

多功能结构拓扑形态优化数值方法

姜宝石*, 崔昌禹, 崔国勇

(哈尔滨工业大学 土木工程学院, 哈尔滨 150090)

摘要:对建筑结构设计的多功能要求,以平面问题为研究对象,对改进进化论方法进行了功能上的改进,增强了方法对复杂空间条件的适应性,提高了计算效率和所生成结构体的质量。针对建筑对空间的限制,将方法的允许空间拓展为自由边界允许空间,并引进临时允许空间的概念;针对结构功能需求,研究了能够适应支座改变、荷载组合等多工况情况的合理结构形态创构方法;考虑到材料的受力特性,研究了相应(如指定构件纯受压或纯受拉)的结构拓扑形态优化方法。文中还通过算例分析了方法的特点,探讨了方法所得结构形态的一些力学特性。该方法所得结构为以均匀拉压应力形式来抵抗荷载,其形式可为结构概念设计提供参考。

关键词:结构形态创构;形状优化;拓扑优化;改进进化论方法

中图分类号: TU311; O18 **文献标志码:** A

1 引言

20世纪90年代以来,拓扑优化设计研究异常活跃,相继提出了均质化设计方法^[1]、Bubble方法^[2]及ESO法^[3]等多种结构拓扑优化方法。这些方法理论上远未定型,得到的结构形状非常单调,尚不能应用到实际工程,但它们开辟了利用理论方法确定结构形态的可能性。最近国内对拓扑优化方法的研究也较为活跃,刘晓峰等^[4]采用自动分组遗传算法研究了带有频率约束的桁架结构拓扑优化问题;荣见华^[5]研究了基于ESO方法的双向进化的BESO方法及其相关应用。

ESO法^[3]及均质化法^[6]在机械领域应用较为广泛,但均质化方法计算效率较低,很难扩展到实际工程中。ESO法后来发展成可以实现增加和消除双向进化的BESO方法,但会产生“锯齿”形边界和“棋盘格”效应^[7]。借鉴ESO方法的思想,改进进化论方法(Extended-ESO method)在进化过程中引入等值线和应力连续假设,成功实现了增加和消除结构材料的双向进化,避免了“锯齿”形边界和“棋盘格”效应^[7]。它是模仿自然界的进化现象,通过“淘汰”,“保留”,“补充”的操作把结构体逐步演变成合理结构的方法,已被应用到多项实际工程的设计^[7],如国内最近完工的上海喜马拉雅艺术中

心、卡特尔教育城会展中心的异形体部分等。

目前建筑形式逐步趋向于多样化,实际工程对建筑设计的要求越来越高、越来越丰富,要求充分反映实际可能存在的多种设计条件,如空间约束条件(建筑使用空间和审美空间要求),支座条件,荷载组合条件(结构安全要求)等以实现相应的建筑功能。文献^[7]的方法只能在规则允许空间内进行进化,所产生的结构的分支较粗。因此,针对以上工程设计需求,为增强方法的实用性和计算效率,在文献^[7]的基础上首先对改进进化论方法进行了以下拓展,以满足空间约束条件下的拓扑优化设计:(1)利用B样条曲线,形成可能存在的任意形状的允许空间;(2)引进了临时设计空间概念;(3)利用Delaunay三角分割技术对自由形式的允许空间进行三角网格划分。然后以这些方法的拓展作为基础,研究了与不同工况相适应的结构创构方法和与不同材料特性相适应的、受拉或受压为主的受力形式来抵抗荷载的结构拓扑优化方法。

2 改进进化论方法的拓展

2.1 创构结构形态的问题

以均匀分布目标力学量的方式来承受荷载的结构形态的拓扑优化问题可写为

$$\begin{cases} \mu \rightarrow \text{Minimum} \\ \text{s.t. } S \in \bar{\Omega}_k \subseteq \Omega_0 \\ \sigma_{\max} \leq \sigma_0 \\ \delta_{\max} \leq \delta_0 \end{cases} \quad (1)$$

式中 μ 为目标力学量的标准偏差,表示目标力学

收稿日期: 2011-06-08; 修改稿收到日期: 2011-11-29.

基金项目: 国家自然科学基金面上(50978075)资助项目.

作者简介: 姜宝石* (1982-), 男, 博士生

(E-mail: lanbaoshi-hit@qq.com);

崔昌禹(1963-), 男, 教授, 博士生导师.

量分布的均匀程度, S 为要生成的结构, $\bar{\Omega}_k$ 为临时允许空间, Ω_0 为根据建筑要求而设定的生成结构的允许空间, σ_{\max} 为结构最大应力, σ_0 为结构材料允许应力, δ_{\max} 为结构最大位移, δ_0 为结构允许位移。

目标力学量根据设计目标确定, 可以是 Von Mises 应力、应变能敏感度或应力张量第一不变量等。 Ω_0 是根据建筑要求而确定的允许空间, 在进化中保持不变, $\bar{\Omega}_k$ 是在进化过程中可变的允许空间的子空间。

2.2 设计空间的形成

自由边界允许空间的“自由”主要体现在允许空间边界形状的表达对不同工程设计要求的满足上。对来自建筑或其他工程方面的任意空间限定条件, 采用式(2)的 B 样条曲线来形成。

$$\begin{cases} \mathbf{x}(u) = \sum_{i=1}^m P_x^i \cdot B_{i,k}(u) \\ \mathbf{y}(u) = \sum_{i=1}^m P_y^i \cdot B_{i,k}(u) \end{cases} \quad (2)$$

式中 (P_x^i, P_y^i) 为根据已知点通过解方程来确定的待定控制点, $B_{i,k}(u)$ 为 B 样条基函数, k 为 B 样条函数的阶数 ($k-1$ 次), $k=(1, 2, 3, \dots)$ 。B 样条基函数 $B_{i,k}(u)$ 由递推式(3)来确定。

$$\begin{aligned} B_{i,1}(u) &= \begin{cases} 1, u \in [\bar{u}_i, \bar{u}_{i+1}) \\ 0, \text{其他} \end{cases} \\ B_{i,k}(u) &= \frac{u - \bar{u}_i}{\bar{u}_{i+k-1} - \bar{u}_i} B_{i,k-1}(u) + \\ &\quad \frac{\bar{u}_{i+k} - u}{\bar{u}_{i+k} - \bar{u}_{i+1}} B_{i+1,k-1}(u) \end{aligned} \quad (3)$$

根据建筑要求, 确定指定点, 利用式(2)形成允许空间, 并利用 Delaunay 分割技术对允许空间进行三角分割如图 1(a) 所示, 为等值线的形成提供条件。

2.3 进化策略

与在规则允许空间内的进化方法一样, 在任意形状的允许空间内生成新结构时, 同样引进了“在允许设计空间中目标力学量是连续分布”的假定, 并把原来固定不变的“允许设计空间”转换成可变的“临时设计空间”, 拓展了进化方法。所谓“临时设计空间”是, 根据进化过程中结构体的形状和目标力学量分布特点而确定的允许设计空间的子空间。此概念的引进不仅可以提高进化效率, 还可以改善结构体的质量。

2.3.1 允许空间与新结构体的形成

图 1 所示, 在根据建筑要求以 B 样条函数确定的允许空间内生成新结构体和临时设计空间的过程。图 1(a) 表示设计空间 Ω_0 , 图 1(b) 表示要进化的结构体 S , 利用有限元法计算结构体各单元的目标力学量, 将结构体的目标力学量移到 Ω_0 内, 根据目标力学量连续分布, 假定计算各三角网格节点的目标力学量, 将允许空间转换成具有结构体力学性质的允许空间 Ω_k 。此时, 在设计空间内形成目标力学量的等值线, 如图 1(c) 所示。根据进化到 k 次后承受荷载效率高低分界值——消除基准值 x_c^k , 消除允许空间内的低值部分 $\bar{\Omega}_k^l$, 保留高值部分 $\bar{\Omega}_k^m$, 生成新结构体 S^k 如图 1(d) 所示。

2.3.2 临时设计空间的形成

根据新结构体的形状和目标力学量分布特点, 确定适当放宽 δ 的临时设计空间生成基准值, $x_0^k = x_c^k + \delta$, 消除此基准值对应的允许空间内的低值部分来生成临时设计空间 $\bar{\Omega}_k$ 如图 1(e) 所示, 用临时设计空间 $\bar{\Omega}_k$ 来代替初始的设计空间 Ω_0 , 为下一步进化提供操作空间。

在整个进化过程中, 利用 Delaunay 技术对临时允许空间进行网格分割。根据进化程度逐步细分网格, 使新的结构体分支更为细致, 可提高结构体如图 1(h) 所示生成质量和计算效率。为节省篇幅, 在本文例题中临时允许空间不详细列出。

整个进化过程的操作可写为

$$\bar{\Omega}_k \in \Omega_0, S^k = \bar{\Omega}_k - \bar{\Omega}_k^l = \bar{\Omega}_k^m \quad (4)$$

2.3.3 消除基准值的确定

消除基准值可利用文献[8]给出的式(5)来确定:

$$x_c^k = m - \lambda \mu \quad (5)$$

式中 m 为 von Mises 应力的平均值, λ 为经验参数 ($0 < \lambda \leq 1$, 一般情况下取 $0.4 \sim 0.8$), μ 为 von Mises 应力的标准偏差。

本文为了提高结构体的质量和效率, 考察计算所得到的消除基准值附近等值线与允许空间的相交情况, 确定消除基准值, 利用消除基准值对应的等值线对允许空间进行消除操作。

整个进化过程中, 允许空间或临时允许空间内只有消除的操作, 但对结构体来讲既有消除, 也有增殖; 另一方面, 通过引进临时允许空间, 可以得出光滑而细致分支的结构体, 同时也可以提高进化效率。

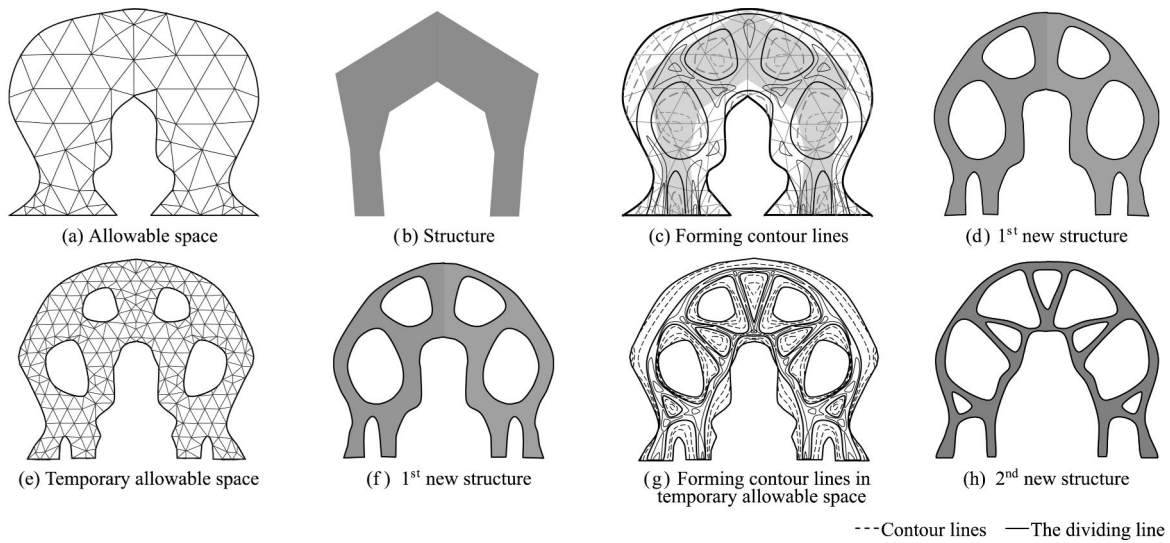


图1 新结构体和临时允许空间的形成过程
Fig. 1 The process of forming new structure and temporary allowable space

3 结构拓扑形态创构方法及实施步骤

3.1 多工况条件

实际工程设计中,可能存在适应多种使用环境的建筑要求。荷载组合和支座变化是建筑使用过程中经常遇到的情况。结构拓扑优化得到的结构必须能同时满足荷载或支座变化前后的合理性要求。多工况下的结构拓扑优化问题采用式(6)的力学目标量。

$$\sigma^e = \max(\sigma_{\text{工况}1}^e, \sigma_{\text{工况}2}^e, \sigma_{\text{工况}3}^e, \dots, \sigma_{\text{工况}i}^e) \quad (6)$$

式中 $\sigma_{\text{工况}i}^e (i=1, 2, \dots, n)$ 表示第 i 工况下的结构指定位置的目标力学量(如 von Mises 应力), σ^e 表示指定位置的最不利目标力学量。

在方法中,将各种工况下的最不利目标力学量移到允许空间内。利用前面提到的新结构体的形成方式完成结构进化。

3.2 指定内力性质结构

改进进化论方法可以通过简单的设计目标的替换,操作创构出压拉分明的结构形态,实现构件的合理布置。创构张拉结构与受压结构时分别由式(7a, 7b)的设计目标量来实现。

$$\sigma^e = \sigma_1^e - \sigma_{\text{min}}, \quad \sigma^e = -(\sigma_1^e - \sigma_{\text{max}}) \quad (7a, 7b)$$

式中 σ^e 为结构内有限元单元的应力值, σ_1^e 为应力张量第一不变量, σ_{min} 表示结构体有限元单元的应力张量第一不变量中的最小值, σ_{max} 表示结构体有限元单元的应力张量第一不变量中的最大值。

应力张量第一不变量为

$$\sigma_1^e = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (8)$$

式中 σ_{11} 、 σ_{22} 和 σ_{33} 分别为单元的三个主应力。应力符号以拉应力为正,压应力为负。

3.3 实施步骤

改进进化论方法在进行以上拓展之后由以下步骤完成进化:

- (1) 根据建筑目的确定目标力学量。
- (2) 根据建筑要求,确定允许空间关键点,由 B 样条曲线形成允许空间。

(3) 利用 Delaunay 网格技术对允许空间进行三角网格划分。

(4) 利用有限元法计算结构的目标力学量,将其移植到允许空间。

(5) 在允许空间内形成等值线,确定消除基准值和临时设计空间生成基准值,进行消除操作,形成新结构体和下一步进化中的临时允许空间。

(6) 根据进化情况,以新的临时允许空间替换前一步的允许空间,重复以第(3~6)步骤,在临时允许空间内完成最终进化。操作过程中,可根据结构体的形状与力学目标量的分布特性,判断有无必要替换允许空间;若不需要替换,可以在原来的允许空间中操作。

4 算例与分析

以下算例的材料常数均相同,弹性模量 $E = 210 \text{ GPa}$,泊松比 $\nu = 0.3$,均布荷载 $q = 10 \text{ kN/m}$,不再注明。

4.1 自由边界允许空间内的结构拓扑优化

图2所示在 a 与 b 处铰支撑的自由边界初始结构计算模型。荷载作用在结构上部自由曲线处,目标力学量采用 von Mises 应力,允许空间与初始模型相同。

如图3所示,在进化过程的初始阶段,von Mises 应力较低的地方逐步被消除, a 与 b 支撑附近的允许空间逐渐形成多个分支,逐步出现粗略的桁架特征的结构形式(Step1-Step23)。在进化到Step23以后引进临时允许空间,从图3可以看出,后阶段的过程主要是结构体的细致过程,结构端部出现的小孔逐步演化成一个较大的三角形孔洞,构件的分布也变得更加合理,最终形成了Step32所示的形状。整个进化过程中,可以看到操作过程中既有增加和消除,又有移动的效果。使结构体逐步演化成合理结构。特别是引进了临时允许空间后,结构的分支变得更细致和光滑。

图4和图5所示进化过程中的重量和 von Mises 应力标准偏差的变化。从图4和图5可以看出,进化开始时重量和标准偏差下降的都很快。随着进化次数的增加结构的重量趋于收敛,标准偏差也趋于收敛并呈现微小波动,这是由于“消除”和“增殖”双向进化造成的“振动”效应,表明结构

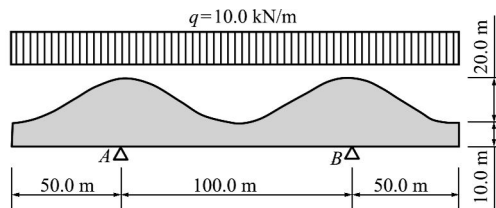


图2 初始结构
Fig. 2 Initial structure

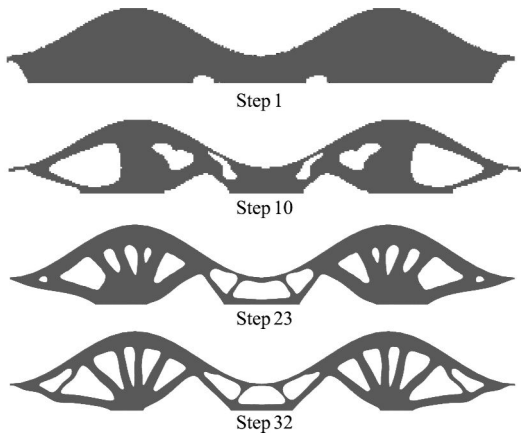


图3 进化过程
Fig. 3 Process of evolution

在合理结构附近变化,结构体逐步趋于收敛。可以看出,整个进化在自由边界允许空间内进行,可在限定空间内形成结构体以满足建筑要求。

5.2 荷载变组合情况下的结构拓扑优化

图6为图2所示的模型上分别作用三种荷载情况下的计算模型。考虑三种荷载工况下的结构拓扑优化问题,可用式(9)计算。

$$\sigma^e = \max(\sigma_{\text{边跨}}^e, \sigma_{\text{跨中}}^e, \sigma_{\text{全跨}}^e) \quad (9)$$

式中 σ^e 为移植到允许空间时采用的结构有限单元 von Mises 应力, $\sigma_{\text{边跨}}^e$ 、 $\sigma_{\text{跨中}}^e$ 和 $\sigma_{\text{全跨}}^e$ 分别为荷载作用在结构边跨、跨中和全跨时的结构有限单元 von Mises 应力。

进化过程与单一荷载作用下的进化过程一样,这里只讨论进化结果的特点。图7(a)为在荷载组合条件下进化结果,图7(b)是均布荷载作用下的进化结果。荷载组合情况下的结构形状与单一均布荷载作用下的结构形状不同,体现了能够同时传递三种不同荷载的特点。从图7可以看出,对三种荷

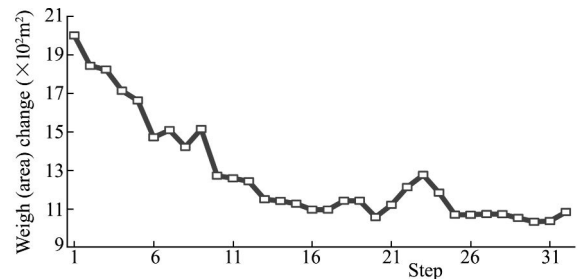


图4 结构体重量变化
Fig. 4 Weigh change of the structure

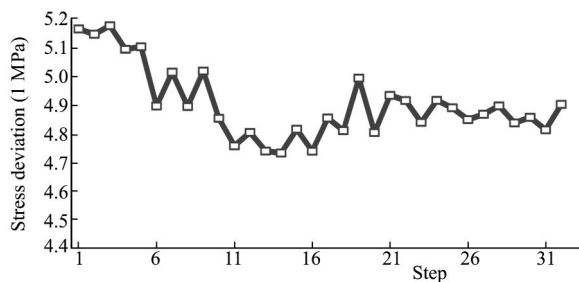


图5 允许应力偏差变化
Fig. 5 Stress deviation on allowable stress

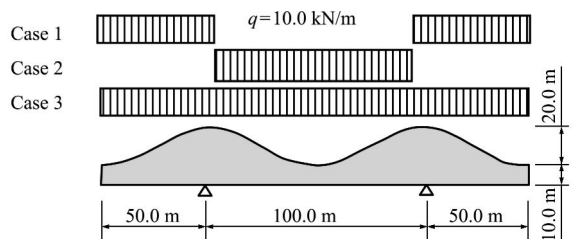


图6 初始结构
Fig. 6 Initial structure

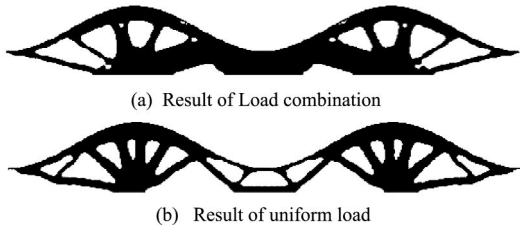


图 7 不同荷载下的结构形态

Fig. 7 Structure shape derived from different loads

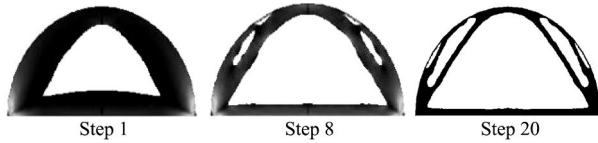


图 9 进化过程

Fig. 9 Process of evolution

载的传递都起到重要作用的部位比较粗,而其他部位出现了能够分别承受三种荷载的分支。

5.3 变支座情况下的结构拓扑优化

图 8 所示结构的一个支座不能确定为铰支座或滚动支座的变支座情况下的结构拓扑优化计算模型。竖向均布荷载作用于半圆形区域边界,进化过程中荷载作用处材料始终保留,此情况下的目标力学量采用式(10)计算。

$$\sigma^e = \max(\sigma_{\text{铰支}}^e, \sigma_{\text{简支}}^e) \quad (10)$$

式中 σ^e 为移植到允许空间时采用的结构有限元单元 von Mises 应力, $\sigma_{\text{铰支}}^e$ 和 $\sigma_{\text{简支}}^e$ 分别为支座为铰支和滚动支座时的结构有限元单元 von Mises 应力。

图 9 所示变支座情况下结构形状的进化过程。在图 10 中分别给出了在简支、铰支座和可变支座下结构进化的进化结果。可以看出,在支座变化情况下的结构与某一支座条件下结构的形状不同。从形状可以看出,水平杆对应滚动支座的情况下的水平受力构件,而上部的斜直杆对应于铰支座情况下斜直受力构件。这种结构形状既可适用于铰支座,又可以适用于滚动支座。由进化结果可知,能够适应变支座的结构形状并不是两种单一支座条件下的结构形状的简单组合。

5.4 受压结构拓扑优化

图 11 所示寻求在均布荷载作用下的受压结构拓扑优化的计算模型。竖向荷载作用于矩形区域上部边界处,底部两端铰支撑座,进化过程中荷载作用处材料始终保留,允许空间与初始结构相同。

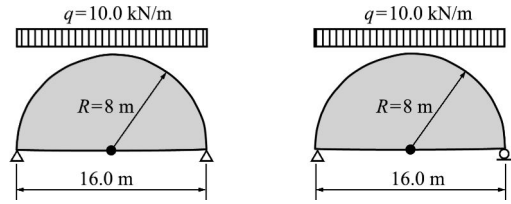


图 8 初始结构的支座变动情况

Fig. 8 Initial structures with different supports

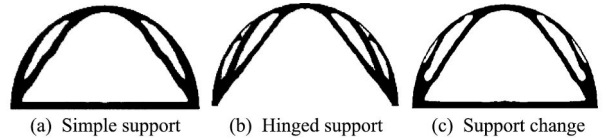


图 10 不同支座条件下的结构形态

Fig. 10 Structure shape derived from different supports

目标力学量由式(7a)计算。

在结构进化初期,受拉力部分被大量消去。为了顺利进行进化,如图 12 中 Step1 所示两端边部附加了强制保留材料的人工干预。进化过程中发现在 Step7 中间部分有趋势出现新的受压构件,但由于此处的压应力较小,材料不能够保留,但此区域对力的传递很有必要。为保证力的传递,从 Step7 ~ Step10 在此位置再次附加人工干预,保留了这部位的受压区。此时,结构受压拱的应力要远高于此处被保留的竖向受压区应力。随着进化的进行,在 Step10 以后结构形状变稳定,撤出了所有的人工干预。此后的进化过程中,结构形状基本确定,开始发生细致的变化,并且结构应力分布逐步趋于均匀,最终得到了如图 12 中 Step29 所示的结构形状。

5.5 张拉结构拓扑优化

图 13 所示寻求在均布荷载作用下的张拉结构拓扑优化的计算模型。荷载作用于区域底部边界处,底部两端铰支座支撑柱底部均布铰支座,初始结构与允许空间相同。在进化过程中,对力的传递和使用有要求的结构部分进行保护,并保持不变,图 13 中深色区域。目标力学量由式(7b)计算。

由图 14 所示进化过程可以看出,结构很快就呈现出受拉索的特点,最终形成形似索的结构形式,如图 14 中 Step20 所示。结构中部的受拉构件与连接铰支座的外侧受拉构件的水平力互相平衡,形成了将荷载以竖向力的方式传递给立柱的合理结构。在设计时,可采用图 14 最终结果所示的结构方案。

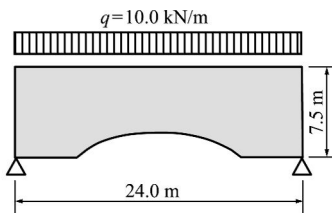


图 11 初始结构
Fig. 11 Initial structure

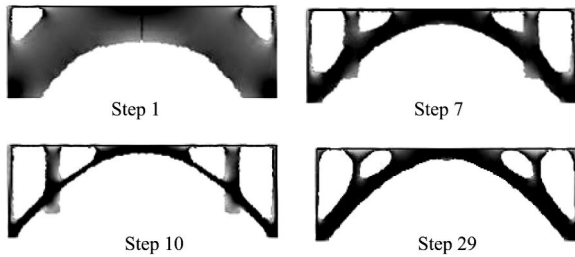


图 12 进化过程
Fig. 12 Process of evolution

6 结 论

通过结构形态创构方法的进一步改进和设计目标力学量的拓展,提高了改进进化论方法的适应性,拓展了其应用范围。

利用B样条曲线来表达的自由边界设计域,不仅能够解决多样的建筑设计空间要求,同时可为建筑师提供与各种边界相适应的合理建筑方案。临时允许空间的引入提高了计算效率,可以生成具有细致分支的结构体,增加了结构体的质量。根据结构受力特点和结构构件的重要性进行人为干预,得到满足要求的结构形态。这种措施可加快进化速度,同时保证结构合理,有利于发挥人的创造性和进行设计时的人机互动,可令其进一步发展。

通过确定支座变化与荷载组合等复合条件的目标力学量,对比各工况下的目标力学量的创构出的结构,表明该方式能够创构出适应多工况的结构形态。考虑材料性质的改进进化论方法,通过保护特定构件,得到了以拉(压)为主的、充分利用材料性能的结构,整个形态进化速度快,体现了力的合理传递。

处理复杂情况下的结构拓扑优化问题时,可以根据结构的功能需求将上述内容综合起来使用。从算例结果可以看出,算例的最终结构形态可以为结构概念设计提供参考。本文所做的工作提高了该方法的实用性,对拓扑优化方法应用于实际工程设计的方式进行了有益的探索。

参考文献(References):

[1] K Suzuki, N Kikuchi. A homogenization method for shape and topology optimization[J]. *Computer Meth-*

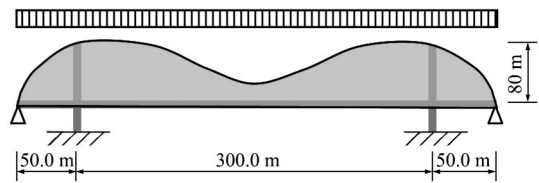


图 13 初始结构
Fig. 13 Initial structure

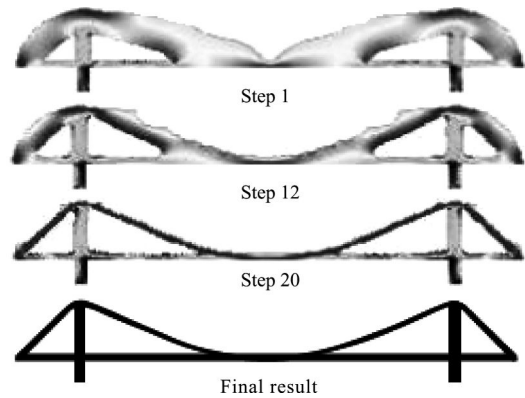


图 14 进化过程和最终结果
Fig. 14 Process of evolution and final result

ods in Applied Mechanics and Engineering, 1991 (93):291-318.

- [2] H A Eschenauer, V V Kobelev, A Schumacher. Bubble method for topology and shape optimization of structures [J]. *Structural Optimization*, 1994, **8**:42-51.
- [3] Y M Xie, G P Steve. *Evolutionary Structural Optimization*[M]. Springer Press, 1997.
- [4] 刘晓峰, 阎 军, 程耿东. 采用自动分组遗传算法的频率约束下桁架拓扑优化[J]. *计算力学学报*, 2011, **28**(1):1-7. (LIU Xiao-feng, YAN Jun, CHENG Geng-dong. Topology optimization of skeletal structures with frequency constraints based on automatic grouping genetic algorithm[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2011, **28**(1):1-7. (in Chinese))
- [5] 荣见华. 渐进结构优化方法及其应用研究[D]. 国防科学技术大学, 2006. (RONG Jian-hua. Research on Evolutionary Structural Optimization Method and its Application[D]. National University of Defense Technology, 2006. (in Chinese))
- [6] Hans A Eschenauer, Niels Olhoff. Topology optimization of continuum structure—a review [J]. *Applied Mechanics Reviews*, 2001, **54**(4):331-389.
- [7] 崔昌禹, 严 慧. 结构形态创构方法—改进进化论方法及其工程应用[J]. *土木工程学报*, 2006, **39**(10):42-47. (CUI Chang-yu, YAN Hui. An advanced structural morphosis technique—Extended evolutionary structural optimization method and its engineering applications [J]. *China Civil Engineering Journal*, 2006, **39**(10):42-47. (in Chinese))

Bayesian reliability analysis for structures based on gaussian process classification

CAO Hong-jun* , ZHU Yu-qiang, ZHANG Gong

(MOE Key Laboratory of Electronic Equipment Structure Design, Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract: Bayesian reliability method is one of the efficient approaches for reliability analysis for structures with incomplete probability information. The computational cost of the Bayesian reliability estimation is often prohibitive for real applications. It is necessary to use surrogate models to replace actual models in order to reduce the computational burden. Commonly used surrogate modeling approaches, which construct approximation models for response functions rather than limit state surfaces, are indirect and not easy to take model uncertainties into account. Furthermore, these methods are difficult to be used for problems exhibiting discontinuous responses and disjoint failure domains. In order to handle these difficulties, this paper presents a method to identify the limit state surface by using Gaussian process classification. The variances of distribution parameters of failure probability due to the model uncertainty are derived. An adaptive sampling criterion for updating the surrogate model is proposed. An example is presented to demonstrate the efficiency and effectiveness of the proposed method.

Key words: bayesian reliability; incomplete information; surrogate models; model uncertainty; gaussian process classification

~~~~~  
(上接第 824 页)

## Structural topology optimization with multiple functions

JIANG Bao-shi\* , CUI Chang-yu, CUI Guo-yong

(School of Civil Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150090, China)

**Abstract:** In this paper, extended evolutionary structural optimization (Extended-ESO) method was improved in functions for meeting the requirements of architectural and structural design, increasing its applicability for complex space requirements, and enhancing its calculation efficiency and quality of the new structure. Considering the space limitation of the architecture function, the allowable space of this method was extended to free boundary allowable space and the concept of temporary allowable space was introduced in plane problem. In order to meet the need of structural function, a new method was introduced for creating rational structures with multiple load cases and constraints. Further considering material mechanical properties, tension-only and compress-only structures were studied by extended ESO method. Otherwise, the features of the method were analyzed through several examples and some mechanical properties of the structures derived from the method were discussed. The structure form derived from this method was mainly in a state of uniform tension and compression stress, can reflect the reasonable force transmission and provide some references for concept design.

**Key words:** structural morphogenesis; shape optimization; topology optimization; extended ESO method