quad d_{i,12}]^T$$

则每个结点具有 12 个自由度。

有了单元的位移模式,便可进行单元分析,类似传统有限元一样,形成广义单元劲度矩阵和广义单元荷载列阵,再进行整体分析,形成整体结构的广义支配方程:

$$K D = R \quad (5)$$

式中  $K$  为广义整体劲度矩阵,  $R$  为广义整体荷载列阵,  $D$  为所求各结点的广义位移。

因为广义形函数中包含传统有限元中的形函数,故该方法的完备性与协调性自然满足。并且由于广义有限元法不同结点位移的多项式之间的协调性没有要求,因此可以按照实际问题的需要去选

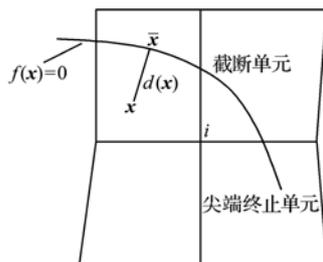


图 1 单元中的裂纹  
Fig.1 Crack in element

取多项式的阶次,具有很强的灵活性和适应性。

### 2.2 扩展有限元法与附加位移函数的改进

扩展有限元位移模式的一般形式为

$$u(x) = \sum_i N_i(x) (u_i + a_i \phi_i(x)) \quad (6)$$

式中  $u_i$  为节点  $i$  的自由度,  $N_i$  为传统有限元单元中节点  $i$  的形函数,  $a_i$  是节点  $i$  的附加自由度,  $\Phi_i(x)$  为附加非连续函数,是考虑非连续性结构的影响而给节点  $i$  的丰富函数。

在处理裂纹扩展问题时,附加非连续函数的构造是其中的一个重要环节。裂纹在有限元网格中有两种情况:一种是把单元截成两块,另一种则是裂纹尖端终止于单元内部如图 1 所示。

对于横跨单元的裂纹,构造的附加非连续函数必须体现位移在裂纹处的不连续性。此外,单元中的点距离裂纹越远,裂纹对该点的影响就越弱。Belytschko 教授在提出扩展有限元法时,采用的是单位阶跃函数,难以反映裂纹影响的衰减效应。本文将指数间断函数作为附加非连续函数,先定义最短距离  $d(x)$  为

$$d(x) = \min_{\bar{x} \in f(x)=0} \|x - \bar{x}\| \text{sign}(f(x) \cdot f(x_i)) \quad (7)$$

式中  $f(x) = 0$  为裂纹的曲线方程,然后构造的附加非连续函数  $\phi_i(x)$  如下。

$$\phi_i(x) = h(d(x)) = \begin{cases} e^{-d(x)}, & d(x) > 0 \\ -e^{d(x)}, & d(x) < 0 \end{cases} \quad (8)$$

该指数间断函数的曲线如图 2 所示。

对于尖端终止于单元内部的裂纹,构造的附加非连续函数除了要求能反映裂纹处的位移不连续性外,还必须能体现裂纹尖端渐进位移场的奇异性。无论是哪一种裂纹形式(I, II, III),裂纹尖端位移场均可由下面几个基函数组成的函数形式来表达,即

$$\{F^l(x)\} = \left\{ \sqrt{r} \sin(\theta/2), \sqrt{r} \cos(\theta/2), \sqrt{r} \sin(\theta/2) \cos\theta, \sqrt{r} \cos(\theta/2) \cos\theta \right\} \quad (9)$$

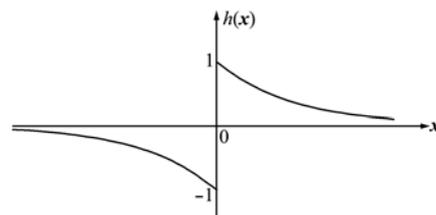


图 2 间断函数  $h(x)$   
Fig.2 Discontinuous function  $h(x)$

根据上述位移模式,便可类似传统有限元法,进行单元分析和整体分析,建立扩展有限元的支配方程,求出主变量  $\mathbf{u}$  和附加变量  $\mathbf{a}$ 。

### 3 广义扩展有限元法

#### 3.1 位移模式

构造广义扩展有限元的位移模式为

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_i [\mathbf{N}_i^u(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i + \mathbf{N}_i^a(\mathbf{x}) \mathbf{a}_i \phi_i(\mathbf{x})] \quad (10)$$

与扩展有限元相比,此处仅对形函数作了变动,其中的  $\mathbf{N}_i^u$  和  $\mathbf{N}_i^a$  分别为主变量的广义形函数及附加不连续变量的广义形函数。

$$\mathbf{N}_i^u = \mathbf{F}_{(i)}^u \phi_i, \quad \mathbf{N}_i^a = \mathbf{F}_{(i)}^a \phi_i \quad (11)$$

式中  $\mathbf{F}_{(i)}^u$  和  $\mathbf{F}_{(i)}^a$  分别为主变量的结点位移插值函数和附加不连续变量的结点位移插值函数。由于不同结点位移的插值函数之间的协调性没有强制要求,理论上  $\mathbf{F}_{(i)}^u$  和  $\mathbf{F}_{(i)}^a$  可以随意选取。为了方便数值计算,两者均取为一阶的多项式插值函数,即

$$\mathbf{F}_{(i)}^u = \mathbf{F}_{(i)}^a = \mathbf{F}_{(i)}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x & 0 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x & 0 & y \end{bmatrix}$$

则位移模式可表示为

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_i \mathbf{F}_{(i)}^1 \phi_i (\mathbf{u}_i + \mathbf{a}_i \phi_i(\mathbf{x})) \quad (12)$$

与式(6)相比,只需用  $\mathbf{F}_{(i)}^1 \phi_i$  去替换  $\mathbf{N}_i$ , 就可以得到广义扩展有限元法的相关公式。

#### 3.2 支配方程

等价于平衡条件的虚功方程为

$$\int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon}^h d\Omega = \int_{\Omega_e} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u}^h d\Omega + \int_{\Gamma_i} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u}^h d\Gamma \quad \forall \delta \mathbf{u}^h \in \mathbf{U}_0^h \quad (13)$$

式中  $\mathbf{u}^h \in \mathbf{U}^h, \delta \mathbf{u}^h \in \mathbf{U}_0^h$  分别是真实位移和虚位移,  $\mathbf{b}$  为体力,  $\bar{\mathbf{t}}$  为边界  $\Gamma_i$  上的面力。

将物理方程  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$  和几何方程  $\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla_s \mathbf{u}$  代入, 并进行区域离散化后, 得

$$\sum_e \left[ \int_{\Omega^e} (\delta \nabla_s \mathbf{u}^T : \mathbf{C} : \nabla_s \mathbf{u} - \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b}) d\Omega - \int_{\Gamma_i^e} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \right] = 0 \quad (14)$$

引入位移模式, 并将单元结点自由度用整体结点自由度表示为  $\mathbf{u}^e = \mathbf{g}_u \mathbf{u}, \mathbf{a}^e = \mathbf{g}_a \mathbf{a}$ , 其中  $\mathbf{g}_u$  和  $\mathbf{g}_a$  为选择矩阵。根据  $\delta \mathbf{u}^e$  和  $\delta \mathbf{a}^e$  的任意性, 得到支配方程:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{ua} \\ \mathbf{K}_{au} & \mathbf{K}_{aa} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{a} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

式中  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{a}$  分别代表主变量和附加非连续变量,

$$\mathbf{K}_{uu} = \sum_e \mathbf{g}_u^T \mathbf{k}_{uu}^e \mathbf{g}_u, \quad \mathbf{K}_{ua} = \sum_e \mathbf{g}_u^T \mathbf{k}_{ua}^e \mathbf{g}_a, \quad \mathbf{K}_{aa} = \sum_e \mathbf{g}_a^T \mathbf{k}_{aa}^e \mathbf{g}_a$$

而

$$\mathbf{k}_{uu}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{uT} \mathbf{C} \mathbf{B}^u d\Omega, \quad \mathbf{k}_{ua}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{uT} \mathbf{C} \mathbf{B}^a d\Omega, \quad \mathbf{k}_{aa}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^{aT} \mathbf{C} \mathbf{B}^a d\Omega$$

式中  $\mathbf{B}^u$  和  $\mathbf{B}^a$  分别为主变量的单元应变矩阵和附加非连续变量的单元应变矩阵,  $\mathbf{f}$  和  $\mathbf{q}$  分别代表主变量对应的荷载列阵和附加非连续变量对应的荷载列阵。

$$\mathbf{f} = \sum_e \left[ \int_{\Omega_e} (\mathbf{F}\boldsymbol{\Phi})^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_i^e} (\mathbf{F}\boldsymbol{\Phi})^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \right]$$

$$\mathbf{q} = \sum_e \left[ \int_{\Omega_e} (\mathbf{F}\boldsymbol{\Phi}\phi)^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_i^e} (\mathbf{F}\boldsymbol{\Phi}\phi)^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \right]$$

#### 3.3 数值积分策略

$\mathbf{k}_{uu}^e$  的积分方法采用传统有限元法中相同的做法, 而对于  $\mathbf{k}_{ua}^e$  和  $\mathbf{k}_{aa}^e$ , 由于  $\mathbf{B}^a$  的非连续性, 可采用分块积分的办法来进行。具体处理方法是, 对于被裂纹截断的单元, 可分别在截断的两个子域中进行 Gauss 积分, 最后把各子域上的积分值相加即得整个单元域的积分值。需要注意的是, 若子域为五边形时应再分割成一个三角形和一个四边形, 三角形的数值积分按退化的四边形处理; 对于裂纹尖端终止的单元, 则首先用过裂纹尖端的垂直裂纹方向的直线把单元分成两类单元, 然后再在各子单元上数值积分, 如图 3 所示。

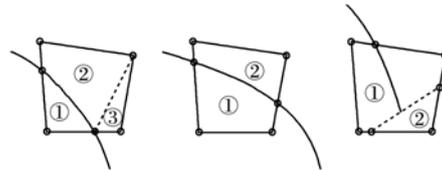


图3 单元的分块积分策略  
Fig. 3 Block integration strategy of element

此外, 对于广义扩展有限元, 在选用一阶的结点位移插值函数时, 由于单元刚度矩阵中各元素被积函数的阶次提高, 积分点数目也要有所增加, 如对于平面四结点单元, 宜对每个单元采用 9 个 ( $3 \times 3$ ) Gauss 积分点进行数值积分。

#### 3.4 裂尖应力强度因子的计算和裂纹扩展分析

采用  $J$  积分法计算裂尖应力强度因子。对于线性弹性材料, 在准静态裂纹扩展条件下,  $J$  积分即为裂纹扩展能量释放力, 且与积分路径无关<sup>[14]</sup>。

$$J = \int_{\Gamma} (W \delta_{ij} - \sigma_{ij} u_{i,1}) n_j ds = \int_{\Gamma} (W dy - \frac{\partial u_i}{\partial x} T_i ds) \quad (16)$$

式中  $W$  为应变能密度函数,  $T_i = \sigma_{ij} n_j$  为应力矢量,

$\Gamma$ 为环绕缝尖由裂纹下表面走向上表面的围线。

弹性材料的  $J$  积分与混合模型裂纹扩展能量释放率及应力强度因子的关系为<sup>[15]</sup>:

$$J = G_1 + G_2 = \alpha(K_1^2 + K_2^2) \quad (17)$$

对平面应变问题,  $\alpha = (1 - \nu^2)/E$ , 对平面应力问题,  $\alpha = 1/E$ 。

纯 I 型裂纹或纯 II 型裂纹可由  $J$  积分直接求得相应的应力强度因子。对混合模式裂纹, 由上式只能得到  $K_1$  和  $K_2$  组合值, 可通过引入辅助平衡状态, 计算相互作用能量积分得到分离的  $K_1$  和  $K_2$  值<sup>[16]</sup>。

裂纹演化的计算过程如下。

(1) 求出裂纹尖端的应力强度因子, 由断裂判据判断裂纹是否失稳; 若裂纹失稳, 则裂纹按扩展的方向伸长一个距离  $\Delta L$ , 扩展方向取为裂纹尖端最大周向应力的方向。

(2) 进行应力释放, 法向以抗拉强度的大小释放应力, 切向以抗剪强度的折减程度释放应力, 释放的应力作为裂纹表面荷载等效到扩展单元的节点上, 重新进行计算。

(3) 根据新求出的裂尖应力强度因子判断是否扩展。若扩展, 则增大裂纹的扩展距离; 若不扩展, 则减小裂纹的扩展距离。

(4) 对于每一荷载增量步如此往复进行, 直到裂纹稳定为止。输出该荷载步的裂纹扩展方向和扩展距离, 然后继续下一增量步的计算, 这样便可完成各增量步下的裂纹扩展方向和扩展距离, 达到裂纹追踪的目的。

## 4 算例分析

### 4.1 单边裂纹平板受拉力

如图4所示的平面薄板, 板宽  $B=2$  m, 高  $H=3$  m, 板左侧中部有一水平裂纹, 裂纹长为  $a$ , 板上下

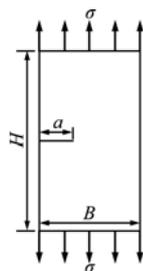


图4 单边裂纹平板受拉力作用

Fig. 4 Edge-notched plate subjected to uniaxial tension

表1 计算结果的比较

Tab. 1 Comparison of the results calculated

$a/m$	$K_I/kPa\sqrt{m}$			与解析解的相对误差 / %	
	解析解	XFEM	GXFEM	XFEM	GXFEM
0.2	0.9383	0.9897	0.9500	5.5	1.2
0.3	1.2279	1.2458	1.2236	1.5	0.4
0.4	1.5365	1.5815	1.5500	3.0	0.8
0.5	1.8812	1.8273	1.8786	2.9	0.1
0.6	2.2790	2.3060	2.2792	1.2	0.1

两端受均布拉力  $\sigma=1$  kPa 的作用。板的弹性模量  $E=10$  GPa, 泊松比为 0.167。

当  $\xi = a/B \leq 0.6$  时, 此问题的解析解为<sup>[17]</sup>:

$$K_I = C\sigma\sqrt{\pi a} \quad (18)$$

式中  $C$  为尺寸相关系数, 由下式给出, 即

$$C = 1.12 - 0.231\xi + 10.55\xi^2 - 21.72\xi^3 + 30.39\xi^4 \quad (19)$$

利用广义扩展有限元法对该问题进行数值模拟, 单元划分采用  $9 \times 13$  形式, 单元总数为 117 个, 结点总数为 140 个。分别计算裂纹长度  $a$  为 0.2 m, 0.3 m, 0.4 m, 0.5 m 和 0.6 m 时对应的应力强度因子, 并与解析解及扩展有限元法数值解进行比较, 结果见表 1。

从表 1 给出的计算结果可以看出, 广义扩展有限元法的数值解与解析解相对误差控制在 1.2% 范围以内, 并且较扩展有限元法的数值解更为接近解析解。

### 4.2 悬臂梁的裂纹扩展模拟

图 5 为一带水平裂纹的悬臂梁, 梁长  $L=6$  m, 高  $H=2$  m, 右端为固定端。初始裂纹水平布置在梁的左侧中部, 长  $a=2$  m。梁左侧端部受相向的集中力作用,  $P_1$  作用于梁的顶部, 方向竖直向上, 大小为 10 kN,  $P_2$  作用于梁的底部, 方向竖直向下, 大小为 15 kN, 弹性模量  $E$  取为 25.5 GPa, 泊松比  $\nu$  取 0.17, 材料的断裂韧度为  $12.7 \text{ MPa}\sqrt{m}$ 。

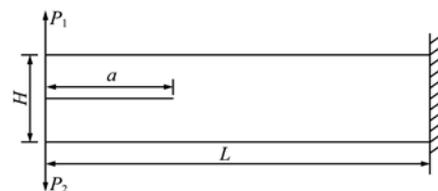


图5 悬臂梁计算模型

Fig. 5 Computational model of cantilever beam

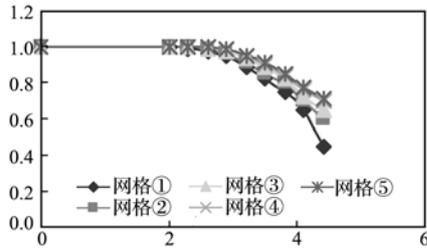


图6 不同计算网格对应的裂纹扩展路径  
Fig. 6 Crack paths with different meshes

应用广义扩展有限元法对该问题进行数值模拟,分别采用五种不同的计算网格模拟该混凝土悬臂梁的裂纹扩展过程:① $15 \times 9$ 形式,② $22 \times 9$ 形式,③ $30 \times 9$ 形式,④ $30 \times 15$ 形式,⑤ $50 \times 15$ 形式。图6给出了不同计算网格的裂纹扩展路径。

从图6可以看出,第四种与第五种计算网格对应的裂纹扩展过程几乎相同,表明当计算网格精细到一定程度,裂纹的扩展路径将不再改变,可以较好的模拟裂纹的扩展过程。

## 5 结 语

(1) 广义有限元法将传统有限元结点自由度广义化,通过提高插值函数的阶次,有效地增加计算结果的精度,且在非线性分析方面较传统有限元更为可靠;而扩展有限元法通过在裂纹面单元引入附加不连续函数来构造位移函数,克服了常规有限元法分析不连续问题,特别是断裂问题时的诸多缺点。本文结合广义有限元法和扩展有限元法各自的优势,提出一种新的方法——广义扩展有限元法(GXFEM),并利用该方法进行裂纹分析和数值模拟。研究表明:利用广义扩展有限元法计算裂纹扩展问题,不需要进行过密的网格划分,且网格在裂纹扩展后无需重新剖分,具有相当高的计算精度,是进行结构破坏演化分析的一种有效方法。

(2) 需要指出的是,与扩展有限元法相比,广义扩展有限元法提高了位移插值函数的阶数,在单元数目相同的条件下,后者具有更高的计算精度,但也同时增加了计算工作量。作者曾对本文4.1中单边裂纹平板受拉问题,基于不同网格,用两种方法进行了计算比较。结果表明,就该例而言,在达到相同的精度下,广义扩展有限元法比扩展有限元法单纯增加单元数目计算效率有所提高,但并不显著。因为该算例主要是受拉问题,高阶位移插值函数的效果有限;对于弯曲问题,由于高阶位移插值

函数能更好地描述结构的变形特征,在相同的精度下,广义有限元计算效率比传统有限元更为有效<sup>[7]</sup>。

(3) 广义扩展有限元结点位移插值多项式的阶次可以任意选取,且不影响位移的协调性。通过对部分广义自由度进行约束,广义扩展有限元法也能方便退化为扩展有限元法。因此,在实际裂纹扩展问题的计算中,只需对裂纹扩展区域涉及的结点位移进行广义化,以解决计算精度和计算效率的矛盾。

(4) 广义扩展有限元法在裂纹扩展分析中有待深入研究的问题,包括多裂纹以及裂纹交叉问题,材料非线性问题以及由此导致的裂纹尖端微裂纹区应力场的准确模拟,三维非平面裂纹动态模拟等工作正在进行中。

## 参考文献(References):

- [1] Babushka I, Osborn J E. Generalized finite element methods: their performance and their relation to mixed methods [J]. *SIAM Journal for Numerical Analysis*, 1983, **20**(3): 510-535.
- [2] Strouboulis T, Copps K, Babushka I. The generalized finite element method: an example of its implementation and illustration of its performance [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000, **47**: 1401-1417.
- [3] Babuska I, Banerjee U, Osborn J E. On the principles for the selection of shape functions for the generalized finite element method [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2002, **191**(49-50): 5595-5629.
- [4] Babuska I, Banerjee U, Osborn J E. Generalized finite element methods-main ideas, results and perspective [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, **1**(1): 67-103.
- [5] Strouboulis T, Zhang L, Babushka I. Generalized finite element method using mesh-based handbooks: application to problems in domains with many voids [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006, **195**: 852-879.
- [6] 梁国平, 何江衡. 广义有限元法——一类新的逼近空间 [J]. *力学进展*, 1995, **25**(4): 562-565. (LIANG Guoping, HE Jiang-heng. Generalized finite element method—a new finite element space [J]. *Advances in Mechanics*, 1995, **25**(4): 562-565. (in Chinese)).

- [7] 栾茂田,田 荣,杨 庆. 广义节点有限元法[J]. 计算力学学报, 2000, **17**(2): 192-200. (LUAN Mao-tian, TIAN Rong, YANG Qing. Generalized-node finite element method based on manifold concept[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2000, **17**(2): 192-200. (in Chinese)).
- [8] Belytschko T, Black T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, **45**: 601-620.
- [9] Belytschko T, Moes N, Usui S, et al. Arbitrary discontinuities in finite elements[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, **50**: 993-1013.
- [10] Belytschko T, Parimi C, Moes N, et al. Structured extended finite element methods for solids defined by implicit surfaces[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, **56**: 609-635.
- [11] 李录贤,王铁军. 扩展有限元及其应用[J]. 力学进展, 2005, **35**(1): 5-20. (LI Lu-xian, WANG Tie-jun. The extended finite element method and its application—a review[J]. *Advances in Mechanics*, 2005, **35**(1): 5-20. (in Chinese))
- [12] 方修君,金 峰,王进廷. 用扩展有限元法模拟混凝土的复合型开裂过程[J]. 工程力学, 2007, **24**: 46-52. (FANG Xiu-jun, JIN Feng, WANG Jin-ting. Simulation of mixed-mode fracture of concrete using extended finite element method[J]. *Engineering Mechanics*, 2007, **24**: 46-52. (in Chinese))
- [13] 夏晓舟,章 青. 含两类附加函数的扩展等参有限元法[J]. 计算力学学报, 2008, **25**(1): 41-47. (XIA Xiao-zhou, ZHANG Qing. Extended isoparametric finite element method including two class of enrichment functions[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2008, **25**(1): 41-47. (in Chinese)).
- [14] Moran B, Shih C F. Crack tip and associated domain integrals from momentum and energy balance[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1987, **27**(6): 615-642.
- [15] Yau F J, Wang S S, Corten H T. A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1980, **47**: 335-341.
- [16] 江 涛,章 青. 直接增强自然单元法计算应力强度因子[J]. 计算力学学报, 2010, **27**(2): 264-269. (JIANG Tao, ZHANG Qing. Computing stress intensity factors by enriched natural element method[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2010, **27**(2): 264-269. (in Chinese))
- [17] 李 灏,陈树坚. 断裂理论基础[M]. 成都: 四川人民出版社, 1983. (LI Hao, CHEN Shu-jian. *Foundations of Fracture Theory*[M]. Chengdu: Sichuan People's Press, 1983. (in Chinese))

## Generalized extended finite element method and its application in crack growth analysis

ZHANG Qing<sup>\*1,2</sup>, LIU Kuan<sup>1,2</sup>, XIA Xiao-zhou<sup>1,3</sup>, YANG Jing<sup>1,2</sup>

(1. State Key Laboratory of Hydrology-Water Resources and Hydraulic Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China;

2. Department of Engineering Mechanics, Hohai University, Nanjing 210098, China;

3. School of Civil and Transportation Engineering, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China)

**Abstract:** A new numerical method—generalized extended finite element method (GXFEM) is proposed in this paper by combining the generalized finite element method (GFEM) and the extended finite element method (XFEM). The basic principles of GXFEM are presented in detail and relevant formula is derived. Some important problems in numerical realization are discussed. Then, a method of calculating stress intensity factors (SIF) in the analysis of fracture problems is given by using GXFEM. The GXFEM program to analyze fracture process is compiled. The numerical examples are applied to calculate the SIF and to simulate the crack propagation. The results show that it is not necessary to set frequent grids, or to re-mesh when cracks propagate. In addition, the results are provided with very high accuracy.

**Key words:** generalized extended finite element method; stress intensity factors; crack propagation; numerical simulation; fracture mechanic