

文章编号:1000-8055(2013)01-0090-06

不可压缩湍流的色散模型

董 鹤, 高 歌, 邸亚超

(北京航空航天大学 能源与动力工程学院
航空发动机气动热力国家级重点实验室, 北京 100191)

摘 要: 分析了广泛存在于湍流运动中的能量逆转现象, 揭示了其产生的原因, 提出了湍流的色散性质. 在此基础上, 修改了 Boussinesq 假设, 建立了包含色散效应的新的雷诺应力封闭式和湍流色散系数, 给出与不同模型相结合时, 湍流色散系数所具有的不同形式, 并阐述了湍流运动中能量的传递方向及条件. 采用不可压缩平板边界层流动和平面后台阶流动验证了其可信性和优越性. 平板摩擦阻力系数及边界层速度型与实验结果吻合良好, 平面后台阶流动的流向再附长度、台阶边压力系数及湍流强度等参数均比标准 $k-\epsilon$ 模型更接近实验结果. 结果表明: 色散项的加入可以在不显著增加计算量的同时显著改善预测精度, 模型具有一定的工程应用价值.

关 键 词: 湍流; 色散效应; 涡黏模型; 能量逆转; 负黏性

中图分类号: V23; O357.5

文献标志码: A

Dispersion model for incompressible turbulent flows

DONG He, GAO Ge, DI Ya-chao

(National Key Laboratory of Science and Technology on Aero-Engine
Aero-thermodynamics, School of Energy and Power Engineering,
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: The energy inversion phenomenon which widely exists in turbulent flows was analyzed. Its cause which was called dispersion effect in turbulent flows was revealed. On this basis, a modified Boussinesq hypothesis containing dispersion coefficient and a new kind of eddy viscosity model were presented. The dispersion coefficient had different forms when the modified Boussinesq hypothesis was coupled with different turbulence models. The condition and direction of energy transfer were also described. The credibility of the new model was verified in numerical simulation of wall boundary layer flow and back-facing step flow. The frictional resistance coefficient and the velocity profile for turbulent boundary layer were in good agreement with the experimental results; the reattachment length, the surface pressure coefficient on step-side wall and the turbulence intensity profile for backward-facing step flow were closer to the experimental results than the standard $k-\epsilon$ model. Results show that the introduction of dispersion term can improve the accuracy of the prediction significantly with very little expenses, so the model should be useful in engineering application.

Key words: turbulence; dispersion effect; eddy viscosity model; energy inversion; negative viscosity

收稿日期:2012-09-03

网络出版地址: http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2297.V.20130114.1726.201301.90_013.html

作者简介:董鹤(1986—),男,辽宁辽阳人,博士生,主要从事湍流模型研究.

经典的湍流理论^[1-2]认为,湍流运动存在黏性、热传导和扩散 3 种效应,分别表示动量、热量和质量由高值向低值的运输.这 3 种效应都使湍流的动量、热量和质量分散,使物理场均匀化,故统称为湍流的耗散效应,而且耗散效应是不可逆的.1948 年,Burgers^[3]系统分析了湍流的耗散机制,提出 Burgers 方程,作为湍流的规范方程.在此基础上,对于 Navier-Stokes 方程进行雷诺平均产生的不封闭项,人们多将其与分子扩散类比加以模化.数十年来,以耗散机制为主导的理论催生出了各式各样的湍流模型.然而,在许多湍流问题中,能量逆转现象均被以不同方式发现,即大涡从小涡获取能量,或者平均运动从脉动运动获取能量,这就是所谓的负黏性问题^[4].湍流能量逆转现象的发现使经典的湍流理论捉襟见肘.Lin^[5]认为,湍流能量逆转与湍流的波粒二象性紧密相关.由于色散过程具有波粒二象性,因此高歌^[6]在分析了湍流的耗散与色散的相互作用之后,曾明确指出,以耗散机制为主导的湍流理论忽视了色散这一湍流的另一重要本质,有必要根据湍流耗散与色散相互作用关系,使用包含色散项的方程取代 Burgers 方程,作为湍流的规范方程.

1 数学模型

分别考察 Burgers 方程和 KdV 方程行波解的特性.

Burgers 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

KdV 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (2)$$

两方程在 $\nu > 0$ 和 $\gamma > 0$ 的行波解^[6]的示意图分别见图 1 和图 2.

由图 1 和图 2 可以看出,Burgers 方程具有连续的冲击波解,表明其有波的特性. KdV 方程具有稳定的孤立波解,表明其有粒子的特性.因此,两方程相结合的 KdV-Burgers 方程有望同时描述湍流波的特性和粒子的特性.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (3)$$

在文献[7]中,作者得到了 KdV-Burgers 方程在 $\nu > 0, \gamma > 0$ 和 $\nu > 0, \gamma < 0$ 时鞍-焦轨道的行波解,示意图分别见图 3 和图 4.

对于图 3 中正色散的情况 ($\gamma > 0$),行波以速

度 c 向右行进时,波的场首先被 u_2 控制,进入孤立波段,此时湍流耗散效应几乎不起作用,当波的振幅达到最大时,场便被耗散引起的衰减振荡波控制,波的尺度发生衰减,直至最后被 u_1 控制.这一过程对应了湍流运动中湍涡级联散裂的过程.

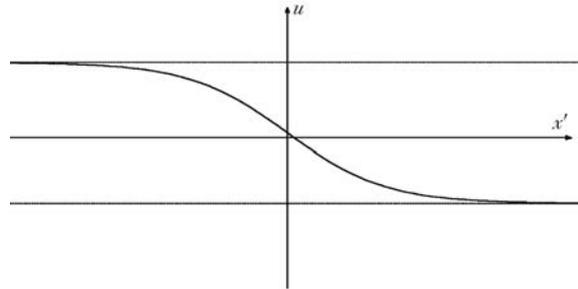


图 1 方程(1)行波解示意图

Fig. 1 Schematic diagram of travelling front solution for equation (1)

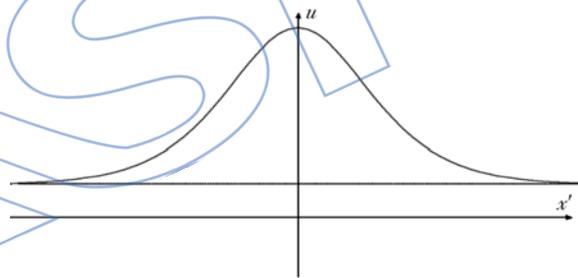


图 2 方程(2)行波解示意图

Fig. 2 Schematic diagram of travelling front solution for equation (2)

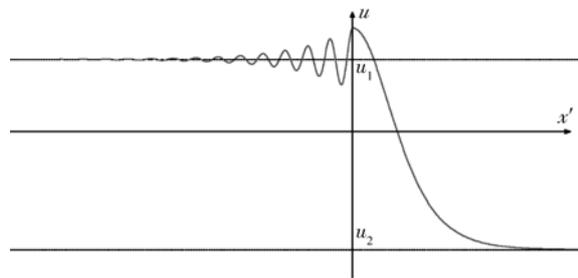


图 3 方程(3)行波解示意图 ($\gamma > 0$)

Fig. 3 Schematic diagram of travelling front solution for equation (3) ($\gamma > 0$)

对于图 4 中负色散的情况 ($\gamma < 0$),行波以速度 c 向右行进时,场首先被 u_2 控制,波的尺度逐渐放大,最后被 u_1 控制,进入孤立波段.这一过程

对应了湍流运动中由大涡从小涡获取能量的能量逆过程。

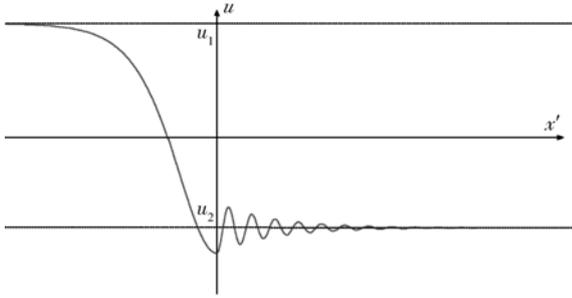


图4 方程(3)行波解示意图($\gamma < 0$)

Fig. 4 Schematic diagram of travelling front solution for equation (3) ($\gamma < 0$)

2 不可压缩湍流的色散模型

对于雷诺平均 Navier-Stokes 方程中产生的不封闭项雷诺应力, Boussinesq 假设: 雷诺应力的泛函公式是关于平均运动梯度的线性代数关系式, 而来流的湍流特性以参数形式(它的尺度和强度)包含在线性关系式中, 则不可压缩湍流的雷诺应力封闭关系式可写作

$$-\langle u'_i u'_j \rangle = 2\nu \langle S_{ij} \rangle - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (4)$$

其中 ν 为湍流黏度, S_{ij} 为变形率张量。

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (5)$$

Boussinesq 假设只考虑了平均速度梯度与雷诺应力的线性关系, 为了弥补其中的不足, 各式各样的非线性湍流模型, 包括显示代数应力模型, 被先后提出^[8-11]。然而, 由于缺乏必要的理论依据, 单纯地依靠把雷诺应力用平均速度梯度高阶展开来获取雷诺应力的非线性部分并不完全合理, 也就无法预测能量的正向传递(涡团级联散裂)和逆向传递(能量逆转)的规律。

根据湍流的耗散与色散相互作用理论^[6], 平均速度的 2 阶梯度是构成色散项的必要参数, 因此, 在构造雷诺应力的封闭式时, 需考虑平均速度的 2 阶梯度的影响。Menter 等^[12] 提出尺度自适应(SAS)模型时也曾敏锐地指出, 雷诺应力模化不能单独依靠速度 1 阶导数, 也应该与其高阶导数相关。

在二维剪切层中

$$-\langle u'v' \rangle = \nu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (6)$$

若考虑平均速度的 2 阶梯度的影响, 可将其修正为

$$-\langle u'v' \rangle = \nu \frac{\partial u}{\partial y} - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (7)$$

类似地, 根据雷诺应力张量封闭的基本原则^[13], 可以假设

$$-\langle u'_i u'_j \rangle = 2\nu \langle S_{ij} \rangle - 2\gamma_k \frac{\partial \langle S_{ij} \rangle}{\partial x_k} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (8)$$

式(8)即为修正后的带有色散项的雷诺应力封闭式, 其中 γ_k 为色散系数。

色散系数是根据湍流的耗散与色散相互作用理论分析得出的新的湍流参数, 利用量纲分析, 假设色散系数具有如下形式:

$$\gamma_k = C_\gamma^* \nu \tau^2 \frac{\partial k}{\partial x_k} \quad (9)$$

其中 C_γ^* 为模型常数, τ 为积分时间尺度^[14], 对于标准 $k-\epsilon$ 模型, $\tau = k/\epsilon$, 对于标准 $k-\omega$ 模型, $\tau = \frac{k}{C_\mu \omega}$ 。

本文得出的湍流的色散模型, 并不是根据某种具体流动问题得出的特定规律, 而是描述广泛存在于湍流运动现象中的色散效应。模型中包含的物理机制越多, 模型的适用范围越广^[13], 因此该模型具有更好的通用性, 原则上可以与任何线性或非线性模型的尺度方程相结合, 而且有望在几乎不增大计算量的同时显著提高其计算精度。

若以 k 和 ϵ 参数化, 则

$$\gamma_k = C_\gamma \frac{k^4}{\epsilon^3} \frac{\partial k}{\partial x_k} \quad (10)$$

建议 $C_\gamma = 0.006$ 。

若以 k 和 ω 参数化, 则

$$\gamma_k = C_\gamma \frac{k}{\omega^3} \frac{\partial k}{\partial x_k} \quad (11)$$

建议 $C_\gamma = 8.230$ 。

模型常数 C_γ 使用平面槽道湍流的直接数值模拟结果计算并修正获得。

此时雷诺平均不可压缩 Navier-Stokes 方程可表示为

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} = 0 \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \langle u_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} = \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + (\nu + \nu_k) \frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial x_j \partial x_j} - \\ \gamma_k \frac{\partial^3 \langle u_i \rangle}{\partial x_j \partial x_j \partial x_k} \end{aligned} \quad (13)$$

3 湍流能量传递的方向

在湍动能输运方程中,湍动能生成项 $P_k = \tau_{ij} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j}$, 表示雷诺应力通过平均运动的变形率向湍流脉动运动输入的平均能量. 若 $P_k > 0$, 则平均运动向脉动运动输入能量; 若 $P_k < 0$, 则脉动运动向平均运动输入能量. 在一维状态下, 若 $P_k < 0$, 需

$$\nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} < 0 \quad (14)$$

对于简化为一维形式的 KdV-Burgers 方程, 再由图 3 和式(4)可知, 湍流能量逆转发生的必要条件是发生负色散, 即

$$\gamma < 0 \quad (15)$$

在式(14)和式(15)即构成的充分必要条件下, 湍流的能量逆向传递, 发生能量逆转现象. 反之, 湍流能量则正向传递, 呈现湍涡级联散裂特征.

4 算例分析

4.1 平板边界层流动

作为最普通的壁湍流, 平板边界层流动结构简单, 但其中的物理机制极为复杂, 而且此种流动在工程上应用广泛, 各类流体机械工作的本质就是通过流体和固体壁面的相互作用, 来实现能量的转移. 本文算例按照 1951 年 Wiegardt 和 Tillmann^[15] 的实验数据建立, 平板长度为 5 m, 故选取 $2\text{ m} \times 5\text{ m}$ 的矩形区域为计算域, 进口采用均匀来流边界条件, 速度为 29.2 m/s , 出口采用压力出口边界条件, 上边界采用开放边界条件, 下边界采用无滑移壁面边界条件. 湍流模型采用湍流色散模型与标准 $k-\epsilon$ 模型相结合, 并采用标准壁面函数, 模型方程及常数见文献[14].

图 5 和图 6 显示了从平板前缘到尾部的摩擦阻力系数分布和 $X=4.1\text{ m}$ 处的边界层速度型, 对比文献[15]的实验数据后, 可以看出, 本文提出的湍流色散模型的计算结果与实验数据基本符合, 初步验证了其可信性. 不过由于此种流动结构简单, 多数湍流模型均能模拟出较为理想的结果, 因此, 需要有较为复杂的流动, 来继续检验本文提出模型的可信性和优越性.

4.2 平面后台阶流动

平面后台阶流动是一种广泛存在的流动形式, 具有典型的分离再附特性. 之前已经有学者对

平面后台阶流动做了许多实验研究^[16] 和数值研究^[17], 并获得了令人信服的结果. 本文采用的后台阶通道形状与文献[16]中实验所用的通道形状一致, 台阶高度 $H=38.1\text{ mm}$, 台阶前通道长度为 $5H$, 台阶后通道长度为 $30H$, 台阶前通道高度为 $2H$. 通道进口为充分发展流动, 平均流速为 18.6 m/s , 因此基于台阶高度的雷诺数为 4.8×10^4 . 通道出口距离再附点较远, 采用压力出口边界条件即可保证计算精度, 使结果可信. 上下壁面均采用无滑移边界条件.

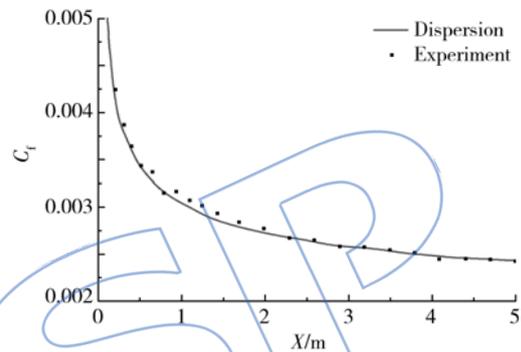


图 5 摩擦阻力系数分布图

Fig. 5 Frictional resistance coefficient distribution

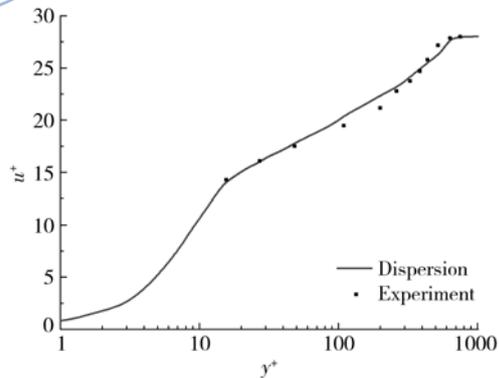


图 6 边界层速度型图

Fig. 6 Velocity profile for turbulent boundary layer

根据文献[16]中实验测定, 在上述条件下, 流向再附长度为 $7.0H$. 计算结果显示, 使用标准 $k-\epsilon$ 模型时, 计算的流向再附长度为 $5.3H$, 误差较大; 而将湍流色散模型与标准 $k-\epsilon$ 模型相耦合时, 计算的流向再附长度为 $7.06H$, 误差仅为 0.86% , 满足工程需要精度. 图 7 和图 8 分别显示了使用 2 组模型计算的局部平均流线.

图 9 显示了台阶边压力系数分布的情况. 可以看出, 在再附点附近, 本文使用的模型比标准

$k-\epsilon$ 模型在计算精度上有了显著改善,说明在此区域内,色散效应显著,本文使用的模型可以很好地模拟湍流的色散效应.而在再附点之前,对于捕捉压力系数最低值的位置,本文使用的模型比标准 $k-\epsilon$ 模型也有一定程度的改善.

模型对比摩擦阻力系数、边界层速度型、再附长度、压力系数和湍流度的分布,不仅检验了本文提出的湍流色散模型的可信度,而且展现了其优越性,证实了添加色散项可以显著改善原有模型的观点.因此,可以认为该模型具有很大的发展潜力和工程应用价值.



图7 使用标准 $k-\epsilon$ 模型计算的平均流线图
Fig. 7 Streamline calculated with standard $k-\epsilon$ turbulence model



图8 使用本文模型计算的平均流线图
Fig. 8 Streamline calculated with this paper's turbulence model

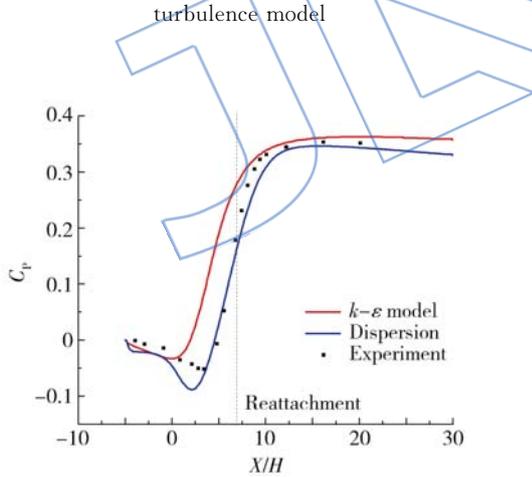


图9 台阶边压力系数分布图
Fig. 9 Surface pressure coefficient on step-side wall

图10 则分别显示了台阶后不同位置 $X = 10.333H$, $X = 8.553H$ 和 $X = 7.667H$ 的湍流强度分布.与标准 $k-\epsilon$ 模型相比,本文使用的色散模型也有了相当显著的改善.

如图10所示,本文使用湍流色散模型与标准 $k-\epsilon$ 模型耦合,分别计算了平板边界层流动和平面后台阶流动,结合实验数据、理论分析以及与其他

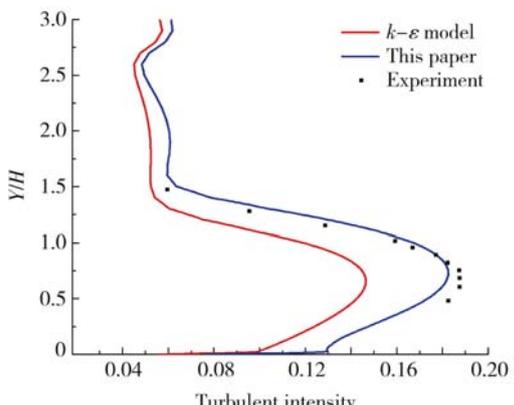
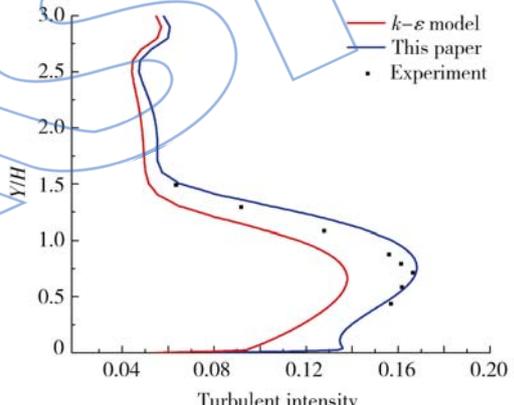
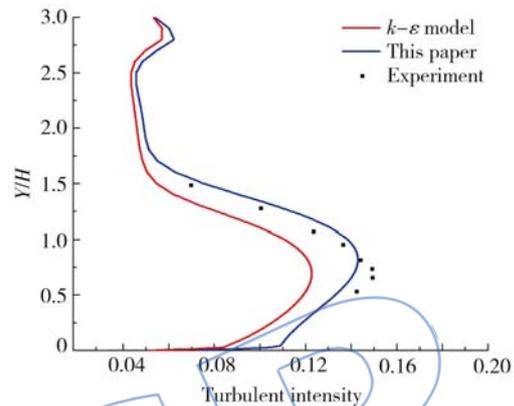


图10 湍流强度分布图
Fig. 10 Turbulence intensity profiles

5 结 论

1) 湍流是耗散与色散相互作用的物理过程, 应该使用可以同时反映耗散和色散机制的 KdV-Burgers 方程来代替只可以反映耗散机制的 Burgers 方程.

2) 利用线性的 Boussinesq 假设计算雷诺应力有较大误差, 引入色散系数对其修正后, 得到湍流的色散模型. 可将其与传统的线性模型相结合, 有望显著提高计算精度.

3) 色散系数是决定湍流能量传递方向的关键因素. 湍流运动在耗散和正色散的相互作用下, 呈现湍涡级联散裂, 能量正向传递; 在耗散和负色散的相互作用下, 若满足

$$\nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} < 0$$

则发生能量逆转.

4) 经过与实验数据及标准 $k-\epsilon$ 模型相比较, 验证了本文提出的湍流色散模型的可信性和优越性. 本文提出的湍流色散模型因其并不是根据某种特定流动状态建立, 而是从物理实际出发, 深刻揭示并描述了广泛存在于湍流运动中的色散现象, 所以在模拟湍流流场时可以给出更加精确的结果, 而且这种显著的改善效果, 原则上在其与任意湍流模型耦合时都可以实现.

参考文献:

- [1] Frisch U. Turbulence[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
- [2] Yih C S. Fluid mechanics [M]. New York: McGraw-Hill, 1969.
- [3] Burgers J M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence[J]. Advances in Applied Mechanics, 1948, 1: 171-199.
- [4] Starr V P. Physics of negative viscosity phenomena[M]. New York: McGraw-Hill, 1968.
- [5] Lin C C. Galaxies, turbulence, and plasmas[C]// Proceedings of the Second Asian Congress of Fluid Mechanics. Beijing: Science Press, 1983: 1-3.
- [6] 高歌. 湍流的耗散及弥散相互作用理论[J]. 中国科学: A 辑, 1985(5): 457-465.
- [7] 管克英, 高歌. Burgers-K-dV 混合型方程行波解的定性分析[J]. 中国科学: A 辑, 1987(1): 64-73.
- [8] Pope S B. A more general elective viscosity hypothesis[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1975, 72(2): 331-340.
- [9] Gatski T B, Speziale C G. On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1993, 254: 59-78.
- [10] Jongen T, Gatski T B. General explicit algebraic stress relations and best approximation for three-dimensional flows [J]. International Journal of Engineering Science, 1998, 36 (7/8): 739-763.
- [11] Rumsey C L, Gatski T B. Summary of EASM models in CFL3D with validation test cases[R]. NASA/TM-2003-212431, 2003.
- [12] Menter F R, Egorov Y. A scale-adaptive simulation model using two-equation models [R]. AIAA Paper 2005-1095, 2005.
- [13] 张兆顺, 崔桂香, 许春晓. 湍流理论与模拟[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.
- [14] Wilcox D C. Turbulence modeling for CFD[M]. California: DCW Industries, 2006.
- [15] Wiegardt K, Tillmann W. On the turbulent friction layer for rising pressure[R]. NACA/TM1314, 1951.
- [16] Kim J, Kline S J, Johnston J P. Investigation of a reattaching turbulent shear layer: flow over a backward-facing step [J]. Journal of Fluid Engineering, 1980, 102(3): 41-48.
- [17] Thangam S, Speziale C G. Turbulent separated flow past a backward-facing step: a critical evaluation of two-equation turbulence models [J]. AIAA Journal, 1992, 30 (5): 1314-1320.