

基于局部移动 Kriging 无网格方法的层合板自由振动分析

陈富军¹, 魏春志¹, 姚林泉^{*1,2}

(1. 苏州大学 数学科学学院, 苏州 215006; 2. 苏州大学 城市轨道交通学院, 苏州 215006)

摘要:利用基于局部移动 Kriging 插值无网格法对层合板自由振动进行了数值分析, 基于一阶剪切层合理论导出了层合板振动的控制方程和边界条件, 进一步得到了自由振动的离散化特征方程。由于 Kriging 插值函数具有 Kronecker delta 函数性质, 可以直接施加本质边界条件。通过本文给出的方法, 对不同边界条件、不同跨厚比、不同材料参数和铺设角度的层合板的振动频率进行了计算, 均得到满意结果。最后用该方法对层合板的铺设角度进行优化设计, 得到了与已有文献完全一致的优化结果。数值结果充分表明了无网格 Kriging 方法分析层合板自由振动问题的有效性和高精度。

关键词:无网格法; 层合板; 局部 Kriging 插值; 自由振动

中图分类号:O242; O343 **文献标志码:**A **doi:**10.7511/jslx201304018

1 引言

复合材料是一种十分重要的工程材料, 在许多复杂工程结构中有很好的应用前景。现有的层合板理论中主要有经典的层合板理论和剪切形变层合板理论^[1], 经典层合板理论忽略了横向剪切形变, 而层合板的一阶剪切理论考虑横向剪切形变, 对大部分结构能得到令人满意的结果。

有限元法作为十分成熟的方法已经广泛应用于层合板的动力问题分析^[2]。然而, 近 20 多年来, 一种新的解决偏微分问题的有效数值方法——无网格法被提出并迅速发展。它不需要划分网格, 而是把问题域离散成一系列节点使得对问题的前处理过程变得简单; 特别在涉及网格畸变、网格移动和不定边界问题中显示出明显的优势。无网格法目前已有数十种之多, 其中无网格 Galerkin 法^[3]和 Petrov Galerkin 法^[4]是最常用的两种无网格法。他们都是利用移动最小二乘 (MLS) 近似构造形函数。由于 MLS 形函数不具有 Kronecker delta 函数性质, 不易直接施加本质边界条件, 需要进行特殊处理。

目前, 已有再生核离子法 RKPM (Reproducing Kernel Particle Method), 局部 Petrov-Galerkin 法

MLPG (Meshless Local Petrov-Galerkin Method) 和无单元 Galerkin 法 EFG (The Element-Free Galerkin Method) 等无网格法应用于层合板的静力、动力问题分析。在动力问题方面 Ferreira 等^[5]用径向基函数法分析了复合材料层合板的振动问题; Liew, Huang 和 Reddy^[6]用移动最小二乘微分积分法分析了对称层合板的自由振动; Song Xiang 等^[7]采用局部径向点插值法分析了层合板的自由振动问题。最近, Gu^[8]提出了基于 Kriging 插值的新无网格数值方法, 并用这种方法解决了简单的热传导问题。随后, 这种无网格方法用于二维固体和板壳结构分析^[9-14], 结构振动分析^[13-15]和压电问题^[16]中。Kriging 插值与径向基函数插值之间有很多相似之处。他们虽然构造方法不一样, 但结构十分相似。这两种方法构造的形函数都具有 Kronecker delta 性质, 便于施加本质边界条件。此外, Kriging 插值的形函数还具有完备性, 可大大提高计算精度。

鉴于 Kriging 插值的优越性, 利用 Kriging 插值方法分析板的振动问题已有报道, 但它们仅仅计算分析了基于经典理论的层合板结构^[14]或基于一阶剪切理论的单层板^[13]。而基于一阶剪切理论的层合板振动问题尚未见报道。本文将无网格移动 Kriging 法应用于基于一阶剪切理论层合板的自由振动问题, 进一步扩展该方法的应用领域。在离散偏微分方程方面, 本文采用配点法对控制方程和边

收稿日期: 2012-03-15; 修改稿收到日期: 2012-06-20.

基金项目: 国家自然科学基金 (11172192) 资助项目.

作者简介: 姚林泉* (1961-), 男, 教授, 博士生导师
(E-mail: lqyao@suda.edu.cn).

界条件离散,得到离散的动力学方程。然后,求出层合板结构动力学问题的频率。

2 层合板振动控制方程

考虑图 1 所示的纤维增强复合材料层合板,在笛卡尔坐标系中取板的中面为 x - y 平面。设板厚度为 h , 在任一时刻 t , 板内任一点变形后沿 x, y, z 轴的位移分量记为 $u(x, y, z, t), v(x, y, z, t)$ 和 $w(x, y, z, t)$ 。因此,基于一阶剪切理论三个位移分量可表示为

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \end{cases} \quad (1)$$

式中 u_0, v_0, w_0 分别为中面 ($z=0$) 内沿 x, y, z 轴方向的位移, ϕ_x 和 ϕ_y 为横向法线关于 y 和 x 轴方向的转角。

记微分算子及位移向量为

$$\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{Bmatrix}, \bar{\Phi} = \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix}$$

由式(1)得应变-位移关系:

$$\begin{cases} \{\epsilon_x \ \epsilon_y \ \gamma_{xy}\}^T = \boldsymbol{\epsilon}_0 + z\boldsymbol{\kappa} \\ \{\gamma_{xz} \ \gamma_{yz}\}^T = \mathbf{L}_1 \bar{\boldsymbol{\omega}}_0 + \bar{\Phi} \end{cases} \quad (2)$$

式中 $\boldsymbol{\epsilon}_0 = \mathbf{L}\bar{\mathbf{u}}$ 和 $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{L}\bar{\Phi}$ 为薄膜应变和曲率。

广义本构关系:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix}, \mathbf{Q}_s = \mathbf{A}_s \{\gamma_{xz} \ \gamma_{yz}\}^T \quad (3)$$

式中 $\mathbf{N} = \{N_x \ N_y \ N_{xy}\}^T, \mathbf{M} = \{M_x \ M_y \ M_{xy}\}^T, \mathbf{Q}_s = \{Q_x \ Q_y\}^T$ 分别为合力,合力矩和等效剪力向量; \mathbf{A} 为拉伸刚度矩阵, \mathbf{B} 为耦合刚度矩阵, \mathbf{D} 为弯曲刚度矩阵, \mathbf{A}_s 为剪切刚度矩阵,它们的元素分别

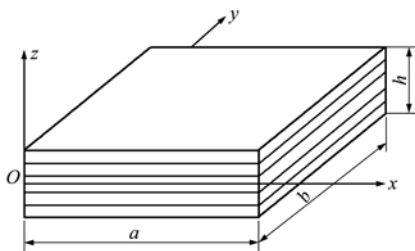


图 1 层合板的形状与坐标系

Fig. 1 Geometry and coordinates system of a laminated plate

表示为

$$\begin{aligned} (A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}(1, z, z^2) dz \\ &= \sum_{n=1}^N \int_{z_n}^{z_{n+1}} \bar{Q}_{ij}^{(n)}(1, z, z^2) dz \end{aligned} \quad (i, j = 1, 2, 6)$$

$$A_{s,ij} = k \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} dz = k \sum_{n=1}^N \int_{z_n}^{z_{n+1}} \bar{Q}_{ij}^{(n)} dz \quad (i, j = 4, 5)$$

式中 $\bar{Q}_{ij}^{(n)}$ 是第 n 层材料在物理坐标系 (x, y, z) 中的转换刚度系数(参见文献[1]), k 是剪切修正因子。

由虚位移原理得到基于一阶剪切理论层合板的平衡方程为^[1]

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^T \mathbf{N} &= \mathbf{I}_0 \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{I}_1 \ddot{\bar{\Phi}}, \mathbf{L}_1^T \mathbf{Q}_s + q = \mathbf{I}_0 \ddot{w}_0 \\ \mathbf{L}^T \mathbf{M} - \mathbf{Q}_s &= \mathbf{I}_1 \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{I}_2 \ddot{\bar{\Phi}} \end{aligned} \quad (4)$$

式中 $\{\mathbf{I}_0 \ \mathbf{I}_1 \ \mathbf{I}_2\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{1 \ z \ z^2\} \rho_0 dz$ 为惯性矩, ρ_0 为材料密度, $q = q(x, y, t)$ 横向分布力。

将几何关系(2)代入广义本构关系(3),然后,再代入平衡方程(4)得到用位移表示的平衡方程为

$$\mathbf{K}\mathbf{u} + \bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{F} \quad (5)$$

式中 $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}^T \mathbf{A} \mathbf{L} & 0 & \mathbf{L}^T \mathbf{B} \mathbf{L} \\ 0 & \mathbf{L}_1^T \mathbf{A}_s \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_1^T \mathbf{A}_s \\ \mathbf{L}^T \mathbf{B} \mathbf{L} & -\mathbf{A}_s \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L} - \mathbf{A}_s \end{bmatrix}$ 为 5×5 线性

对称微分算子矩阵, $\bar{\mathbf{M}} = -\begin{bmatrix} \mathbf{I}_0 \mathbf{I}_2 & 0 & \mathbf{I}_1 \mathbf{I}_2 \\ 0 & \mathbf{I}_0 & 0 \\ \mathbf{I}_1 \mathbf{I}_2 & 0 & \mathbf{I}_2 \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$ 为 5×5

对称质量矩阵, \mathbf{I}_2 为 2×2 阶单位矩阵, $\mathbf{u} = \{u_0, v_0, w_0, \phi_x, \phi_y\}^T$ 为广义位移向量, $\mathbf{F} = \{0 \ 0 \ q \ 0\}^T$ 为载荷向量。

矩形层合板常见的边界条件如下:

垂直于 x 轴的简支边: $u_0 = w_0 = \phi_y = N_{xy} = M_x = 0$

垂直于 y 轴的简支边: $v_0 = w_0 = \phi_x = N_{xy} = M_y = 0$

固支边: $u_0 = v_0 = w_0 = \phi_x = \phi_y = 0$

3 Kriging 插值形函数

对问题域内任一计算点 \mathbf{x} 处的场函数 $f(\mathbf{x})$ 可用 \mathbf{x} 局部支持域 Ω_x 内的 N 个节点处的场函数值 $\mathbf{f} = \{f_1, f_2, \dots, f_N\}^T (f_i = f(\mathbf{x}_i), i = 1, 2, \dots, N)$ 使用 Kriging 插值得到近似函数 $f^h(\mathbf{x})$ 为^[13]

$$f^h(\mathbf{x}) = (\mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A} + \mathbf{r}^T(\mathbf{x})\mathbf{B})\mathbf{f} = \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x})f_i \quad (6)$$

式中 $\phi_i(\mathbf{x})$ 为 Kriging 插值形函数即

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x})\mathbf{A}_{jI} + \sum_{k=1}^N r_k(\mathbf{x})\mathbf{B}_{kI} \quad (7)$$

矩阵 \mathbf{A}, \mathbf{B} 定义为

$$\mathbf{A} = (\mathbf{P}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{R}^{-1}, \mathbf{B} = \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{P} \mathbf{A}) \quad (8)$$

式中 \mathbf{I} 为 $N \times N$ 阶单位矩阵, $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ 是由 m 个多项式单基组成的列向量:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \{ p_1(\mathbf{x}) \quad p_2(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad p_m(\mathbf{x}) \}^T \quad (9)$$

\mathbf{P} 是由基函数式(9)形成的 $m \times N$ 阶矩阵即

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & p_2(\mathbf{x}_1) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_1) \\ p_1(\mathbf{x}_2) & p_2(\mathbf{x}_2) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\mathbf{x}_N) & p_2(\mathbf{x}_N) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_N) \end{bmatrix}_{N \times m}$$

\mathbf{R} 是对角线元素为 1 的对称相关矩阵即

$$\mathbf{R}[R(x_i, x_j)] = \begin{bmatrix} 1 & R(x_1, x_2) & \cdots & R(x_1, x_n) \\ R(x_2, x_1) & 1 & \cdots & R(x_2, x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R(x_n, x_1) & R(x_n, x_2) & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (10)$$

式中 $R(x_i, x_j)$ 为任意两点 x_i 与 x_j 之间的相关函数,可取如下的 Gaussian 函数:

$$R(x_i, x_j) = e^{-\theta r_{ij}^2} \quad (11)$$

式中 $r_{ij} = \|x_i - x_j\|, \theta > 0$ 为相关参数。

$\mathbf{r}(\mathbf{x})$ 为计算点 \mathbf{x} 与局部支撑域内 N 个节点的相关函数向量:

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \{ R(x_1, \mathbf{x}) \quad R(x_2, \mathbf{x}) \quad \cdots \quad R(x_N, \mathbf{x}) \}^T (1 \times N) \quad (12)$$

由式(7)可知,形函数 $\phi_j(\mathbf{x})$ 在节点 x_j 处为

$$\phi_j(\mathbf{x}_j) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}_j) A_{j1} + \sum_{k=1}^N r_k(\mathbf{x}_j) B_{k1} \quad J = 1, 2, \dots, N$$

将上式写成矩阵形式为

$$[\phi_j(\mathbf{x}_j)] = \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{R} \mathbf{B}$$

将式(8)中 \mathbf{B} 代入上式可得

$$[\phi_j(\mathbf{x}_j)] = \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{P} \mathbf{A}) = \mathbf{I}$$

即 $\phi_j(\mathbf{x}_j) = \delta_{1j}$ 。

因此, Kriging 插值形函数具有 δ 函数性质,计算时可直接施加边界条件。

设函数 $f(\mathbf{x})$ 由不超过 m 个多项式单基组成的多项式,则

$$f_I = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I) \boldsymbol{\alpha} \quad (I = 1, 2, \dots, N) \quad (13)$$

式中 $\boldsymbol{\alpha}$ 为任意系数,上式是精确满足的。上式写成矩阵形式即

$$\mathbf{f} = \mathbf{P} \boldsymbol{\alpha} \quad (14)$$

将式(14)代入近似插值函数式(6)可得

$$\begin{aligned} f^h(\mathbf{x}) &= (\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A} + \mathbf{r}^T(\mathbf{x}) \mathbf{B}) \mathbf{P} \boldsymbol{\alpha} \\ &= \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) (\mathbf{P}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P} \boldsymbol{\alpha} + \\ &\quad \mathbf{r}^T(\mathbf{x}) \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{P} (\mathbf{P}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{R}^{-1}) \mathbf{P} \boldsymbol{\alpha} \\ &= \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{r}^T(\mathbf{x}) \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{P} \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{P} \boldsymbol{\alpha}) \\ &= \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\alpha} = f(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

因而, Kriging 插值形函数具有完备性,可以完全重构基函数,可提高计算精度。特别地,如果基函数包含常数项及线性项,则可以精确重构线性多项式,即

$$\sum_I \phi_I(\mathbf{x}) = 1, \sum_I \phi_I(\mathbf{x}) x_I = x, \sum_I \phi_I(\mathbf{x}) y_I = y \quad (15)$$

4 离散控制方程

利用配点法对控制方程进行离散,对问题域内任一内部计算点 x_I , 利用移动 Kriging 插值近似式(6),得到在该点处的广义位移试函数为

$$u(x_I) \approx \mathbf{u}_I^h = \sum_{i=1}^N \phi_i \mathbf{u}_i = \boldsymbol{\Phi}_{(D)} \mathbf{U}_{(D)} \quad (16)$$

式中 $\mathbf{U}_{(D)} = [\mathbf{u}_1^T \quad \mathbf{u}_2^T \quad \cdots \quad \mathbf{u}_N^T]^T$ 为计算点 x_I 的支撑域内的总节点广义位移向量,而 $\mathbf{u}_i = \{ u_i \quad v_i \quad w_i \quad \phi_x \quad \phi_y \}^T$ 为节点 x_i 处的广义位移值, $\boldsymbol{\Phi}_{(D)} = [\mathbf{I} \phi_1 \quad \mathbf{I} \phi_2 \quad \cdots \quad \mathbf{I} \phi_N]$ 为形函数矩阵, \mathbf{I} 为 5×5 单位矩阵, ϕ_i 为节点 x_i 处的形函数, N 为计算点支撑域内的节点数。

将计算点 x_I 处的广义位移试函数式(16)及其导数代入控制方程(5)得到在该计算点处的无阻尼自由振动离散方程:

$$\mathbf{K}_{(D)} \boldsymbol{\Phi}_{(D)} \mathbf{U}_{(D)} + \bar{\mathbf{M}}_{(D)} \boldsymbol{\Phi}_{(D)} \ddot{\mathbf{U}}_{(D)} = 0 \quad (17)$$

上式仅仅表示计算点 x_I 处的离散方程,共有 5 个方程,涉及 x_I 支撑域内的 $5N$ 个局部广义节点未知量。设全体节点 n 的广义位移向量为 \mathbf{U}_n , 由方程(17)对问题域内的 n_1 个配点组合成的方程为

$$\mathbf{K}_a \mathbf{U}_n + \bar{\mathbf{M}}_a \ddot{\mathbf{U}}_n = 0 \quad (I = 1, 2, \dots, n_1) \quad (18)$$

式中 \mathbf{K}_a 和 $\bar{\mathbf{M}}_a$ 为 $n_1 \times n$ 矩阵。

对于边界点 x_j 将近似插值函数代入相应的边界条件可得离散后的边界条件,设为

$$\mathbf{K}_b \mathbf{U}_n = 0 \quad (19)$$

式中 \mathbf{K}_b 为 $n_2 \times n$ 矩阵, n_2 为边界上的配点数。

由方程(18,19)可组合写为

$$\tilde{\mathbf{K}} \mathbf{U}_n + \tilde{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{U}}_n = 0 \quad (20)$$

式中 $\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_a \\ \mathbf{K}_b \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_a \\ 0 \end{bmatrix}$ 。

式(20)即为利用 Kriging 插值近似配点无网格法的层合板无阻尼自由振动离散化控制方程。

假设振动为简谐振动,设方程(20)的解为

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{W} \sin \omega(t - t_0) \quad (21)$$

式中 \mathbf{W} 为振型函数, ω 为固有频率, t_0 为初始时间。将式(21)代入式(20)可得

$$\tilde{\mathbf{K}} \mathbf{W} - \tilde{\mathbf{M}} \omega^2 \mathbf{W} = \mathbf{0} \quad (22)$$

其中式(22)为广义特征方程,用子空间迭代法求解可确定 ω 和 \mathbf{W} 。

5 数值算例

为了使层合板的弯曲挠度具有较好的光滑性,本文采用二次多项式基函数,即 $p^T(\mathbf{x}) = [1 \ x \ y \ x^2 \ y^2 \ xy]$, 设层合板每层厚度相同,是由均匀线弹性复合材料构成。本文 x 方向和 y 方向的节点间距分别为 d_{cx} 和 d_{cy} , 局部影响域的大小是由 x 方向和 y 方向的 r_{ix} 和 r_{iy} 确定为 $r_{ix} = \alpha_s d_{cx}$, $r_{iy} = \alpha_s d_{cy}$, α_s 为控制局部影响域大小的控制参数。本文材料参数无特殊说明均为 $E_1/E_2 = (10, 20, 30, 40)$, $G_{12} = G_{13} = 0.6 E_2$, $G_{23} = 0.5 E_2$, $\nu_{12} = 0.25$, $\rho = 1$ 。

5.1 影响域大小对计算的影响

考虑四边简支对称层合方板(0/90/90/0), $a/h = 0.2$ 。采用 11×11 节点分布对不同的 α_s 及不同弹性模量比的材料对四层板进行数值计算,无量纲固有频率($\bar{\omega} = (\omega a^2/h) \sqrt{\rho/E_2}$) 计算结果列入表 1。由表 1 可知,当 $\alpha_s = 5$ 时,与精确解的近似程度最好。在其他算例中同样得到类似的结果,所以在后续算例中均取影响域控制参数为 $\alpha_s = 5$ 。

表 1 不同影响域(α_s)及弹性模量比(E_1/E_2)时四层层合板的固有频率($\bar{\omega}$)

Tab.1 The fundamental frequency ($\bar{\omega}$) of the 4-layer laminated plates with various influencing domains (α_s) and modulus of elasticity ratios (E_1/E_2)

E_1/E_2	$\alpha_s=4$	$\alpha_s=5$	$\alpha_s=6$	Exact ^[1]
10	8.362	8.297	8.328	8.298
20	9.634	9.574	9.603	9.567
30	10.392	10.336	10.364	10.326
40	10.920	10.866	10.892	10.854

5.2 对不同边界条件和不同边厚比的分析

考虑三层对称正交层合方板(0/90/0) 模量比为 $E_1/E_2 = 40$ 。表 2 给出了不同边界、不同边厚比的无量纲固有频率,并与一阶剪切理论的精确解^[1]和径向点插值配点法^[4]比较。表 2 中 SS 为四

表 2 不同边界条件及不同跨厚比下三层正交层合板的无量纲固有频率($\bar{\omega}$)

Tab.2 The dimensionless fundamental frequency ($\bar{\omega}$) of 3-layer laminated plate with various boundary conditions and span to thickness ratios

a/h	方法	SS	SC	CC
2	Ferreria ^[4]	5.211	5.217	5.263
	精确解 ^[1]	5.205	5.211	5.257
	本文	5.210	5.219	5.266
5	Ferreria ^[4]	10.307	10.658	11.274
	精确解 ^[4]	10.290	10.646	11.266
	本文	10.295	10.650	11.273
10	Ferreria ^[4]	14.804	17.199	19.678
	精确解 ^[1]	14.767	17.175	19.669
	本文	14.746	17.175	19.666
100	Ferreria ^[4]	18.355	28.165	40.234
	精确解 ^[1]	18.891	28.501	40.743
	本文	18.791	28.324	40.435

表 3 不同边界条件下三层正交层合板的前三阶无量纲化频率($a/h=10$)

Tab.3 The first three dimensionless frequency of the 3-layer laminated plate with various boundary conditions ($a/h=10$)

模态	方法	SS	SC	CC
1	本文	14.746	17.175	19.666
	FSDT ^[17]	14.766	17.175	19.669
2	本文	22.199	23.893	25.640
	FSDT ^[17]	22.158	23.677	25.349
3	本文	37.550	38.379	39.025
	FSDT ^[17]	36.900	37.720	38.650

边简支,CC 为四边固支,SC 为两对边简支,另两边为固支。由表 2 可知,本文方法与精确解十分吻合,当 $a/h \leq 10$ 时,结果比 Ferreria^[4] 中方法更接近于精确解,不同边界条件对精度几乎没有影响。表 3 给出了三层正交层合板的前三阶模态,并与一阶剪切理论解^[17] 比较。结果表明,本文计算结果具有很高的精度。

5.3 对不同铺设方式的层合板分析

在 5.1 和 5.2 中分别对四层对称正交层合板和三层对称正交层合板进行数值计算。本节将对二层反对称层合板和任意角铺设层合板进行数值分析。考虑的两层板参数为 $E_1/E_2 = 25$, $G_{12} = G_{13} = 0.5 E_2$, $G_{23} = 0.2 E_2$, $\nu_{12} = 0.25$, $\rho = 1$ 。

表 4 给出了不同铺设方式四边固支二层板的无量纲固有频率,并与 Galerkin 法^[18] 比较。计算结果表明,本文方法适用于各种铺设方式的层合板,且计算精度较高。

表 4 固支双层层合板的前三阶无量纲频率($\bar{\omega}$)($a/h=10$)

Tab. 4 The first three dimensionless frequencies ($\bar{\omega}$) for the clamped supported double layer laminated plates ($a/h=10$)

铺设角	方法	频率		
		1	2	3
(0/15)	Galerkin ^[18]	17.433	22.506	30.905
	本文	17.433	22.558	30.951
(0/30)	Galerkin ^[18]	16.193	22.561	31.791
	本文	16.192	22.615	31.830
(0/45)	Galerkin ^[18]	15.504	23.399	29.991
	本文	15.502	23.441	30.013
(0/60)	Galerkin ^[18]	15.399	24.779	28.637
	本文	15.334	24.799	28.663
(15/-15)	Galerkin ^[18]	16.373	22.308	31.352
	本文	16.368	22.360	31.397
(30/-30)	Galerkin ^[18]	15.206	23.584	29.452
	本文	15.202	23.639	29.470
(45/-45)	Galerkin ^[18]	14.906	26.392	26.392
	本文	14.904	26.434	26.434

5.4 层合板的优化设计

图 2 给出了四边简支三层 $[\theta/-\theta/\theta]$ 层合板的最小自振频率(基频)比 ω/ω_0 随铺设角 θ 变化的结果,其中 ω_0 为铺设角度 $\theta=0$ 时的自振频率,从图 2 可以看出,当铺设角度 $\theta=45^\circ$ 时,层合板的最小固有频率值将达到最大,这个结论与蒋永秋^[19]优化结果完全一致。

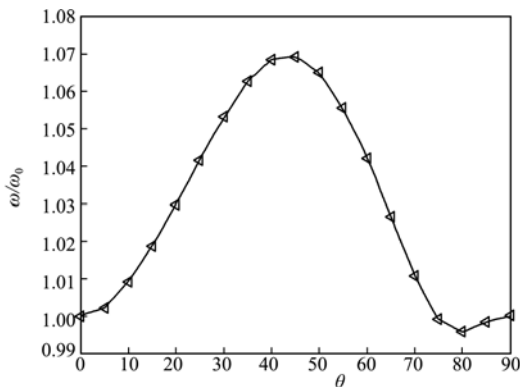


图 2 最小自振频率随铺设角度变化曲线
Fig. 2 Minimum frequency with laying angle

6 结 语

数值计算表明,本文给出的无网格 Kriging 法在不同情况下基于一阶剪切理论层合板振动频率数值结果的有效性并具有很高的精度。实现了无网格 Kriging 法在中厚层合板自由振动问题中的应用,从而扩展无网格 Kriging 法的应用范围,同时也为层合板动力问题提供一个有效并且易于实现的数值计算方法。

参考文献(References):

- [1] Reddy J N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis* [M]. CRC Press, Boca Raton, 1997.
- [2] Zhang Y X, Yang C H. Recent developments in finite element analysis for laminated composite plates [J]. *Composite Structures*, 2009, **88**(1): 147-157.
- [3] Lu Y Y, Belytschko, Gu L. A new implementation of the element-free Galerkin method [J]. *Computer. Methods in Applied. Mechanics and Engineering*, 1994, **113**(3-4): 397-414.
- [4] Ferreira A J M, Roque C M C, Jorge R M N. Free vibration analysis of symmetric laminated composite plates by FSDT and radial basis functions [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, **194**(39-41): 4265-4278.
- [5] Atluri S N, Zhu T. A new meshless local Petrov-Galerkin(MLPG) approach in computational mechanics [J]. *Computational Mechanics*, 1998, **22**(2): 117-127.
- [6] LIEW K M, HUANG Y Q, REDDY J N. Vibration analysis of symmetrically laminated plates based on FSDT using the moving least squares differential quadrature method [J]. *Computer. Methods in Applied. Mechanics and Engineering*, 2003, **192**(19): 2203-2222.
- [7] Song X, Guang C L, Wei H, et al. A meshless local point collocation method for free vibration analysis of laminated composite plates [J]. *Composite Structures*, 2011, **93**(2): 280-286.
- [8] Gu L. Moving Kriging interpolation and element free Galerkin method [J]. *International Journal for Numerical Methods Engineering*, 2003, **56**(1): 1-11.
- [9] Tongtuk P, Kanok-nukulchai W. On the parametric refinement of moving Kriging interpolation for element free Galerkin method [J]. *Computational Mechanics WCCM VI in Conjunction with APCOM04, Beijing, China, September, 2004*, 5-10.
- [10] Tongtuk P, Kanok-nukulchai W. Further investigation of element free Galerkin method using moving Kriging interpolation [J]. *International Journal of Computational Methods*, 2004, **1**(2): 1-21.
- [11] Sayakoummane V, Kanok-nukulchai W. A meshless analysis of shells based on moving Kriging interpolation [J]. *International Journal of Computational Methods*, 2007, **4**(4): 543-565.

- [12] Bui Q T, Nguyen N T, Nguyen D H. A moving Kriging interpolation-based meshless method for numerical simulation of Kirchhoff plate problem[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2009, **77**(10):1371-1395.
- [13] Zhu P, Liew K M. Free vibration analysis of moderately thick functionally graded plates by local Kriging meshless method [J]. *Composite Structures*, 2011, **93**(11):2925-2944.
- [14] Bui Q T, Nguyen M N, Zhang C H. An efficient mesh-free method for vibration analysis of laminated composite plates[J]. *Comput Mech*, 2011, **48**(2):175-193.
- [15] Bui Q T, Nguyen N T, Zhang C H. A moving Kriging interpolation-based element-free Galerkin method for structural dynamic analysis[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, **200**(13-16):1354-1366.
- [16] Bui Q T, Nguyen N T, Zhang C H, et al. An efficient meshfree method for analysis of two dimensional piezoelectric structures[J]. *Smart Materials and Structures*, 2011, **20**(6):065016.
- [17] Khdeir A A, Librescu L. Analysis of symmetric cross-ply elastic plates using a higher-order theory (Part ii) bucking and free vibration[J]. *Composite Structures*, 1988, **9**(4):259-277.
- [18] Shi J W, Nakatani A, Kitagawa H. Vibration analysis of fully clamped arbitrarily laminated palte[J]. *Composite Structures*, 2004, **63**(1):115-122.
- [19] 蒋咏秋. 纤维增强复合材料层合板的优化设计[J]. 计算结构力学及其应用, 1984, **1**(1):39-46. (JIANG Yong-qiu. Optimum design of laminated plates with fibre reinforced composite materials [J]. *Computational Structural Mechanics and Applications*, 1984, **1**(1):39-46. (in Chinese))

Free vibration analysis of laminated composite plates by local moving Kriging meshless method

CHEN Fu-jun¹, WEI Chun-zhi¹, YAO Lin-quan^{*1,2}

(1. School of Mathematical Sciences, Soochow University, Suzhou 215006, China;

2. School of Urban Rail Transportation, Soochow University, Suzhou 215006, China)

Abstract: The local moving Kriging interpolation meshless method is used to numerically analysis the natural frequencies of laminated composite plates in this paper. The governing equations and boundary conditions of the laminated plates are derived based on the first order shear theory. Then the discrete characteristic equations are obtained by the collocation method. As the Kriging interpolation function has the Kronecker delta function properties, the essential boundary conditions can be applied directly. Natural frequencies of the laminated composite plates with various boundary conditions, side-to-thickness ratios, material parameters and laying angle are computed by present method, and the numerical results are all well. Finally, the optimal angle design of laminated composite plates is studied by present method, and the optimization results are agreed well with the existing solutions in the literature. Numerical experiments demonstrate that the present method for free vibration analysis of laminated plates is efficient and highly accurate.

Key words: meshless method; laminated composite plates; local Kriging interpolation; free vibration