

# 基于分层抽样法的可靠性灵敏度分析

张峰\*, 唐樟春, 刘永寿, 岳珠峰

(西北工业大学 工程力学系 飞行器可靠性工程研究所, 西安 710129)

**摘要:**提出基于分层抽样的可靠性灵敏度分析方法。该方法将变量空间分割成多个互斥子空间,根据子空间对可靠性灵敏度估计值贡献率的大小来分配子空间的抽取的样本量,这种抽样策略使得更多的样本来源于失效域,从而达到降低估计方差、提高了收敛速度的目的。本文还推导了基于分层抽样法的可靠性灵敏度估计值的方差和变异系数。三个算例显示出分层抽样在单模式、多模式并联、多模式串联结构可靠性灵敏度分析上的可行性和优越性。

**关键词:**可靠性;可靠性灵敏度;分层抽样法;Monte Carlo法;失效概率

**中图分类号:**TB114.3;O213.2 **文献标志码:**A

## 1 引言

机械结构随机参数的可靠性灵敏度分析对可靠性设计有指导意义,近年来这方面的研究备受关注<sup>[1-7]</sup>。常见的可靠性灵敏度分析方法有近似解析法和数值模拟法两种<sup>[3-7]</sup>。近似解析法有一次二阶矩法、改进一次二阶矩方法等,这种方法计算简单,对线性极限状态方程问题可得到精确的可靠性灵敏度结果。但针对极限状态方程非线性程度很大的问题,该方法估算误差很大。Monte Carlo法是一种很普通的数值模拟方法,其对随机变量个数、分布类型及极限状态形式均无限制而深受重视。Monte Carlo法在随机向量均值点处依据基本随机变量联合概率密度分布抽样,得到的大多数样本落在安全域内,对可靠性灵敏度估算没有直接贡献,导致Monte Carlo法收敛缓慢,计算量巨大,这限制了该方法在复杂结构可靠性灵敏度分析中的应用<sup>[4]</sup>。为了加快收敛速度,降低计算量,研究人员以Monte Carlo法为基础做了很多改进,常见的改进有重要抽样法<sup>[4,5]</sup>和线抽样法<sup>[6,7]</sup>,这两种方法在结构可靠性灵敏度分析上均有很好的应用,尤其是线抽样方法。当极限状态方程为线性情况时,只需极少量样本即可估算结构随机参数的可靠

性灵敏度。需要指出的是,重要抽样法和线抽样法均要预先获得极限状态方程的最可能失效点,单失效模式问题可以通过改进一次二阶矩法较为容易获得;对于多失效模式的复杂结构,尤其是多模式并联问题,只能通过优化方法来求解得到结构的最可能失效点,需要花费很大的计算量。这些因素限制了重要抽样法、线抽样法在多模式复杂结构可靠性灵敏度上的应用。分层抽样法是一种以Monte Carlo法为基础,通过分层策略抽样来降低估计值方差、快速收敛的抽样方法<sup>[8-11]</sup>,该方法仍在随机向量均值点处抽样,不需求解极限状态方程的最可能失效点,故该方法通用性强。本文将分层抽样法应用到结构随机参数的可靠性灵敏度分析中,推导了基于分层抽样法的可靠性灵敏度估计值的求解公式,并通过三个不同类型的算例来验证所提方法的优越性和通用性。

## 2 基于 Monte Carlo 法的可靠性灵敏度分析

设结构的极限状态函数  $g(\mathbf{x})$  是  $n$  维随机向量  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  的函数,则失效域  $D_f$  和失效概率  $P_f$  可表示为

$$D_f = \{ \mathbf{x}: g(\mathbf{x}) < 0 \} \quad (1)$$

$$P_f = P\{ \mathbf{x} \in D_f \} = \int_{D_f} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2)$$

式中  $f(\mathbf{x})$  是基本随机向量  $\mathbf{x}$  的联合概率密度函数。

结构随机参数可靠性灵敏度可定义为失效概

收稿日期:2011-09-22;修改稿收到日期:2012-03-20。  
基金项目:高等学校学科创新引智计划项目(B07050);  
西北工业大学基础研究基金(JC20100232)  
资助项目。  
作者简介:张峰\*(1982-),男,博士  
(E-mail: nwpuwindy@mail.nwpu.edu.cn).

率对基本变量分布参数的偏导数<sup>[1,2]</sup>,因此式(2)对第  $i$  个基本变量  $x_i$  的第  $m_i$  个分布参数  $\theta_i^{m_i}$  ( $m_i=1, 2, \dots, M_i$ ;  $M_i$  为随机变量  $x_i$  的分布参数的个数)求导数,得到可靠性灵敏度  $\partial P_f / \partial \theta_i^{m_i}$  如式(3)所示。

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_f}{\partial \theta_i^{m_i}} &= \int_{D_f} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \theta_i^{m_i}} d\mathbf{x} = \int_D I(\mathbf{x}) \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \theta_i^{m_i}} d\mathbf{x} \\ &= \int_D I(\mathbf{x}) \frac{1}{f(\mathbf{x})} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \theta_i^{m_i}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ & \quad i=1, 2, \dots, n; \quad m_i=1, 2, \dots, M_i \quad (3) \end{aligned}$$

式中  $D$  为整个随机变量空间,  $I(\mathbf{x})$  为满足  $I(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & g(\mathbf{x}) \geq 0 \\ 1, & g(\mathbf{x}) < 0 \end{cases}$  的示性函数。

由数理统计知识<sup>[12]</sup>,可推出可靠性灵敏度  $\partial P_f / \partial \theta_i^{m_i}$  基于 Monte Carlo 法的无偏估计值  $\partial \hat{P}_f / \partial \theta_i^{m_i}$ ,如式(4)所示。

$$\frac{\partial \hat{P}_f}{\partial \theta_i^{m_i}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N I(\mathbf{x}_j) \frac{1}{f(\mathbf{x}_j)} \frac{\partial f(\mathbf{x}_j)}{\partial \theta_i^{m_i}} \quad (4)$$

估计值  $\partial \hat{P}_f / \partial \theta_i^{m_i}$  的方差  $\text{Var}(\partial \hat{P}_f / \partial \theta_i^{m_i})$  及变异系数  $\text{Cov}(\partial \hat{P}_f / \partial \theta_i^{m_i})$  分别如式(5,6)所示。

$$\begin{aligned} \text{Var} \left( \frac{\partial \hat{P}_f}{\partial \theta_i^{m_i}} \right) &= \frac{1}{N-1} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left[ \frac{I(\mathbf{x}_j)}{f(\mathbf{x}_j)} \frac{\partial f(\mathbf{x}_j)}{\partial \theta_i^{m_i}} \right]^2 - \right. \\ & \quad \left. \left[ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{I(\mathbf{x}_j)}{f(\mathbf{x}_j)} \frac{\partial f(\mathbf{x}_j)}{\partial \theta_i^{m_i}} \right]^2 \right\} \quad (5) \end{aligned}$$

$$\text{Cov} \left( \frac{\partial \hat{P}_f}{\partial \theta_i^{m_i}} \right) = \frac{\sqrt{\text{Var}(\partial \hat{P}_f / \partial \theta_i^{m_i})}}{|\partial \hat{P}_f / \partial \theta_i^{m_i}|} \quad (6)$$

式中  $\mathbf{x}_j$  是通过随机变量联合概率密度函数  $f(\mathbf{x})$  抽取的第  $j$  个子样,  $N$  为样本总数目。

### 3 基于分层抽样法的可靠性灵敏度分析

研究表明,对于小失效概率问题,直接采用 Monte Carlo 法需要通过大量抽样才能使得可靠性灵敏度估计值的变异系数  $\text{Cov}(\partial \hat{P}_f / \partial \theta_i^{m_i})$  达到预定的值,这样才能保证可靠性灵敏度估计值  $\partial \hat{P}_f / \partial \theta_i^{m_i}$  收敛。因此,本文引入分层策略对 Monte Carlo 法进行改进,形成可靠性灵敏度分析的分层抽样法,来提高抽样效率,减少计算量。

分层抽样法以 Monte Carlo 法为基础,利用分层策略将随机变量空间  $D$  分成多个不相交的子空间  $D_1, D_2, \dots, D_L$  ( $L$  为子空间个数),子空间  $D_l$  满足式(7)所示关系。

$$\begin{aligned} \bigcup_{l=1}^L D_l &= D \text{ 且 } D_i \cap D_j = \phi \\ & \quad i \neq j; i, j=1, 2, \dots, L \quad (7) \end{aligned}$$

以  $P_l$  表示第  $l$  个子空间  $D_l$  在整个变量空间  $D$  中所占权重,满足式(8)所示关系。

$$P_l = \int_{D_l} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad l=1, 2, \dots, L \quad (8)$$

设  $P_{fl}$  是第  $l$  个子空间对应的结构失效概率,则  $P_{fl}$  可采用式(9)来近似估计。

$$P_{fl} = P_l \sum_{l_j=1}^{N_l} I(\mathbf{x}_{l_j}) / N_l \quad (9)$$

式中  $\mathbf{x}_{l_j}$  表示通过  $f(\mathbf{x})$  从子空间  $D_l$  抽取的第  $l_j$  个样本,  $N_l$  为在  $D_l$  区域抽取的样本量。

则失效概率  $P_f$  基于分层抽样的无偏估计可以写为

$$\hat{P}_f = \sum_{l=1}^L P_{fl} = \sum_{l=1}^L \left[ P_l \sum_{l_j=1}^{N_l} I(\mathbf{x}_{l_j}) / N_l \right] \quad (10)$$

基于分层抽样法的可靠性灵敏度估计  $\partial \hat{P}_f / \partial \theta_i^{m_i}$  可以相应地表示为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{P}_f}{\partial \theta_i^{m_i}} &= \sum_{l=1}^L \left[ P_l \sum_{l_j=1}^{N_l} \frac{1}{N_l} \frac{I(\mathbf{x}_{l_j})}{f(\mathbf{x}_{l_j})} \frac{\partial f(\mathbf{x}_{l_j})}{\partial \theta_i^{m_i}} \right] \\ & \quad i=1, 2, \dots, n; \quad m_i=1, 2, \dots, M_i \quad (11) \end{aligned}$$

方差  $\text{Var}(\partial \hat{P}_f / \partial \theta_i^{m_i})$  基于分层抽样法的计算公式为

$$\begin{aligned} \text{Var} \left( \frac{\partial \hat{P}_f}{\partial \theta_i^{m_i}} \right) &= \sum_{l=1}^L \left\{ \frac{P_l^2}{N_l} \left\{ \frac{1}{N_l-1} \left[ \sum_{l_j=1}^{N_l} \left( \frac{I(\mathbf{x}_{l_j})}{f(\mathbf{x}_{l_j})} \frac{\partial f(\mathbf{x}_{l_j})}{\partial \theta_i^{m_i}} \right)^2 \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. - \frac{1}{N_l} \left[ \sum_{l_j=1}^{N_l} \frac{I(\mathbf{x}_{l_j})}{f(\mathbf{x}_{l_j})} \frac{\partial f(\mathbf{x}_{l_j})}{\partial \theta_i^{m_i}} \right]^2 \right] \right\} \right\} \quad (12) \end{aligned}$$

结构可靠性灵敏度估计值变异系数  $\text{Cov}(\partial \hat{P}_f / \partial \theta_i^{m_i})$  基于分层抽样法的计算公式与式(6)类同,此处不再赘述。

在结构可靠性灵敏度分析中,存在坐标面、超多面体、超球面等多种分层策略分割变量空间<sup>[11]</sup>。相比较而言,超多面体形式复杂,很难给出具体的描述方程,因此在可靠性灵敏度分析应用很少。下面具体给出基于坐标面和超球面分割变量空间的分层策略。

(1) 坐标面分层:在随机向量均值点处,利用坐标平面将变量空间均匀分成多个子空间。对于  $n$  维随机变量问题,变量空间  $D$  被分隔成  $L=2^n$  个子空间  $D_l$  ( $l=1, 2, \dots, 2^n$ )。二维变量空间采用二维坐标面的分层如图 1(a)所示。

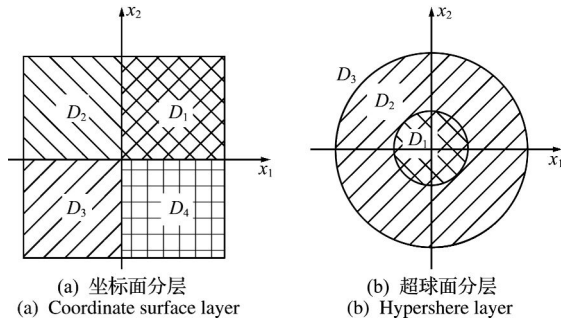


图1 分层抽样法的分层策略

Fig.1 The stratified strategies of the stratified sampling technique

(2) 超球面分层:在随机向量均值点处,利用超球面将变量空间分成多个子空间,这些子空间均以随机变量均值点为中心。二维变量空间采用超球面的分层如图1(b)所示。

子空间样本量的分配优劣决定了分层抽样法的抽样效率和收敛速度。研究表明,按  $P_l \times \sqrt{\text{Var}(\hat{P}_{fl})}$  与  $\sum_{l=1}^L P_l \sqrt{\text{Var}(\hat{P}_{fl})}$  的比率  $q_l$  来分配子空间  $D_l$  的抽样量,可以达到快速最佳的抽样效率<sup>[10]</sup>,  $q_l$  可以写为

$$q_l = P_l \times \sqrt{\text{Var}(\hat{P}_{fl})} / \sum_{l=1}^L P_l \sqrt{\text{Var}(\hat{P}_{fl})}$$

$$= P_l \times \sqrt{\frac{1}{N_l - 1} \left[ \frac{1}{N_l} \sum_{j=1}^{N_l} \{I(\mathbf{x}_{lj})\}^2 - \left\{ \frac{1}{N_l} \sum_{j=1}^{N_l} I(\mathbf{x}_{lj}) \right\}^2 \right]} /$$

$$\sum_{l=1}^L P_l \times \sqrt{\frac{1}{N_l - 1} \left[ \frac{1}{N_l} \sum_{j=1}^{N_l} \{I(\mathbf{x}_{lj})\}^2 - \left\{ \frac{1}{N_l} \sum_{j=1}^{N_l} I(\mathbf{x}_{lj}) \right\}^2 \right]}$$

(13)

在整个变量空间总抽样数目  $N$  确定时,子空间抽样量  $N_l$  可以写为

$$N_l = q_l \times N \quad (l=1, 2, \dots, L) \quad (14)$$

式(13)的  $\text{Var}(\hat{P}_{fl})$  也是待求量,因此不能直接得到  $q_l$  的值,本文采用迭代法确定  $q_l$ 。

设  $q_l$  的初始值满足  $q_1^{(0)} = q_2^{(0)} = \dots = q_L^{(0)}$  关系,则第  $k+1$  迭代过程  $N_l^{(k+1)}$ 、 $q_l^{(k+1)}$  ( $l=1, 2, \dots, L$ ;  $k \geq 1$ ) 可采用式(15,16)确定。

$$N_l^{(k+1)} = q_l^{(k)} \times N^{(k+1)} \quad (15)$$

$$q_l^{(k+1)} = P_l \times \sqrt{\frac{1}{M_l^{(k+1)} - 1} \left[ \frac{A^{(k+1)}}{M_l^{(k+1)}} - \frac{\{B^{(k+1)}\}^2}{(M_l^{(k+1)})^2} \right]} /$$

$$\sum_{l=1}^L P_l \times \sqrt{\frac{1}{M_l^{(k+1)} - 1} \left[ \frac{A^{(k+1)}}{M_l^{(k+1)}} - \frac{\{B^{(k+1)}\}^2}{(M_l^{(k+1)})^2} \right]}$$

(16)

$$M_l^{(k+1)} = \sum_{z=1}^{k+1} N_l^{(z)} \quad (17)$$

式中  $\mathbf{x}_{lj}^{(z)}$  表示通过  $f(\mathbf{x})$  从子空间  $D_l$  第  $z$  次抽取的第  $l_j$  个样本,  $N_l^{(z)}$  表示从子空间  $D_l$  第  $z$  次抽取的样本量,  $N^{(k+1)}$  为第  $k+1$  次迭代在整个变量空间抽取的样本量,

$$A^{(k+1)} = \sum_{z=1}^{k+1} \sum_{l_j=1}^{N_l^{(z)}} \{I(\mathbf{x}_{lj}^{(z)})\}^2, B^{(k+1)} = \sum_{z=1}^{k+1} \sum_{l_j=1}^{N_l^{(z)}} \{I(\mathbf{x}_{lj}^{(z)})\}.$$

## 4 基于分层抽样法的多失效模式可靠性灵敏度分析

假设多失效模式下的研究对象存在  $S$  ( $S > 1$ ) 个失效模式,其对应的极限状态方程是  $n$  维基本随机变量  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  的函数,可以写为

$$g_s(\mathbf{x}) = 0 \quad (s=1, 2, \dots, S) \quad (18)$$

当失效模式之间呈串联关系时,失效域  $D_f$  可以表示为

$$D_f = \left\{ \mathbf{x} : \bigcup_{s=1}^S g_s(\mathbf{x}) < 0 \right\} \quad (19)$$

当失效模式之间呈并联关系时,失效域  $D_f$  可以表示为

$$D_f = \left\{ \mathbf{x} : \bigcap_{s=1}^S g_s(\mathbf{x}) < 0 \right\} \quad (20)$$

由于分层抽样法不需求解极限状态方程的最可能失效点,仍在随机向量均值点处抽样,其应用范围如同 Monte Carlo 法,因此可以直接应用于结构多模式可靠性灵敏度分析中,其求解公式如同单失效模式的情况。

下面给出结构多失效模式基于分层抽样法的可靠性灵敏度分析,具体步骤如下。

(1) 在均值点处将变量空间  $D$  分层为  $L$  个互斥的子空间  $D_l$  ( $l=1, 2, \dots, L$ )。

(2) 在第一次抽样时,假设  $q_1^{(0)} = q_2^{(0)} = \dots = q_L^{(0)}$ ,通过式(15)计算得到第  $l$  个子空间第一次抽取的样本量。

(3) 第  $(k+1)$  次抽样。

通过前  $k$  次抽样信息,代入式(16)中计算  $q_l^{(k)}$ ,再通过式(15)计算第  $(k+1)$  次抽样第  $l$  子空间抽样量  $N_l^{(k+1)}$ 。

(4) 采用式(11)计算可靠性灵敏度的估计值,通过式(12)和式(6)计算其方差和变异系数,如果变异系数小于给定值,即算法收敛,否则令  $k=k+1$ ,返回第(3)步计算直到算法收敛。

## 5 算例分析

**算例 1** 分层抽样法在单失效模式可靠性灵敏度分析中的应用。设非线性极限状态函数为

$$g(\mathbf{x}) = \exp(0.2x_1 + 1.2) - x_2$$

随机变量  $x_1$  和  $x_2$  相互独立且服从标准正态分布,可靠性灵敏度基于 Monte Carlo 法和分层抽样法的计算结果见表 1。

由算例 1 可知,分层抽样法可以很好地解决单失效模式非线性可靠性灵敏度问题。以 Monte Carlo 法估算结果为精确值,从估算精度而言,分层抽样法估算结构不确定性参数可靠性灵敏度的最大相对误差为 2.0562%;从计算量而言,基于坐标面的分层抽样法的计算量相比 Monte Carlo 法减少 57.1695%,基于超球面的分层抽样法的计算量相比 Monte Carlo 法减少 86.3687%。

表 1 算例 1 的计算结果

Tab. 1 The results of example 1

	Monte Carlo 法	分层抽样法	
		坐标面分层	超球面分层
抽样次数	$5.37 \times 10^6$	$2.03 \times 10^6$	$7.32 \times 10^5$
估计值	-0.00271236	-0.00269616	-0.00269601
$\partial \hat{P}_f / \partial \mu_1$ 变异系数	0.0114297	0.0108229	0.0112307
相对误差 / %	—	0.597273	0.602795
估计值	0.00331424	0.00324609	0.00324676
$\partial \hat{P}_f / \partial \sigma_1$ 变异系数	0.0176941	0.0170504	0.0172172
相对误差 / %	—	2.0562	2.03593
估计值	0.00526218	0.00532122	0.00528947
$\partial \hat{P}_f / \partial \mu_2$ 变异系数	0.0101535	0.0101536	0.0099504
相对误差 / %	—	1.12196	0.518637
估计值	0.0135027	0.0136984	0.0135765
$\partial \hat{P}_f / \partial \sigma_2$ 变异系数	0.0107393	0.0111986	0.0104503
相对误差 / %	—	1.4493	0.546316

**算例 2** 分层抽样法在多失效模式并联系统可靠性灵敏度分析中的应用。设并联系统由非线性极限状态方程:

$$g_1(\mathbf{x}) = x_1^2 - 5x_1 - 8x_2 + 16 = 0$$

$$g_2(\mathbf{x}) = -16x_1 + x_2^2 + 32 = 0$$

构成,随机变量  $x_1$  和  $x_2$  均服从相互独立的标准正态分布,可靠性灵敏度基于 Monte Carlo 法和分层抽样法的计算结果见表 2。

由算例 2 可知,分层抽样法可以很好地解决多失效模式并联系统的可靠性灵敏度问题。以 Monte Carlo 法估算结果为精确值,从估算精度而言,基于分层抽样法在多失效模式并联系统可靠性灵敏度分析的最大相对误差为 3.1661%;从计算量而言,基于坐标面的分层抽样法的计算量相比 Monte Carlo 法减少 74.5283%,基于超球面的分层抽样法的计算量相比 Monte Carlo 法减少 86.5094%。

**算例 3** 分层抽样法在多失效模式串联系统可靠性灵敏度分析中的应用。如图 2 所示的某型飞机机翼九盒段结构,由 64 个杆元,42 个板元构成,材料为铝合金,原始数据取自文献[13],已知外载荷与各个单元的强度均为随机变量,且外载荷的均

表 2 算例 2 的计算结果

Tab. 2 The results of example 2

	Monte Carlo 法	分层抽样法	
		坐标面分层	超球面分层
抽样次数	$6.36 \times 10^6$	$1.62 \times 10^6$	$8.58 \times 10^5$
估计值	0.00393854	0.00395914	0.0040023
$\partial \hat{P}_f / \partial \mu_1$ 变异系数	0.0100857	0.0101311	0.00996972
相对误差 / %	—	0.523035	1.61897
估计值	0.00848288	0.00852627	0.00862493
$\partial \hat{P}_f / \partial \sigma_1$ 变异系数	0.0104961	0.0105459	0.0103646
相对误差 / %	—	0.511555	1.67454
估计值	0.00253694	0.00255061	0.00258928
$\partial \hat{P}_f / \partial \mu_2$ 变异系数	0.0102282	0.0102699	0.0101092
相对误差 / %	—	0.538834	2.06328
估计值	0.00272113	0.00273207	0.00280728
$\partial \hat{P}_f / \partial \sigma_2$ 变异系数	0.0124263	0.0124436	0.0122449
相对误差 / %	—	0.401936	3.16612

值与变异系数分别为  $\mu_P = 150 \text{ kg}$ 、 $\text{Cov}(P) = 0.25$ ，单元强度的均值为  $\mu_{R_{68}} = \mu_{R_{77}} = \mu_{R_{78}} = 83.5 \text{ kg}$ ，单元强度的变异系数为  $\text{Cov}(R_{68}) = \text{Cov}(R_{77}) = \text{Cov}(R_{78}) = 0.12$ 。通过枚举方法可以获得结构体系的两个主要失效模式，系统的极限状态函数如式(21)所示。

$$\begin{cases} g = \min(M_1, M_2) \\ M_1 = 4.0R_{68} - 3.9998R_{77} + 4.0R_{78} - P \\ M_2 = 3.2425R_{77} + 0.2299R_{78} - P \end{cases} \quad (21)$$

机翼九盒段结构基于 Monte Carlo 法和分层抽样法的可靠性灵敏度计算结果见表 3。

表 3 算例 3 的计算结果  
Tab. 3 The results of example 3

	Monte Carlo 法	分层抽样法	
		坐标面分层	超球面分层
抽样次数	$3.21 \times 10^6$	$1.43 \times 10^6$	$7.32 \times 10^5$
$\hat{P}_f$ / 估计值	-0.00133065	-0.00132621	-0.00128055
$\hat{P}_f / \partial \mu_{R_{68}}$ 变异系数	0.00700965	0.00689408	0.0066514
相对误差 / %	—	0.333831	3.76505
$\hat{P}_f / \partial \sigma_{R_{68}}$ 估计值	0.00159439	0.00157928	0.00153094
变异系数	0.0110022	0.0115655	0.0108953
相对误差 / %	—	0.947468	3.97978
$\hat{P}_f / \partial \mu_{R_{77}}$ 估计值	0.000843497	0.000860748	0.000806932
变异系数	0.0127925	0.0131983	0.0125897
相对误差 / %	—	2.04513	4.33496
$\hat{P}_f / \partial \sigma_{R_{77}}$ 估计值	0.0025304	0.00254115	0.00246522
变异系数	0.00869716	0.00976858	0.00854954
相对误差 / %	—	0.424663	2.57591
$\hat{P}_f / \partial \mu_{R_{78}}$ 估计值	-0.00135825	-0.00136513	-0.00132297
变异系数	0.00682946	0.00659729	0.00645002
相对误差 / %	—	0.506608	2.59767
$\hat{P}_f / \partial \sigma_{R_{78}}$ 估计值	0.00156444	0.00155225	0.00155123
变异系数	0.0110741	0.0112564	0.0107479
相对误差 / %	—	0.779073	0.844607
$\hat{P}_f / \partial \mu_P$ 估计值	0.000480269	0.000480446	0.000472556
变异系数	0.00597965	0.00632905	0.00557576
相对误差 / %	—	0.036882	1.60589
$\hat{P}_f / \partial \sigma_P$ 估计值	0.000675005	0.000681304	0.000680799
变异系数	0.00887741	0.0099233	0.00851776
相对误差 / %	—	0.933164	0.858366

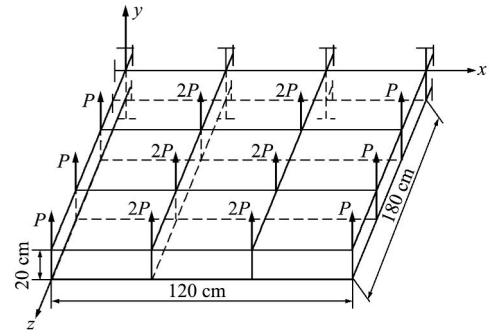


图 2 九盒段子结构示意图  
Fig. 2 Schematic of 9-box structure

由算例 3 可知，分层抽样法可以很好地解决多失效模式串联系统的可靠性灵敏度问题。以 Monte Carlo 法估算结果为精确值，从估算精度而言，基于分层抽样法在多失效模式串联系统可靠性灵敏度分析的最大相对误差为 4.33496%；从计算量而言，基于坐标面的分层抽样法的计算量相比 Monte Carlo 法减少 55.4517%，基于超球面的分层抽样法的计算量相比 Monte Carlo 法减少 77.1963%。

算例 1~算例 3 分别解决了结构单失效模式、多失效模式并联、多失效模式串联的可靠性灵敏度问题，这说明分层抽样法具有广泛的实用性。

## 6 结 论

本文提出一种可靠性灵敏度分析的分层抽样法，给出了基于坐标面和超球面的分层策略。研究表明，本文所提的分层抽样法能很好地解决单失效模式、多失效模式并联、多失效模式串联的可靠性灵敏度问题。相对 Monte Carlo 法而言，基于分层抽样法估算的相对误差小于 5%，在工程容许范围内，而计算量大幅度减少，尤其是基于超球面的分层抽样法。但对于超球面分层策略而言，如何选择合适的超球半径和数量，值得进一步研究。

## 参考文献 (References):

[1] Wu Y T. Computational methods for efficient structural reliability and reliability sensitivity analysis[J]. *AIAA Journal*, 1994, **32**(8): 1717-1723.  
[2] Wu Y T, Sitakanta M. Variable screening and ranking using sampling-based sensitivity measures[J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2006, **91**(6):

- 634-647.
- [3] 袁修开,吕震宙.可靠性敏感度分析方法及其在非线性蠕变疲劳失效模型中的应用[J].计算力学学报,2007,**24**(1):69-73.(YUAN Xiu-kai,LÜ Zhen-zhou. Reliability sensitivity algorithm and its application in creep/fatigue failure[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*,2007,**24**(1):69-73. (in Chinese))
- [4] 袁修开,吕震宙.可靠性灵敏度分析的重要抽样方法[J].机械强度,2007,**29**(5):760-764.(YUAN Xiu-kai,LÜ Zhen-zhou. Reliability sensitivity analysis method based on importance sampling[J]. *Journal of Mechanical Strength*,2007,**29**(5):760-764. (in Chinese))
- [5] 张峰,吕震宙.可靠性灵敏度分析的自适应重要抽样法[J].工程力学,2008,**25**(4):80-84.(ZHANG Feng,LÜ Zhen-zhou. An adaptive importance sampling method for estimation of reliability sensitivity[J]. *Engineering Mechanics*,2008,**25**(4):80-84. (in Chinese))
- [6] Lu Z Z, Song S F, Yue Z F. Reliability sensitivity method by line sampling [J]. *Structural Safety*, 2008,**30**(6):517-532.
- [7] 何红妮,吕震宙.正态变量相关情况下可靠性灵敏度分析的新方法[J].计算力学学报,2011,**28**(3):436-443.(HE Hong-ni,LÜ Zhen-zhou. A new method for reliability sensitivity analysis with correlative normal variables[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*,2011,**28**(3):436-443. (in Chinese))
- [8] David G, Lubiano M A, Alonso M C. Estimating the expected value of fuzzy random variables in the stratified random sampling from finite populations[J]. *Information Sciences*,2001,**138**(2):165-184. (in Chinese))
- [9] Cem K, Hulya C. Ratio estimators for the population variance in simple and stratified random sampling[J]. *Applied Mathematics and Computation*,2006,**173**(2):1047-1059.
- [10] Kim J M, Sungur E A, Heo T Y. Calibration approach estimators in stratified sampling [J]. *Statistics & Probability Letters*,2007,**77**(1):99-103.
- [11] 李强,冯元生.解结构可靠性问题的改进分层抽样法[J].航空学报,1995,**16**(5):513-520.(LI Qiang, FENG Yuan-sheng. An improved stratified sampling monte-carlo method to analyze the reliability of structural systems[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*,1995,**16**(5):513-520. (in Chinese))
- [12] 茆诗松.高等数理统计[M].北京:高等教育出版社,1998.(MAO Shi-song. *Advanced Mathematical Statistics*[M]. Beijing: China Higher Education Press, 1998. (in Chinese))
- [13] 宋笔锋.结构体系失效概率计算方法研究[D].西北工业大学,1994.(SONG Bi-feng. Research on Failure Probability of Structure System[D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University,1994. (in Chinese))

## Stratified sampling algorithm based reliability sensitivity

ZHANG Feng\*, TANG Zhang-chun, LIU Yong-shou, YUE Zhu-feng  
(Institute of Aircraft Reliability Engineering, Department of Engineering Mechanics,  
Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China)

**Abstract:** Reliability sensitivity analysis is implemented by the stratified sampling technique in this paper. The basic idea of the stratified sampling method can be stated as follows. The random space is divided into many exclusive sub-spaces firstly, and then the number of the samples lying in each sub-space is determined by its' contribution to the estimator of the reliability sensitivity. More failure samples can be obtained by this strategy than by the crude Monte Carlo simulation. Hence, the corresponding variance of estimator of the reliability sensitivity can be reduced evidently and the convergence rate can be improved remarkably. The expression for the reliability sensitivity, the variance and variation coefficient of the estimators are derived in details. Three examples are employed to demonstrate the efficiency and accuracy of the presented approach. The results' comparison between the proposed technique and the Monte Carlo method is given. The results show that the presented method can obtain satisfying results with high efficiency and is versatile for single failure model, serial system, parallel system, etc.

**Key words:** reliability; reliability sensitivity; stratified sampling method; Monte Carlo method; failure probability