

箱形梁剪力滞效应分析中的翘曲位移函数及广义内力研究

张元海*, 康喜东, 林丽霞

(兰州交通大学 土木工程学院, 兰州 730070)

摘要:以薄壁箱梁的弯曲计算理论为基础,从分析翼缘板的面内剪切变形和弯曲剪力流的分布规律入手,从理论上证明二次抛物线是箱形梁剪力滞效应分析中的合理翘曲位移函数。选取剪力滞效应引起的附加挠度作为广义位移,用基于最小势能原理的能量变分法建立箱形梁剪力滞效应分析的控制微分方程和边界条件。对箱梁横截面上新出现的广义内力给出严密定义,并建立了剪力滞翘曲应力的简便计算公式,它与初等梁弯曲应力公式具有相同的形式。对一个简支箱梁模型的计算表明,计算值与实测值吻合良好,从而证实了本文的分析方法和建立的公式是正确的。不同于弯矩的分布,剪力滞广义力矩具有快速衰减的分布特征。对集中荷载作用下的简支箱梁算例,剪力滞效应使其跨中挠度增大达12%,工程实践中必须认真对待。

关键词:薄壁箱梁;剪力滞效应;翘曲位移函数;广义内力;附加挠度

中图分类号:U448.213 **文献标志码:**A

1 引言

用能量变分法分析箱形梁的剪力滞效应时,必须预先选取横截面的剪力滞翘曲位移函数;而且,正确选取该位移函数至关重要,因为它直接反映剪力滞翘曲正应力在横截面上的分布规律。在已有的相关文献中,对剪力滞翘曲位移函数的选取比较混乱,多种形式的翘曲位移函数曾被采用过,它们主要有:二次抛物线^[1-4]、三次抛物线^[5-10]、四次抛物线^[10,11]、五次和六次抛物线^[12]、余弦曲线^[13]、悬链线及椭圆曲线等^[14],其中采用最多的是三次抛物线。然而,早在1995年,三次抛物线的翘曲位移函数就曾受到过质疑^[9],但迄今为止,尚未见到从理论上对箱形梁剪力滞翘曲位移函数合理性进行论证的文献。在众多形式的翘曲位移函数中,寻求最为合理的函数形式,有助于从理论上完善箱形梁的剪力滞效应分析方法。此外,已有文献中对相应于剪力滞广义位移的广义内力研究甚少。在文献[8]中,虽然基于箱梁总势能的一阶变分,给出了相应于剪力滞广义位移的广义内力的表达式,但不便

于从物理意义上认识该广义内力。

本文将从理论上证明二次抛物线是箱形梁剪力滞效应分析中的合理翘曲位移函数,选取剪力滞效应引起的附加挠度作为剪力滞广义位移,重新定义箱梁横截面上的剪力滞广义内力,并建立剪力滞翘曲应力的简便计算公式及剪力滞广义位移的控制微分方程。给出了数值算例验证所提出的分析方法的正确性。

2 剪力滞翘曲应力及广义内力

如图1所示,对于受任意竖向分布荷载 $p(z)$ 作用而发生竖向挠曲变形的箱梁,若选取剪力滞效应引起的附加挠度作为剪力滞广义位移,则横截面

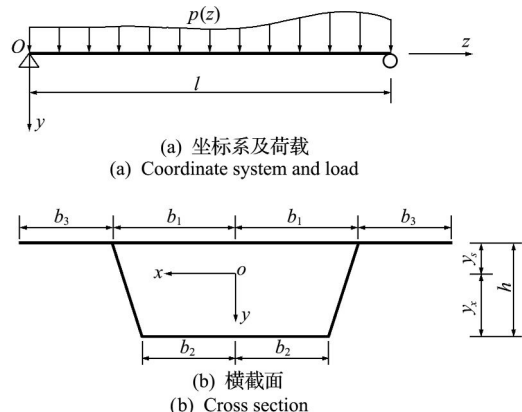


图1 梯形截面箱梁简图

Fig. 1 Box girder with trapezoidal cross section

收稿日期:2011-10-07;修改稿收到日期:2012-03-19.

基金项目:国家自然科学基金(51068018,51268029);长江学者和创新团队发展计划(IRT1139)资助项目.

作者简介:张元海*(1965-),男,博士,教授,博士生导师

(E-mail: zyhl7012@163.com).

上任一点的纵向位移 $u(x, y, z)$ 可表达为

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= -y[\omega'(z) + f'(z)] + \eta\omega_{\zeta}(x, y)f'(z) \\ &= -y\omega'(z) - \omega(x, y)f'(z) \end{aligned} \quad (1)$$

式中 $\omega(z)$ 为相应初等梁的挠度, $f(z)$ 为剪力滞效应引起的附加挠度(剪力滞广义位移), η 为考虑剪力滞翘曲应力自平衡条件的修正系数, $\omega_{\zeta}(x, y)$ 为剪力滞翘曲位移函数, $\omega(x, y)$ 为相应于附加挠曲转角 $-f'(z)$ 的剪力滞广义位移函数, 即

$$\omega(x, y) = y - \eta\omega_{\zeta}(x, y) \quad (2)$$

由虎克定律和式(1)可知, 横截面上任一点的正应力 $\sigma(x, y, z)$ 为

$$\begin{aligned} \sigma(x, y, z) &= E(\partial u / \partial z) \\ &= -E_y\omega''(z) - E\omega(x, y)f''(z) \end{aligned} \quad (3)$$

式(3)右端第一项即为相应初等梁的弯曲应力, 第二项则为剪力滞翘曲应力 σ_{ω} , 即

$$\sigma_{\omega} = -E\omega f'' \quad (4)$$

剪力滞翘曲应力 σ_{ω} 在箱梁横截面上应满足自平衡条件, 即 σ_{ω} 应不合成轴力和弯矩, 则

$$\int_A \sigma_{\omega} dA = 0, \quad \int_A \sigma_{\omega} y dA = 0 \quad (5, 6)$$

将式(4)代入式(5, 6), 并注意式(2)的关系及 x 轴为水平形心轴, 则得

$$\int_A \omega_{\zeta} dA = 0, \quad \eta = I_x / I_{y\zeta} \quad (7, 8)$$

式中 $I_x = \int_A y^2 dA$, $I_{y\zeta} = \int_A y\omega_{\zeta} dA$; I_x 为初等梁理论中熟知的对水平形心轴(x 轴)的惯性矩, 而 $I_{y\zeta}$ 可称为剪力滞翘曲惯性积。

定义剪力滞广义内力 M_{ω} 如下:

$$M_{\omega} = \int_A \sigma_{\omega} \omega dA \quad (9)$$

显然, M_{ω} 为箱梁横截面上各微分面积 dA 处的剪力滞翘曲应力合力以广义位移函数 ω 为“力臂”所形成的“力矩”总和, 本文称其为剪力滞广义力矩。

将式(4)代入式(9), 可得

$$M_{\omega} = -EI_{\omega} f'' \quad (10)$$

式中 $I_{\omega} = \int_A \omega^2 dA$, I_{ω} 可称为剪力滞广义翘曲惯性矩。根据式(2, 8)的关系, 可将 I_{ω} 表达为

$$I_{\omega} = \eta^2 I_{\zeta} - I_x \quad (11)$$

式中 $I_{\zeta} = \int_A \omega_{\zeta}^2 dA$, I_{ζ} 可称为剪力滞翘曲惯性矩。

由式(4, 10)可知, 剪力滞翘曲应力 σ_{ω} 的简便计算公式为

$$\sigma_{\omega} = (M_{\omega} / I_{\omega}) \omega \quad (12)$$

计入剪力滞效应后, 箱梁横截面上总的正应力为初等梁弯曲应力与剪力滞翘曲应力之和, 即

$$\sigma = (M / I_x) y + (M_{\omega} / I_{\omega}) \omega \quad (13)$$

式(13)中的弯矩 M 可按常规方法计算, 即直接按力矩平衡条件计算或求得初等梁挠度 ω 后按 $M = -EI_x \omega''$ 计算, 而剪力滞广义力矩 M_{ω} 却不能通过力矩平衡条件计算, 只能通过求解广义位移 f 的微分方程后按式(10)进行计算。

3 剪力滞翘曲位移函数的选取

箱形梁的剪力滞效应是由翼缘板的面内剪切变形引起的正应力沿其板宽非均匀分布的现象, 因此, 分析箱形梁的剪力滞翘曲位移函数可从翼缘板的面内剪切变形入手。根据薄壁箱梁的弯曲理论, 箱形断面上的弯曲剪力流计算是一个超静定问题。对于图 1(b)所示单室箱形断面, 可在箱壁上任意位置处虚构一个切口, 使之变为开口断面, 则由竖向剪力 Q_y 引起的箱壁上弯曲剪力流 $q(s)$ 的计算公式为

$$q(s) = -\frac{Q_y}{I_x} \left[S_x - \oint \frac{S_x}{t} ds / \oint \frac{1}{t} ds \right] \quad (14)$$

式中 $S_x = \int_0^s y t ds$, s 为原点选在切口处时的周线坐标, t 为壁厚。

当箱壁切口选在断面对称轴上时, 亦即如图 1(b)所示箱形断面的顶板中心或底板中心处时, 弯曲剪力流的计算最为简便, 因为, 此时式(14)中方括号内第二项为零。

以顶板上的弯曲剪力流计算为例, 若周线坐标 s 的原点选在顶板中心处, 则由式(14)可得

$$q(s) = -(Q_y / I_x) S_x = (Q_y / I_x) y_s t s \quad (15)$$

式中 y_s 为箱形断面水平形心轴至顶板中面的距离。

顶板的面内剪切应变 $\gamma(s)$ 可表达为

$$\gamma(s) = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} \approx \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{q(s)}{Gt} = \frac{Q_y y_s}{GI_x} s \quad (16)$$

式中 u 和 v 分别为顶板的纵向位移和侧向位移, G 为剪切弹性模量。由能量变分法分析剪力滞效应时的基本假定可知^[10], $\partial v / \partial z$ 很小故略去。

由式(16)可知,顶板纵向位移 u 对 s 的导数与 s 之间呈线性关系,即

$$\partial u / \partial s = (Q_y y_s / GI_x) s \quad (17)$$

上式两边对 s 积分,可得

$$u - u_0 = (Q_y y_s / 2GI_x) s^2 \quad (18)$$

式中 u_0 为顶板中心处 (s 坐标起始点处) 的纵向位移。

至此,便从理论上证明了顶板的纵向位移沿其板宽方向是按二次抛物线分布的。同理,对悬臂板和底板亦可得到同样结论。

综上所述,将剪力滞翘曲位移函数选取如下:

$$\omega_\zeta = \begin{cases} -y_s[1-x^2/b_1^2]+d & \text{顶板} \\ -y_s[1-(b_1+b_3-x)^2/b_3^2](b_3/b_1)^2+d & \text{悬板} \\ y_r[1-(x^2/b_2^2)](b_2/b_1)^2(y_r/y_s)+d & \text{底板} \\ d & \text{腹板} \end{cases} \quad (19)$$

式中各符号意义如图 1(b) 所示。

在式(19)中,对悬臂板的翘曲位移函数已按其与板宽平方成正比作了修正,对底板的翘曲位移函数则按其与板宽平方及与水平形心轴距离成正比作了修正。此外,之所以对各板件均增加一个常数 d ,是为了使式(7)能够得到满足。

将式(19)代入式(7),可得

$$d = \frac{2y_s}{3A} [A_t + A_c(b_3/b_1)^2 - A_b(b_2/b_1)^2(y_r/y_s)^2] \quad (20)$$

式中 A 为箱梁横截面积, A_t 、 A_c 、 A_b 分别为箱梁顶板、两侧悬臂板、底板的截面积。

值得注意的是,如果箱梁横截面为不带悬臂板的双轴对称矩形箱形截面,则由式(20)可知,此时 $d=0$,亦即横截面上的翘曲应力自动满足轴向平衡条件。Reissner 最早用基于最小势能原理的能量变分法分析箱梁的剪力滞效应时^[4],所选箱梁的横截面就是无悬臂板的双轴对称矩形箱形截面,可见,翘曲应力的轴向平衡条件是自动满足的。对于实践中应用较多的带悬臂板的矩形箱形截面梁,如果横截面尺寸满足下列条件:

$$A_t + A_c(b_3/b_1)^2 = A_b(y_r/y_s)^2 \quad (21)$$

则横截面上翘曲应力的轴向平衡条件即可得到满足。

如图 1(b) 所示箱梁截面的剪力滞翘曲惯性矩

和惯性积计算公式如下:

$$\begin{aligned} I_\zeta &= A \cdot d^2 + A_t y_s \left[\frac{8}{15} y_s - \frac{4}{3} d \right] + \\ &A_c y_s \left[\frac{8}{15} y_s (b_3/b_1)^2 - \frac{4}{3} d \right] (b_3/b_1)^2 + \\ &A_b \left[\frac{8}{15} (y_r^2/y_s) (b_2/b_1)^2 + \frac{4}{3} d \right] (y_r^2/y_s) (b_2/b_1)^2 \end{aligned} \quad (22)$$

$$I_{y_\zeta} = \frac{2}{3} y_s^2 [A_t + A_c(b_3/b_1)^2 + A_b(b_2/b_1)^2 (y_r/y_s)^3] \quad (23)$$

4 控制微分方程的建立及求解

如图 1 所示承受任意竖向分布荷载 $p(z)$ 作用的箱梁,其总势能可表达为

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l (EI_x \omega''^2 + EI_\omega f''^2 + \eta^2 GA_\zeta f'^2) dz - \int_0^l p(\omega + f) dz \quad (24)$$

式中

$$\begin{aligned} A_\zeta &= \int_A (\partial \omega_\zeta / \partial x)^2 dA = \frac{4}{3} [A_t (y_s/b_1)^2 + \\ &A_c (b_3/b_1)^4 (y_s/b_3)^2 + A_b (y_r/b_2)^2 (y_r/y_s)^2 (b_2/b_1)^4] \end{aligned} \quad (25)$$

对总势能表达式(24)进行一阶变分运算,可得

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \int_0^l (EI_x \omega'''' - p) \delta \omega dz + \int_0^l (EI_\omega f'''' - \eta^2 GA_\zeta f'' - p) \delta f dz + \\ &EI_x \omega'' \delta \omega'|_0^l - EI_x \omega''' \delta \omega|_0^l + EI_\omega f'' \delta f'|_0^l + \\ &(\eta^2 GA_\zeta f' - EI_\omega f''') \delta f|_0^l \end{aligned} \quad (26)$$

根据最小势能原理,总势能的一阶变分应为零,即 $\delta \Pi = 0$,则由式(26)可得控制微分方程:

$$EI_x \omega'''' - p = 0 \quad (27)$$

$$EI_\omega f'''' - \eta^2 GA_\zeta f'' - p = 0 \quad (28)$$

显然,式(27)即为熟知的初等梁挠曲微分方程,而式(28)则为剪力滞控制微分方程,它可化为

$$f'''' - k^2 f'' = p / EI_\omega \quad (29)$$

式中 k 为 Reissner 参数,即

$$k = \eta \sqrt{GA_\zeta / EI_\omega} \quad (30)$$

由总势能的一阶变分表达式(26)可知,与初等梁的挠度 ω 和挠曲转角 $-\omega'$ 相应的内力分别为剪力 $-EI_x \omega''$ 和弯矩 $-EI_x \omega'''$,而与剪力滞效应引起的附加挠曲转角 $-f'$ 相应的内力为剪力滞广义力矩 $-EI_\omega f''$,与式(10)的结果完全相同;与剪力滞附加挠度 f 相应的内力(可称为剪力滞广义剪力)为

$$Q_\omega = \eta^2 GA_\zeta f' - EI_\omega f''' \quad (31)$$

求解剪力滞控制微分方程(28)时的边界条件:

对于固定端: $f=0, f'=0$

对于简支端: $f=0, f''=0$

对于自由端: $f''=0, \eta^2 GA_{\zeta} f' - EI_{\omega} f''' = 0$

当如图1所示简支箱梁承受竖向均布荷载 $p(z)=q$ 时,剪力滞控制微分方程(29)的通解为

$$f = C_1 + C_2 z + C_3 \operatorname{sh} k z + C_4 \operatorname{ch} k z - (q/2EI_{\omega} k^2) z^2 \quad (32)$$

式中 $C_1 \sim C_4$ 为积分常数,可利用两端的简支边界条件确定。最后可得附加挠度计算公式如下:

$$f = \frac{q}{EI_{\omega} k^4} \left[\frac{k^2 z}{2} (l-z) - 1 + \operatorname{ch} k z - \operatorname{th} \frac{kl}{2} \operatorname{sh} k z \right] \quad (33)$$

求得 f 后,即可由式(10)计算剪力滞广义力矩 M_{ω} ,再由式(12)计算剪力滞翘曲应力。

当竖向集中荷载 P 作用于简支箱梁的跨内任意截面处时,若集中荷载 P 作用截面至左、右支截面的距离分别为 a, b ,则可求得 P 作用点左、右梁段的附加挠度计算公式分别为

$$f_1 = \frac{P}{EI_{\omega} k^3} \left[\frac{kbz}{l} - \frac{\operatorname{sh}(kl-ka)}{\operatorname{sh} kl} \operatorname{sh} kz \right] \quad (34)$$

$$f_2 = \frac{P}{EI_{\omega} k^3} \left[\frac{ka}{l} (l-z) - \frac{\operatorname{sh} ka}{\operatorname{sh} kl} \operatorname{sh}(kl-kz) \right] \quad (35)$$

对于连续箱梁等复杂结构,可借鉴文献[15]中的梁段有限元法进行数值分析,即首先根据控制微分方程的通解构造单元形函数,再通过最小势能原理建立单元刚度矩阵。

5 数值算例

有机玻璃制作的简支箱梁模型计算简图如图2所示^[10],在跨中截面梁顶腹板位置作用对称集中荷载,总值为 $P=272.2$ N。跨中横截面测点布置示意如图2(b)所示,详细测点布置见文献[6,7]。材料弹性模量为 3000 MPa,泊松比为 0.385。

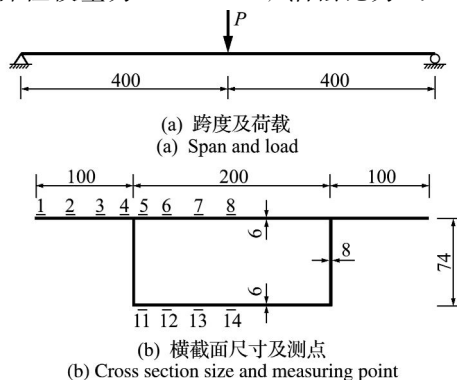


Fig. 2 Simply supported box girder model (unit: mm)

表1 简支箱梁模型的应力比较

Tab.1 Comparison of stresses in the simply supported box girder model

测点编号	实测值/MPa	计算值/MPa
1	-0.2122	-0.2589
2	-0.2485	-0.2815
3	-0.3290	-0.3494
4	—	-0.3813
5	—	-0.3813
6	-0.3200	-0.3494
7	-0.2604	-0.2815
8	-0.2450	-0.2589
11	—	0.6796
12	0.5738	0.5908
13	0.3984	0.4015
14	0.3888	0.3384

按本文方法计算的跨中截面各测点处应力计算值连同文献[10]提供的实测值一并列入表1中,以便比较。由表1可知,按本文方法计算的结果与实测结果总体上吻合良好。

图3给出了跨中集中荷载 $P=272.2$ N作用下该简支箱梁的剪力滞广义力矩分布图。从图3可以看出,本文定义的剪力滞广义力矩与弯矩的分布规律完全不同,在跨中截面的剪力滞广义力矩虽然数值很大,但衰减也很快。

图4给出了跨中集中荷载 $P=272.2$ N作用下按初等梁理论及本文方法求得的挠度曲线。从图4可以看出,按本文考虑剪力滞效应的方法求得的挠度要明显大于按初等梁理论(不考虑剪力滞效应)求得的挠度,这是由于剪力滞效应会使箱梁翼缘板的面内刚度降低,从而必然导致挠度增大。按初等梁理论求得的跨中挠度为 0.1914 mm,剪力滞附加挠度为 0.0234 mm,剪力滞效应使挠度提高的幅度达到 12.2%。可见,剪力滞效应会显著增大箱梁的挠度,工程实践中必须认真对待。

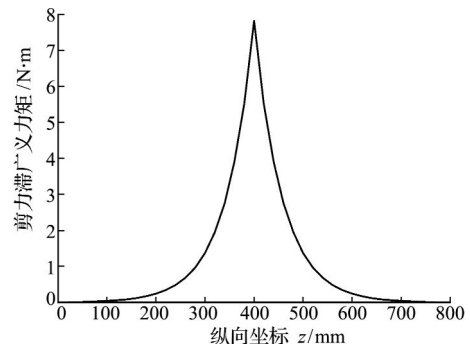


图3 简支箱梁在集中荷载作用下的剪力滞广义力矩图
Fig. 3 Generalized moment for shear lag in simply supported box girder under concentrated load

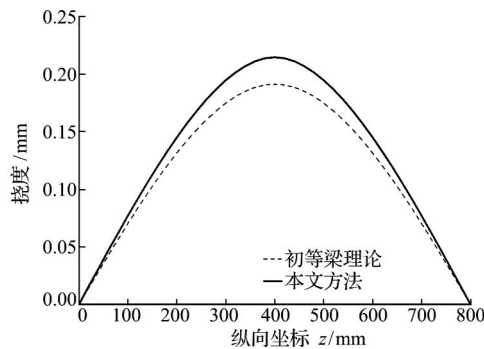


图4 简支箱梁在集中荷载作用下的挠度曲线
Fig. 4 Curves of deflection in simply supported box girder under concentrated load

当然,该算例的挠度提高幅度并不适用于其他箱梁。对于具有不同 Reissner 参数的箱梁,即使跨度和荷载条件相同,剪力滞效应对挠度提高的程度也不一样。工程实践中必须根据箱梁具体截面尺寸计算剪力滞效应对挠度的提高。

6 结 论

(1) 本文选取剪力滞效应引起的附加挠度作为剪力滞广义位移,研究了箱形梁剪力滞效应分析中的翘曲位移函数和广义内力,建立了关于附加挠度的控制微分方程和边界条件。对一个简支箱梁模型的计算表明,计算值与实测值吻合良好,从而验证了本文的理论分析方法和推导的公式是正确的。

(2) 以薄壁箱梁的弯曲理论为基础,从分析翼缘板的面内剪切变形和弯曲剪力流的分布规律入手,从理论上证明了二次抛物线是箱形梁剪力滞效应分析中的合理翘曲位移函数。

(3) 对计入剪力滞效应后箱形梁横截面上新出现的广义内力给出了严密定义,并称为剪力滞广义力矩,它具有自平衡性质,其物理意义为横截面上各微分面积处剪力滞翘曲应力的合力以相应广义位移函数为“力臂”所形成的“力矩”总和。给出了通过剪力滞广义力矩和广义翘曲惯性矩计算剪力滞翘曲应力的简便公式,它与初等梁弯曲应力公式具有相同的形式。

(4) 对集中荷载作用下简支箱梁算例的计算结果表明,剪力滞广义力矩图与弯矩图的分布规律完全不同,在跨中截面的剪力滞广义力矩虽然数值很大,但衰减特别快,亦即剪力滞广义力矩的分布具有局部特性;剪力滞效应使跨中挠度增大达 12.2%。对于具有不同 Reissner 参数的箱梁,即使跨

度和荷载条件相同,剪力滞效应对挠度提高的程度也不一样。工程实践中必须根据箱梁具体截面尺寸计算剪力滞效应对挠度的提高。

参考文献(References):

- [1] 张元海,林丽霞,李 乔.薄壁箱梁挠曲性能的矩阵分析[J].铁道学报,2011,33(5):104-108. (ZHANG Yuan-hai, LIN Li-xia, LI Qiao. Matrix analysis on flexural behavior of thin-walled box girder[J]. *Journal of the China Railway Society*, 2011, 33(5): 104-108. (in Chinese))
- [2] 王继兵,周德源.荷载横向变位下箱梁剪力滞效应分析[J].哈尔滨工程大学学报,2011,32(2):159-164. (WANG Ji-bing, ZHOU De-yuan. Analysis of the shear lag effect of a box girder with varying lateral loading locations[J]. *Journal of Harbin Engineering University*, 2011, 32(2): 159-164. (in Chinese))
- [3] Dezi L, Mentrasti L. Nonuniform bending-stress distribution (shear lag)[J]. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 1985, 111(12): 2675-2690.
- [4] Reissner E. Analysis of shear lag in box beams by the principle of the minimum potential energy[J]. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1946, 4(3): 268-278.
- [5] Zhou S J. Finite beam element considering shear-lag effect in box girder[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 2010, 136(9): 1115-1122.
- [6] 罗旗帜.薄壁箱形梁剪力滞计算的梁段有限元法[J].湖南大学学报,1991,18(2):33-38. (LUO Qi-zhi. Calculation of the shear lag in thin walled box girders by the finite segment method[J]. *Journal of Hunan University*, 1991, 18(2): 33-38. (in Chinese))
- [7] 程翔云,罗旗帜.箱梁在压弯荷载共同作用下的剪力滞[J].土木工程学报,1991,24(1):52-64. (CHENG Xiang-yun, LUO Qi-zhi. Shear lag of box girders under combined bending and axial loading[J]. *China Civil Engineering Journal*, 1991, 24(1): 52-64. (in Chinese))
- [8] 张元海,李 乔.箱形梁剪力滞效应分析中的广义力矩研究[J].铁道学报,2007,29(1):77-81. (ZHANG Yuan-hai, LI Qiao. Study on the generalized moment in shear lag effect analysis of the box girder[J]. *Journal of the China Railway Society*, 2007, 29(1): 77-81. (in Chinese))
- [9] 谢 旭,黄剑源.薄壁箱形梁剪力滞效应分析的刚度法[J].工程力学,1995,12(2):95-102. (XIE Xu, HUANG Jian-yuan. Stiffness method for analysis of shear lag effect on thin-walled box girder[J]. *Engi-*

- neering Mechanics*, 1995, **12**(2):95-102. (in Chinese))
- [10] 张士铎, 邓小华, 王文州. 箱形薄壁梁剪力滞效应 [M]. 北京: 人民交通出版社, 1998. (ZHANG Shi-duo, DENG Xiao-hua, WANG Wen-zhou. *Shear Lag Effect in Thin-walled Box Girder* [M]. Beijing: China Communications Press, 1998. (in Chinese))
- [11] Chang S T, Ding Y. Shear lag effect in box girder with varying depth[J]. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 1988, **114**(10):2280-2292.
- [12] 陈常松, 邓安. 高次位移函数时箱梁剪滞效应变分法解[J]. 重庆交通大学学报, 2009, **28**(1): 5-7. (CHEN Chang-song, DENG An. Variational solution of shear lag effect of box girder in high order displacement function[J]. *Journal of Chongqing Jiaotong University*, 2009, **28**(1):5-7. (in Chinese))
- [13] 倪元增, 钱寅泉. 弹性薄壁梁桥分析[M]. 北京: 人民交通出版社, 2000. (NI Yuan-zeng, QIAN Yin-quan. *Elastic Analysis of Thin-walled Beam Bridge* [M]. Beijing: China Communications Press, 2000. (in Chinese))
- [14] 甘亚南, 周广春. 薄壁箱梁纵向剪滞翘曲函数精度选择的研究[J]. 工程力学, 2008, **25**(6):100-106. (GAN Ya-nan, ZHOU Guang-chun. An approach for precision selection of longitudinal shear lag warping displacement function of thin-walled box girders[J]. *Engineering Mechanics*, 2008, **25**(6):100-106. (in Chinese))
- [15] 高兴军, 马海涛, 陈太聪. 弹性地基上 Timoshenko 梁的精确数值解[J]. 计算力学学报, 2011, **28**(6):904-908. (GAO Xing-jun, MA Hai-tao, CHEN Tai-cong. Exact numerical solutions of timoshenko beams on elastic foundations[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2011, **28**(6):904-908. (in Chinese))

Study on warping displacement function and generalized internal force in shear lag effect analysis of box girder

ZHANG Yuan-hai*, KANG Xi-dong, LIN Li-xia

(School of Civil Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou, Gansu 730070, China)

Abstract: Based on the flexural theory of thin-walled box girder, the curve of quadratic parabola is proved to be the reasonable form of the warping displacement function in the shear lag effect analysis of a box girder through investigating the in-plane shear deformation and the bending shear flow distribution in the flanges. The additional deflection induced by shear lag effect is adopted as the generalized displacement. The governing differential equations and the corresponding boundary conditions for shear lag effect of box girder are established by the energy calculus of variations based on the principle of minimum potential energy. The new generalized internal force is defined rigorously, and a simple and convenient formula of stress for shear lag warping is presented which has the same form as the bending stress of elementary beam. A simply supported box girder model is analyzed and the calculated results are in good agreement with the test results, validating the method and formula presented. The generalized moment for shear lag differs from the bending moment in distribution and attenuates quickly. For the simply supported box girder example under concentrated load, shear lag effect increases the mid-span deflection by 12%, which should be treated carefully in practice.

Key words: thin-walled box girder; shear lag effect; warping displacement function; generalized internal force; additional deflection