

文章编号:1000-8055(2013)03-0525-06

# 碳纤维增强点阵夹芯结构的屈曲强度

张磊, 邱志平

(北京航空航天大学 航空科学与工程学院, 北京 100191)

**摘 要:** 考虑到点阵芯层的结构形式及杆单元以拉压为主的变形模式, 基于连续介质等效理论, 提出了一种全新的位移场假设, 并以此编写了计算点阵夹芯复合材料屈曲强度的有限元程序. 通过与不同试样的压缩试验的比较, 对碳纤维增强点阵夹芯结构的屈曲行为进行了分析, 并且验证了程序的有效性. 同时, 采用程序, 讨论了点阵参数(包括杆单元长度、半径及倾斜角)对点阵夹芯复合材料结构屈曲强度的影响规律. 结果表明: 芯层体积分数相同的情况下, 金字塔型和四面体型点阵夹芯结构的屈曲强度相差不大, 后者略高. 所得结论对点阵夹芯复合材料结构设计具有一定的指导意义.

**关键词:** 碳纤维增强; 点阵夹芯结构; 屈曲强度分析; 位移场假设; 有限单元法

中图分类号: V231.9; TB332

文献标志码: A

## Buckling of lattice truss cores sandwich structures with carbon fiber reinforced

ZHANG Lei, QIU Zhi-ping

(School of Aeronautic Science and Engineering,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

**Abstract:** Considering the geometrical configuration of the structure and the deformation mode of the lattice truss, a new displacement field assumption was proposed based on the equivalent continuum theory, and finite element method program was prepared for buckling analysis of lattice truss-core composites. By comparing with the compression test of a group of samples, the buckling behavior of sandwich structures with carbon fiber reinforced lattice truss cores was studied, and the validity was affirmed. Furthermore, the relationship between the buckling load of lattice truss-core composites and lattice parameters (including length, radius and angle of lattice truss) was discussed. The results demonstrate that the little difference exists in bulking load between pyramidal and tetrahedral lattice truss sandwich structures when the volume fraction of the cores are the same, the latter is a little higher. The conclusions are meaningful for the design of lattice truss-core composites.

**Key words:** carbon fiber reinforced; lattice truss cores sandwich structure; buckling analysis; displacement field assumption; finite element method

点阵结构是一种通过模拟分子点阵构型而设计出来的新型结构形式, 点阵夹芯复合材料具备轻质、高强、可控的优化设计能力等优点, 已经成

为 21 世纪前沿热点研究的材料之一, 并开始应用于航天以及卫星结构中.

目前对点阵结构的研究主要集中在制造工

收稿日期: 2012-03-21

网络出版地址: [http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2297.V.20130326.1743.201303.525\\_008.html](http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2297.V.20130326.1743.201303.525_008.html)

基金项目: 国家自然科学基金重大研究计划(90816024); 高等学校学科创新引智计划(B07009)

作者简介: 张磊(1982-), 男, 安徽蚌埠人, 博士生, 主要从事多功能复合材料夹芯结构研究. E-mail: zhanglei\_buaa@gmail.com

艺<sup>[1-4]</sup>、刚度<sup>[3,5-6]</sup>以及强度等方面.文献[7]指出,由于杆单元的长细比以及材料脆性特征的不同,承受面外平压载荷时的点阵材料应力-应变曲线存在刚塑性屈服、致密化屈服以及脆性破坏等三种模式.文献[1-3,8-10]中采用试验方法分别对金属及碳纤维点阵材料的屈服平台进行了研究. Deshpande 等<sup>[1]</sup>、范华林<sup>[3]</sup>及 Mohr<sup>[11]</sup>分别基于 Hill 公式、连续介质等效理论和点阵胞元拉压变形机制,提出了点阵材料屈服面的理论计算方法. Li 等<sup>[12]</sup>通过试验发现,当点阵材料承受面内压缩载荷时,点阵夹芯复合材料的破坏分为以下 4 种模式:欧拉屈曲、剪切屈曲、面板皱曲以及杆单元的坍塌,其中前两种都属于整体屈曲的范畴,且是一种重要的结构破坏模式.文中分别采用文献[12]中的估算公式以及 ABAQUS 商用软件计算了不同参数下的点阵夹芯复合材料的整体屈曲强度,并且与试验结果进行了对比.由于文献[12]中的估算公式<sup>[13]</sup>不能考虑面板与点阵芯层之间的相互作用,所以得到的计算结果精度较低;通过建立点阵复合材料有限元模型的方法虽然可以得到精度相对较高的计算结果,但是建模过程复杂且计算效率不高.

本文针对点阵夹芯复合材料厚度较大,面板与芯层刚度相差较大的特点,提出了基于逐层理论(layer-wise theory, LWT)的位移场假设,并且编制了计算碳纤维增强点阵夹芯结构整体屈曲强度的有限元程序.与试验结果的对比显示,本文程序的计算精度及效率均较高;利用该程序讨论了点阵夹芯复合材料屈曲强度随芯层杆单元长度、半径及杆单元倾斜角度等结构参数的变化规律,所得结论对点阵夹芯复合材料结构设计具有一定的指导意义.

## 1 基于逐层理论的有限元方法

### 1.1 位移场

如图 1(a)所示的点阵夹芯复合材料结构,其面板及芯层厚度分别为  $h_f$  和  $h_c$ ,长度为  $b$ ,宽度为  $a$ .点阵芯层的结构形式复杂,本文基于连续介质等效理论,将芯层等效为刚度相同的连续介质(如图 1(b)中所示).建立如图 1(b)中所示的总体坐标系,坐标系原点位于芯层中面,分别用  $u, v, w$  表示  $x, y, z$  轴方向上的位移.将夹芯板在厚度方向上分为上、下面板及芯层三部分,并分别用 I, III 与 II 表示.

由于点阵芯层与面板的刚度及厚度相差较

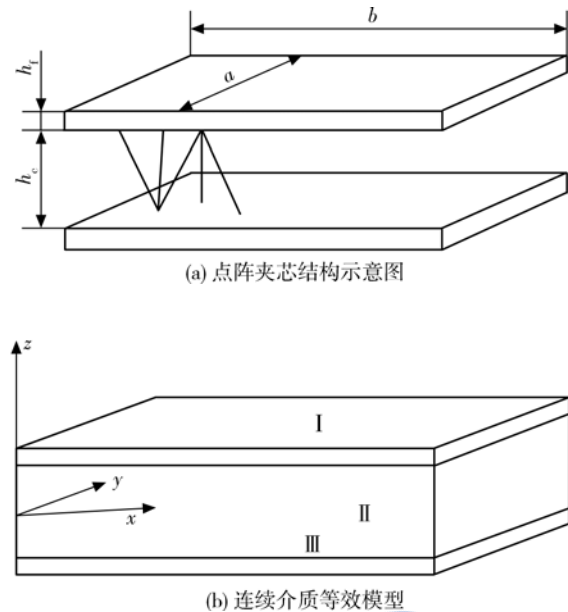


图 1 点阵夹芯复合材料示意图及其总体坐标系  
Fig. 1 Schematic of lattice truss cores sandwich structure and global coordinate system

大,用单一的连续函数已不能足够精确地描述夹芯板在厚度方向上的位移场,所以本文基于逐层理论,假设位移  $u, v$  在各部分中沿厚度坐标  $z$  呈线性变化;由于面板厚度相对较薄,本文忽略其厚度方向的应变  $\epsilon_z$ ;另一方面,点阵芯层中各杆单元与  $z$  坐标夹角(以  $\alpha$  表示)不为 0,位移  $w$  与  $u, v$  之间相互耦合,芯层的应变  $\epsilon_z$  不可忽略,综合以上考虑,假设各部分的位移场如式(1)中所示.

$$\begin{aligned}
 u &= \begin{cases} \text{I} : u_0 + h_c \varphi_{x\text{II}} / 2 + (z - h_c / 2) \varphi_{x\text{I}} \\ \text{II} : u_0 + z \varphi_{x\text{II}} \\ \text{III} : u_0 - h_c \varphi_{x\text{II}} / 2 + (z + h_c / 2) \varphi_{x\text{III}} \end{cases} \\
 v &= \begin{cases} \text{I} : v_0 + h_c \varphi_{y\text{II}} / 2 + (z - h_c / 2) \varphi_{y\text{I}} \\ \text{II} : v_0 + z \varphi_{y\text{II}} \\ \text{III} : v_0 - h_c \varphi_{y\text{II}} / 2 + (z + h_c / 2) \varphi_{y\text{III}} \end{cases} \\
 w &= \begin{cases} \text{I} : w_0 + h_c \varphi_z / 2 \\ \text{II} : w_0 + z \varphi_z \\ \text{III} : w_0 - h_c \varphi_z / 2 \end{cases}
 \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $u_0, v_0, w_0$  表示芯层中面的位移,  $\varphi_{xi}$  与  $\varphi_{yi}$  ( $i = \text{I}, \text{II}, \text{III}$ ) 分别表示位移  $u, v$  在各部分中的沿厚度方向的变化率,  $\varphi_z$  表示位移  $w$  在 II 中沿厚度方向的变化率.基于式(1)编制点阵夹芯复合材料的等效板单元,每个单元节点具有 10 个自由度,用向量表示为  $[u_0 \ v_0 \ w_0 \ \varphi_{x\text{I}} \ \varphi_{x\text{II}} \ \varphi_{x\text{III}} \ \varphi_{y\text{I}} \ \varphi_{y\text{II}} \ \varphi_{y\text{III}} \ \varphi_z]$ .

### 1.2 点阵芯层材料刚阵

点阵材料是由结点和连接结点杆件单元所组成的周期性结构材料. 杆件单元为形状规则的直杆, 胞元按周期性排列. 本文选取四面体型与金字塔型(如图 2 中所示)两种常见点阵结构形式进行讨论.

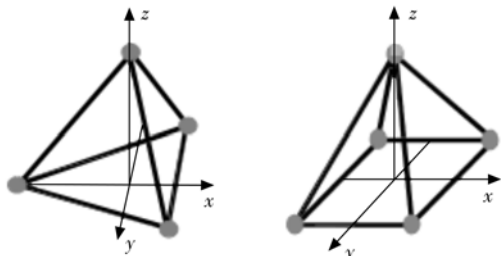


图 2 四面体和金字塔型点阵胞元示意图  
Fig. 2 Schematic of tetrahedral and pyramidal lattice truss cores

点阵结构满足平面拉伸主导型几何构型, 杆件单元受力以轴向力为主, 每根杆件单元只产生轴向变形与轴向应力. 将点阵胞元等效为连续介质典型单元, 则单元受正应力和剪应力作用. 在连续介质典型单元体系下设立整体坐标系, 通过杆件单元的局部坐标系与整体坐标系之间的转换关系, 可以得到计算点阵结构的等效连续介质刚度矩阵<sup>[3]</sup>.

点阵材料由  $n$  组方向不同的连续杆单元组成, 其中第  $i$  组单元的轴向变形为  $\epsilon_i$ , 轴向力为  $f_i$ , 则杆单元的变形矩阵  $\boldsymbol{\epsilon}' = [\epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \dots \ \epsilon_n]$ , 轴向力矩阵  $\boldsymbol{f}' = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_n]$ , 且满足

$$\boldsymbol{f}' = \mathbf{R}_N \boldsymbol{\epsilon}' \quad (2)$$

其中

$$\mathbf{R}_N = \begin{bmatrix} r_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & r_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & r_N \end{bmatrix}, \quad r_i = \frac{EA_i}{S_i} \quad (3)$$

式中  $E$  为杆单元的弹性模量,  $A_i$  是第  $i$  组杆单元的截面积,  $S_i$  第  $i$  组杆单元为每根杆件所占据的空间面积.

等效连续介质应力与应变与  $\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{f}$  之间存在如下转换关系:

$$\boldsymbol{\epsilon}' = \mathbf{G}_e \boldsymbol{\epsilon}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{G}_e^T \boldsymbol{f}' \quad (4)$$

式中  $\mathbf{G}_e$  为应变转换矩阵.

将式(4)代入式(2)中, 得到主坐标轴下的应

力应变关系和等效刚度矩阵  $\mathbf{C}$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{G}^T \boldsymbol{f}' = \mathbf{G}^T \mathbf{R}_N \boldsymbol{\epsilon}' = \mathbf{G}^T \mathbf{R}_N \mathbf{G}_e \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon} \quad (5)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{G}^T \mathbf{R}_N \mathbf{G}_e$$

### 1.3 刚度矩阵

采用 4 节点 Hermit 单元<sup>[14]</sup>, 得到单元的刚度矩阵为

$$\mathbf{K}^e = \sum_{k=I, II, III} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}'^T \mathbf{C}_k \mathbf{B}' | \mathbf{J}' | \frac{h_k}{h} d\xi d\eta d\zeta_k \quad (6)$$

其中  $\mathbf{B}'$  为面板与芯层局部坐标系中的应变转换矩阵<sup>[15]</sup>,  $\mathbf{J}'$  为雅克比矩阵,  $h$  为材料厚度,  $\mathbf{C}_k, h_k$  分别为第  $k$  层的材料刚度矩阵及厚度.  $\xi, \eta, \zeta$  为坐标. 类似地, 可以得到几何刚度矩阵为

$$\mathbf{K}_g^e = \sum_{k=I, II, III} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}'^T \boldsymbol{\sigma}_k \mathbf{N}' | \mathbf{J}' | \frac{h_k}{h} d\xi d\eta d\zeta_k \quad (7)$$

其中  $\mathbf{N}'$  为各单层局部坐标系中的位移插值矩阵,  $\boldsymbol{\sigma}_k$  为在夹芯板上施加单位应力时得到的第  $k$  层上的初应力向量. 分别集成  $\mathbf{K}^e$  与  $\mathbf{K}_g^e$  可以得到整体刚度矩阵  $\mathbf{K}$  以及整体几何矩阵  $\mathbf{K}_g$ , 求解下面特征值方程

$$(\mathbf{K} + \lambda \mathbf{K}_g) \boldsymbol{\psi} = 0 \quad (8)$$

并取最小特征值作为结构的屈曲应力  $s_b = \lambda_{\min}$ ,  $\boldsymbol{\psi}$  为特征向量, 屈曲载荷为  $P_b = (2h_f + h_c) s_b$ .

## 2 有限元分析

### 2.1 有效性验证

采用一体化成型工艺制造不同尺寸的点阵夹芯复合材料板, 可通过试验方法得到各自的屈曲强度<sup>[12]</sup>. 面板和芯层杆单元都采用 T700/3234, 其材料参数为  $E_{11} = 110 \text{ GPa}, E_{22} = E_{33} = 8.7 \text{ GPa}, G_{12} = G_{13} = 4.0 \text{ GPa}, G_{23} = 4.0 \text{ GPa}, \nu_{12} = \nu_{13} = 0.32, \nu_{23} = 0.3$  (1, 2, 3 分别表示面内纤维纵向、横向及面外方向).

在制造过程中, 点阵芯层杆单元嵌入复合材料面板, 造成面板中部分纤维的破坏, 使得面板刚度性能的降低, 同时也降低了芯层的刚度性能. 通过对经过复合以后的复合材料面板及点阵芯层进行压缩试验<sup>[12]</sup>, 发现面板的  $E_{xx}$  由 76.1 GPa (经典层合板理论计算结果) 下降为 47.75 GPa, 芯层的面外切变模量  $G_{xz}$  由 168 MPa (式(5)计算结果) 减小为 42.5 MPa. 为考虑制造过程造成的材料刚度损失, 在缺少其他方向模量损失数据的情况下, 本文分别将面板、点阵芯层的各方向模量折减

为经典层合板理论及式(5)计算结果的62.7% (47.75/76.1), 25.3% (42.5/168).

另一方面,如图3中所示,点阵芯层不能充满复合材料面板在  $x-y$  平面内所占的全部区域. 本文试样的复合材料面板及点阵芯层的宽分别为  $a=100\text{ mm}$ ,  $a'=75.4\text{ mm}$ . 为了考虑未填充芯层对结构刚度的影响,基于体积平均法,将考虑刚度损失后的芯层模量乘以75.4%作为等效连续芯层的模量.

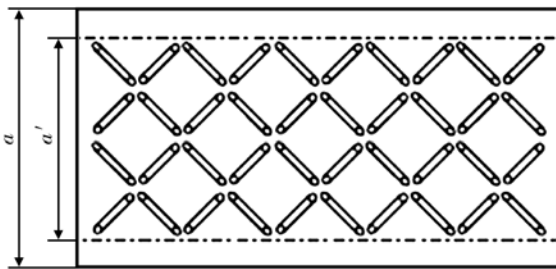


图3 面板及芯层宽度示意图

Fig. 3 Schematic illustration of different width of face-sheet and core

文献[12]中3件试样的编号分别为b, c和d, 试样的点阵杆单元的半径  $r=1.25\text{ mm}$ , 长度为  $l=21.2\text{ mm}$ , 杆单元倾斜角  $\omega=45^\circ$ , 试样面板铺层方式及其他参数如表1中所示. 采用Instron5569万能力学试验机, 在边界  $x=0, b$  上施加压缩载荷, 加载速率为  $1\text{ mm/min}$ , 采用如下双固支(CF-CF, C-Clamped, F-Free)边界条件:

$$\begin{aligned} \omega_b = \omega_b = \varphi_{xI} = \varphi_{xII} = \varphi_{xIII} = \varphi_{yI} = \\ \varphi_{yII} = \varphi_{yIII} = \varphi_z \\ (x = 0, b) \end{aligned} \quad (9)$$

得到试样b, c与d的位移-载荷曲线如图4所示[12].

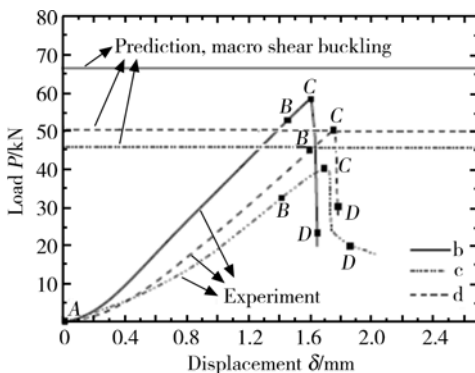


图4 试样压缩位移-载荷曲线

Fig. 4 Measured load-displacement curve of sandwich column specimen

当载荷较小时,主要由复合材料面板承受压缩载荷,随着载荷的增加,三件试样首先发生整体屈曲(图4中B点),试样发生弯曲,芯层承受的载荷相对增加,整个夹芯结构继续承载,直到结构发生失效(图4中C点). 采用本文程序计算得到各试样的屈曲载荷  $P_b$ , 表1中给出  $P_b$  与图4中B点对应试验结果  $P_{ex}$  的对比情况, 表中还给出了文献[12]中的理论值  $P_{cr}^{[13]}$  及 ABAQUS 商用有限元软件计算值  $P_{aba}$ . 可以发现:与文献值相比, 本文结果更加接近于试验结果, 精度较高, 从而本程序的有效性得到验证.

表1 本文计算结果与试验结果的对比

Table 1 Comparison of results obtained by presented method with test results

试样编号	b	c	d
面板铺层	$[0/90/0]_8$	$[0/90/0]_5$	$[0/90]_{12}$
$h_f/\text{mm}$	2.50	1.63	2.52
$b/\text{mm}$	148	264	264
$P_{ex}/\text{kN}$	52.66	32.11	45.72
$P_{aba}/\text{kN}$	64.8	44.2	48.9
$P_{cr}/\text{kN}$	66.68	45.78	50.24
$P_b/\text{kN}$	56.13	35.21	47.84

### 2.2 点阵参数对屈曲强度的影响

点阵芯层是点阵复合材料夹芯结构区别于其他夹芯结构的重要特征之一. 点阵结构参数如杆单元长度  $l$ 、半径  $r$  及倾斜角  $\omega$  的改变会直接导致夹芯结构力学性能的变化.

假设复合材料面板的铺层方式为  $[0/90/0]_8$ ,  $b=148\text{ mm}$ , 面板厚度  $h_f=2.5\text{ mm}$ , 其他参数如上文所述, 计算得到不同杆单元长度  $l$  情况下的夹芯结构屈曲应力  $\sigma_b$  及屈曲载荷  $P_b$ , 结果如图5中所示(为了和下文结果作对比, 横坐标为点阵芯层的相对密度). 由图可知, 当点阵体积分数相同的情况下, 金字塔型及四面体型点阵夹芯结构的屈曲强度相差不大, 从数值上看, 后者的屈曲强度略大; 另一方面, 随着相对密度的增加,  $l$  逐渐减小, 在倾斜角  $\omega$  不变的情况下, 芯层厚度  $h_c$  逐渐减小, 夹芯结构的弯曲刚度变小, 所以其屈曲应力  $\sigma_b$  及屈曲载荷  $P_b$  都表现出减小的趋势. 图5说明, 增加  $l$  的大小, 减小点阵体积分数可以提高点阵夹芯结构的整体屈曲强度, 但是杆单元长度过大, 面板与芯层的厚度比减小, 会导致杆单元发生



欧拉屈曲,并且降低复合材料面板抵抗局部皱曲的性能<sup>[12]</sup>.

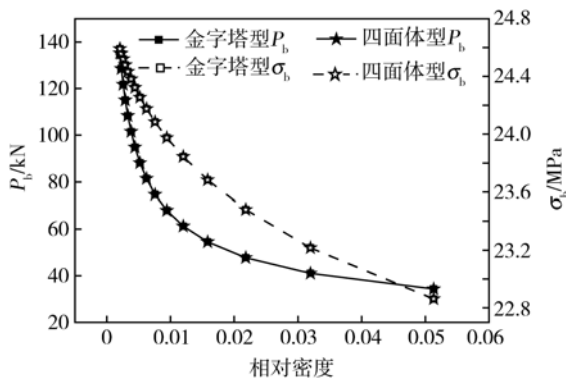


图 5 夹芯结构屈曲强度随相对密度变化曲线 (只有杆单元长度  $l$  变化)

Fig. 5 Bulking load of sandwich structure versus relative density (only variation in bar element length  $l$ )

假设杆单元半径  $r$  发生变化,其他参数不变,得到不同点阵芯层相对密度情况下的结构屈曲应力  $\sigma_b$  及屈曲载荷  $P_b$ ,结果如图 6 中所示.由图可知,与上文结果类似的是,四面体型点阵夹芯结构的屈曲强度略高于金字塔型点阵夹芯结构,但是相差不大;随着相对密度的增加,杆单元半径  $r$  增加,但是结构的屈曲强度变化不大,这是由于芯层刚度远远小于复合材料面板的刚度,改变  $r$  导致的芯层刚度变化对整个夹芯结构刚度的影响可以忽略,所以结构的屈曲强度变化不大.但是,增加杆单元的半径将会提高杆单元的强度,从而提高结构的静强度及局部屈曲强度等性能.

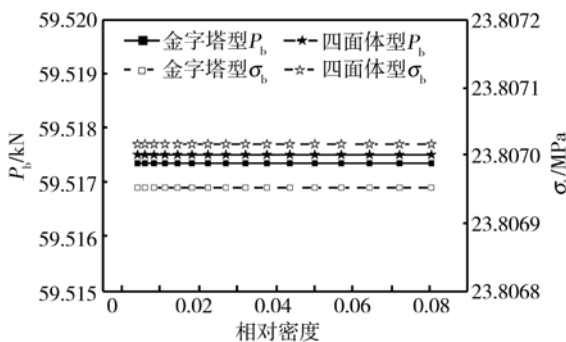


图 6 夹芯结构屈曲强度随相对密度变化曲线 (只有杆单元半径  $r$  变化)

Fig. 6 Bulking load of sandwich structure versus relative density (only variation in bar element radius  $r$ )

假设杆单元倾斜角  $\omega$  发生变化,其他参数不变,得到不同点阵芯层相对密度情况下的结构屈曲强度,结果如图 7 中所示.从图中可以发现,随着相对密度的增加,杆单元倾斜角逐渐增大,芯层刚度的变化较大,特别是面内拉伸刚度及面外剪切刚度逐渐减小,导致夹芯结构弯曲刚度的减小,所以屈曲强度减小,但是如上文所述,芯层刚度的变化对夹芯结构的整体刚度影响较小,所以屈曲强度的减小幅值并不大.

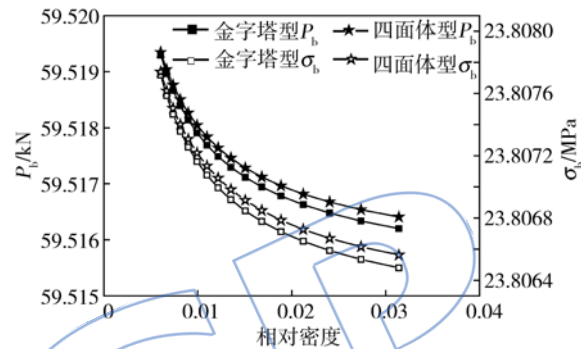


图 7 夹芯结构屈曲强度随相对密度变化曲线 (只有杆单元倾斜角  $\omega$  变化)

Fig. 7 Bulking load of sandwich structure versus relative density (only variation in bar element angle  $\omega$ )

### 3 结 论

本文针对点阵夹芯复合材料的结构形式及变形特点,采用连续介质等效理论,对夹芯结构的位移场进行了假设,并依此编写了计算结构整体屈曲强度的有限元程序.通过对不同结构参数的试样进行试验,分析了点阵夹芯复合材料的屈曲行为,并验证了本文有限元程序的有效性,得到如下主要结论:

- 1) 由于点阵芯层的承载能力得以体现,夹芯结构在发生整体屈曲以后,还可以继续承载.
- 2) 芯层体积分数相同的情况下,金字塔型和四面体型点阵夹芯结构的屈曲强度相差不大,后者略高.
- 3) 在本文所设参数下,随着杆单元长度  $l$  的增加或倾斜角  $\omega$  的减小,夹芯结构屈曲强度逐渐增加,其中  $l$  对屈曲强度的影响最显著;杆单元半径  $r$  对屈曲强度的影响不大.

### 参 考 文 献:

[1] Deshpande V S, Fleck N A, Ashby M F. Effective proper-

- ties of the octet-truss lattice material[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2001, 49(8): 1747-1769.
- [2] Wallach J C, Gibson L J. Mechanical behavior of a three-dimensional truss material[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, 38(40/41): 7181-7196.
- [3] 范华林. 碳纤维点阵复合材料制备及其性能研究[D]. 北京: 清华大学, 2006.  
FAN Hualin. Manufacturing and properties of lattice composite materials[D]. Beijing: Tsinghua University, 2006. (in Chinese)
- [4] 王兵, 吴林志, 杜善义, 等. 碳纤维增强金字塔点阵夹芯结构的抗压性能[J]. *复合材料学报*, 2010, 27(1): 133-138.  
WANG Bing, WU Linzhi, DU Shanyi, et al. Compressive behavior of sandwich structures with carbonfiber reinforced pyramidal latticetruss cores [J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2010, 27(1): 133-138. (in Chinese)
- [5] Deshpande V S, Fleck N A. Collapse of truss core sandwich beams in 3-point bending[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, 38(36/37): 6275-6305.
- [6] Chen J Y, Huang Y, Ortiz M. Fracture analysis of cellular materials: a strain gradient model[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1998, 46(5): 789-828.
- [7] 范华林, 杨卫. 轻质高弱点阵材料及其力学性能研究进展[J]. *力学进展*, 2007, 37(1): 99-112.  
FAN Huatin, YANG Wei. Development of lattice materials with high specific stiffness and strength[J]. *Advance in Mechanics*, 2007, 37(1): 99-112. (in Chinese)
- [8] Zhou J, Shrotiriya P, Soboyejo W O. On the deformation of aluminum lattice block structures from struts to structures [J]. *Mechanics of Materials*, 2004, 36(8): 723-737.
- [9] Wang A J, McDowell D L. In-plane stiffness and yield strength of periodic metal honeycombs[J]. *ASME Journal of Engineering Materials and Technology*, 2004, 126(2): 137-156.
- [10] Kooistra G W, Deshpande V S, Wadley H N G. Compressive behaviour of age hardenable tetrahedral lattice truss structures made from aluminium[J]. *Acta Materials*, 2004, 52(14): 4229-4237.
- [11] Mohr D. Mechanism-based multi-surface plasticity model for ideal truss lattice materials[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, 42(11/12): 3235-3260.
- [12] Li M, Wu L Z, Ma L, et al. Structural response of all-composite pyramidal truss core sandwich columns in end compression[J]. *Composite Structures*, 2011, 93(8): 1964-1972.
- [13] Allen H G. Analysis and design of structural sandwich panels[M]. Oxford: Pergamon Press, 1969: 15-21.
- [14] 王勖成, 邵敏. 有限单元法基本原理和数值方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 1997.
- [15] Panda S, Natarajan R. Analysis of laminates composite shell structures by finite element method [J]. *Computers and Structures*, 1981, 14(3/4): 225-230.