

# 基于纤维随机分布的单向复合材料拉伸破坏过程模拟

范寅, 陈秀华\*, 汪海

(上海交通大学 航空航天学院, 上海 200240)

**摘要:**单向复合材料的极限拉伸强度受纤维强度变化和纤维随机分布的影响。本文提出了一种合理的纤维随机分布假设,并以此建立了剪滞数值模型。利用蒙特卡罗模拟方法结合现有模型分析了单向复合材料的拉伸失效率过程,得到极限拉伸强度。与文献模型相比较的结果表明,本文的模型结果更理想。

**关键词:**剪滞方法;纤维随机分布;蒙特卡罗模拟

**中图分类号:** TB332; TB330.1

**文献标志码:** A

doi:10.7511/jslx201303016

## 1 引言

对于纤维增强复合材料而言,由于纤维的强度分散性较大,许多较弱的纤维在较低的载荷,甚至在加工过程中就已经断裂。在应力集中的影响下,断裂点周围的纤维会承受较大的载荷<sup>[1]</sup>。剪滞模型<sup>[2]</sup>的引入,在求解纤维断裂而导致的应力集中问题上取得了进展。OH<sup>[3]</sup>在1979年用剪滞模型结合蒙特卡罗方法对复合材料细观断裂过程进行模拟研究,并在强度值上得到了一些满意的结果。该方法发展至今<sup>[4-8]</sup>,已经成为一种分析复合材料细观强度和破坏过程的有效途径。大量模拟试验证明,该方法不仅从理论上可以预报复合材料的损伤破坏机理,而且还可以分析试件尺寸,纤维及界面强度性能等对复合材料强度的影响。

复合材料是一种多相体(增强纤维、基体和界面)材料,其性能取决于其组分材料的性质,同时也取决于其细观结构特征(增强纤维的体积含量、分布规律、形状、界面等)。由于复合材料的细观结构具有随机性,所以导致复合材料破坏时产生的局部应力也表现出随机性<sup>[9]</sup>。随机复合材料的传统分析方法往往会忽略这一点,大多数研究方法都将复合材料假设成均匀分布的。这种假设在分析较宏观问题时具有一定精度,但研究本质很少涉及到细观应力的不均匀性。虽然大多数学者<sup>[10-12]</sup>对复合材料细观结构的局部力学行为有一定的研究,但仍显不够,许多工作都是通过计算模拟细观结构<sup>[13-16]</sup>得到局部应力变化。

本文在三维剪滞模型基础上,研究并给出了合适的纤维随机分布的假设。结合蒙特卡罗方法模拟单向复合材料的拉伸加载过程,最终得到模拟的应力应变曲线。

## 2 理论分析

### 2.1 剪滞分析

剪滞模型经过发展,已由二维推广至三维。图1是典型的六边形排列三维剪滞模型。假设单根纤维只受周围临近的6根纤维影响,则纤维的平衡方程<sup>[4]</sup>为

$$EA \frac{d^2 u_{i,j}}{dx^2} + \frac{Gh}{d} (u_{i+1,j} + u_{i+1/2,j+1} + u_{i+1/2,j-1} + u_{i-1,j} + u_{i-1/2,j-1} + u_{i-1/2,j+1} - 6u_{i,j}) = 0 \quad (1)$$

本文在式(1)基础上,考虑纤维之间的距离变化。平衡方程转变为

$$EA \frac{d^2 u_{i,j}}{dx^2} + Gh \left( \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{d_{i,j}^{i+1,j}} + \frac{u_{i+1/2,j+1} - u_{i,j}}{d_{i,j}^{i+1/2,j}} + \frac{u_{i+1/2,j-1} - u_{i,j}}{d_{i,j}^{i+1/2,j-1}} + \frac{u_{i-1,j} - u_{i,j}}{d_{i,j}^{i-1,j}} + \frac{u_{i-1/2,j-1} - u_{i,j}}{d_{i,j}^{i-1/2,j-1}} + \frac{u_{i-1/2,j+1} - u_{i,j}}{d_{i,j}^{i-1/2,j+1}} \right) = 0 \quad (2)$$

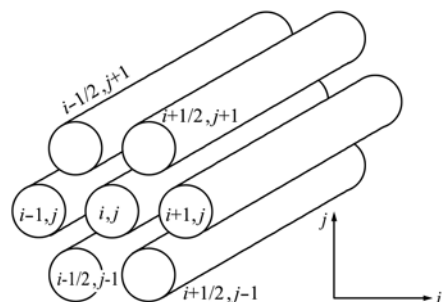


图1 三维剪滞模型示意图  
Fig. 1 Schematic of 3D shear-lag model

收稿日期:2012-03-02;修改稿收到日期:2012-05-07.

范寅(1987-),男,博士生  
陈秀华\*(1977-),男,工程师  
(E-mail: chenxiuhua@sjtu.edu.cn)

式(1)和式(2)中,  $E$  为纤维的杨氏模量,  $A$  为纤维的截面积,  $G$  为基体的剪切模量,  $h$  为纤维的厚度,  $u_{i,j}$  为纤维的位移,  $d$  为纤维间的距离, 其上下标表示具体的两根纤维。

### 2.2 数值分析

引入有限差分方法, 通过有限单元和边界条件, 可以计算式(2)。图 2 为有限差分方法的示意图。可以看出, 将单根纤维分为  $K$  个单元, 单元坐标为  $[i, j, k]$ , 节点坐标为  $(i, j, k)$ , 且  $i$  和  $j$  满足如下关系:

$$0 \leq i \leq M, 0 \leq j \leq N \quad (1 \leq k \leq K) \quad (3)$$

与有限元方法类似, 单根纤维的单元数量  $K$  越多时, 计算精度越高, 但同时造成了计算时间的增加。在本文的模拟中,  $K$  的取值为 100。将式(2)中的位移 2 阶项写为差分形式:

$$\frac{d^2 u_{i,j,k}}{dx^2} = \frac{u_{i,j,k-1} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j,k+1}}{(\Delta x)^2} \quad (4)$$

文献[3,4]假设在断裂单元中点处存在一个“虚拟点” $(i, j, k - 1/2)$ 。该点基于中心点左右存在两个值, 分别与单元左右两点位移保持相等, 使得该断裂单元左右两段的应变值为 0。基于以上假设, 节点  $(i, j, k)$  的位移差分方程为

$$\frac{d^2 u_{i,j,k}}{dx^2} = \frac{4}{3(\Delta x)^2} (u_{i,j,k+1} - u_{i,j,k}) \quad (5)$$

为了准确描述应力场的变化过程, 且在加载过程中保持方程的一致性, 引入阶梯函数, 则式(4)和式(5)可以合并为

$$\frac{d^2 u_{i,j,k}}{dx^2} = \frac{4[\gamma_{i,j,k+1}(u_{i,j,k+1} - u_{i,j,k}) - \gamma_{i,j,k}(u_{i,j,k} - u_{i,j,k-1})]}{(2 + \gamma_{i,j,k+1} + \gamma_{i,j,k})(\Delta x)^2} \quad (6)$$

当  $\gamma_{i,j,k} = 0$  时, 表明单元  $[i, j, k]$  断裂, 等于 1 时

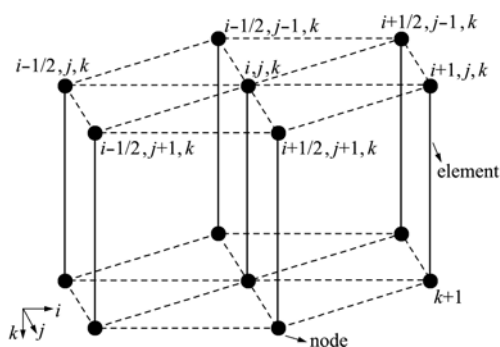


图 2 三维差分模型示意图

Fig. 2 Schematic of 3D difference model

则表示该单元完好。将式(6)代入式(2)得

$$4EA \frac{[\gamma_{i,j,k}(u_{i,j,k+1} - u_{i,j,k}) - \gamma_{i,j,k-1}(u_{i,j,k} - u_{i,j,k-1})]}{(2 + \gamma_{i,j,k} + \gamma_{i,j,k-1})(\Delta x)^2} + Gh \left( \frac{u_{i+1,j,k} - u_{i,j,k}}{d_{i,j}^{i+1,j}} + \frac{u_{i+1,j,k} - u_{i,j,k}}{d_{i,j}^{i+1/2,j}} + \frac{u_{i+1,j,k} - u_{i,j,k}}{d_{i,j}^{i+1/2,j-1}} + \frac{u_{i+1,j,k} - u_{i,j,k}}{d_{i,j}^{i-1,j}} + \frac{u_{i+1,j,k} - u_{i,j,k}}{d_{i,j}^{i-1/2,j-1}} + \frac{u_{i+1,j,k} - u_{i,j,k}}{d_{i,j}^{i-1/2,j+1}} \right) = 0 \quad (7)$$

求解上述有关位移变量的有限差分方程, 一般采用超松弛迭代法进行迭代计算。松弛因子影响计算迭代的速度, 在相关文献[3,5]中给出了松弛因子的具体大小, 本文的在迭代过程中松弛因子取 1.8。当位移场收敛, 迭代停止。此时, 应力场可由位移场得到。

$$\sigma_{i,j,k} = E \frac{u_{i,j,k+1} - u_{i,j,k}}{\Delta x} \quad (8)$$

拉伸载荷  $\sigma_{app}$  可以表示为

$$\sigma_{app} = V_f \sigma_f + (1 - V_f) \sigma_m \quad (9)$$

式中  $\sigma_f$  和  $\sigma_m$  为纤维和基体的拉伸应力值。其中,  $\sigma_f$  又可以表示为

$$\sigma_f = \left[ \frac{1}{M \times N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \sigma_{i,j,k} \right] \quad (10)$$

式中  $k$  可以取其范围内的任意一值。由于基体在复合材料中承担的拉伸载荷相对较小, 可以近似认为  $\sigma_m = 0$ 。式(9)变化为

$$\sigma_{app} = V_f \left[ \frac{1}{M \times N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \sigma_{i,j,k} \right] \quad (11)$$

### 3 纤维随机位置模拟

纤维在复合材料中的实际位置并非整齐一致, 而是呈分散性排列, 这种不等距的分布对复合材料内部的局部应力有很大的影响。复合材料在设计时, 其纤维的中心位置分布有一定的规律; 比如, 正方形排列、矩形排列、方形对角排列及六边形排列等。

研究复合材料的各项统计特性最好是通过实验进行, 但是要得到比较准确的统计结果, 需要大量的样本, 费用昂贵。采用计算机模拟的办法具有一定的可行性而且比较经济。本文先假设纤维位置的随机变化规律, 然后利用 Monte-Carlo 模拟方法生成多个复合材料的数字化样本。

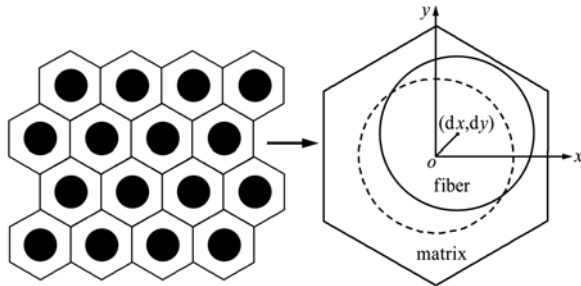


图3 纤维随机位置示意图

Fig. 3 Schematic of the stochastic location of a fiber

传统的分析方法是复合材料内部的纤维和基体按照其体积比等效为单胞来研究。与此类似,单胞的概念也可用于剪滞模型中。由于纤维的随机性假设必须要符合剪滞模型的力学传递规律,这意味着纤维的随机位置必须有限制范围。图3假设了纤维位置在设计位置附近满足均匀分布条件,且纤维在基本排列构型的基础上,其移动范围始终落在某一区里,该区域面积略小于单胞面积以保证每根纤维周围的仍然有6根纤维环绕且纤维之间相互不接触。基于上述讨论,纤维随机位置的假设归纳如下。

(1) 整个纤维在基体范围内。

(2) 纤维的截面积与基体的截面积之比满足材料的纤维体积分数。

(3) 纤维与纤维之间不发生接触。

图4所示假设纤维偏移原位置并在  $x$  和  $y$  方向上各移动微小距离  $dx$  和  $dy$ 。根据图3所示,由平面几何关系可以推导出随机位置的方程为

$$\begin{cases} |x| = \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} a - r \right] F_x \\ |y| = \left[ a - \frac{2}{\sqrt{3}} r - \frac{|x|}{\sqrt{3}} \right] F_y \end{cases} \quad (12)$$

式中  $a$  为图3中六边形移动区域边长,  $F_x$  和  $F_y$  均为  $[0, 1]$  区间内的随机数。根据式(12),通过程序模拟可以实现复合材料内部的纤维随机分布,图4是截面效果模拟结果。

#### 4 Monte-Carlo 模拟

Coleman<sup>[17]</sup>证实了单根纤维应服从二参数 Weibull 分布,并且这一结论已得到广泛证实,在实际工程中获得应用。

在差分模型中,将单根纤维划分为  $K$  个单元,基于 Weibull 强度分布,每个纤维单元有独立的强

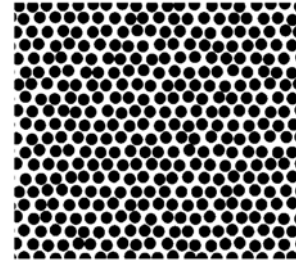


图4 截面模拟图

Fig. 4 The simulation of cross section

度值。在某外载  $\sigma$  作用下,一个纤维单元的失效概率  $P$  为

$$P = 1 - \exp\left[-\frac{\Delta x}{L_0} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^\rho\right] \quad (13)$$

式中  $\sigma_0$  和  $\rho$  是 Weibull 位置参数和形状参数,  $L_0$  为标距长度。引入  $[0, 1]$  之间的随机数  $R$ , 变换式(13)可以得到单个单元强度的 Weibull 二参数表达式为

$$\sigma_{i,j,k} = \sigma_0 \left[ -\frac{\ln(1-R)L_0}{\Delta x} \right]^{1/\rho} \quad (14)$$

本文在对复合材料强度模拟时使用表1给出的材料力学性能。模拟流程如图5所示,在模拟过程中,规定一旦外载降低至最大载荷的90%时<sup>[5]</sup>,即认为复合材料失效。

表1 玻纤/环氧材料的力学性能<sup>[4]</sup>

Tab. 1 The mechanical properties of glass fiber/epoxy material

Material properties	Value
Fiber Young's modulus $E_f$ /MPa	68000
Fiber radius $r$ /mm	0.008
Fiber weibull modulus $\rho$	10.0
Fiber volume fraction $V_f$	50%
Matrix shear modulus $G_m$ /MPa	1086.97
Fiber gage length $L_0$ /mm	14.5
Fiber strength $\sigma_0$ based on $L_0$ /MPa	1200

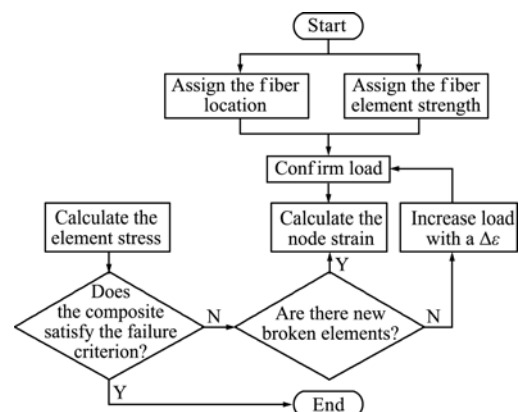


图5 Monte-Carlo 模拟流程图

Fig. 5 Flow chart of the Monte-Carlo simulation

## 5 算例

### 5.1 应力分析算例

分析7纤维模型如图6所示,以应变值 $\epsilon=1\%$ 加载,假设断裂纤维位置相对于原位置(等距模型)发生变化,并假定该纤维中心在 $x$ 和 $y$ 方向上的移动量各为 $1\mu\text{m}$ 。对该模型分别分析多点连续断裂和双点断裂的情况。从图6可以看出,纤维7的位置移动,导致了周围纤维的不同程度的应力集中。图7左边两图清晰地显示了距离纤维7最近纤维

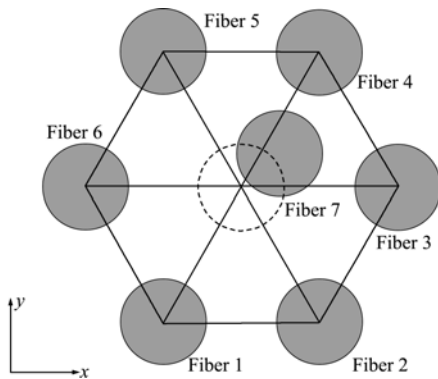


图6 纤维7位置变化示意图

Fig. 6 Schematic of the position of fiber 7

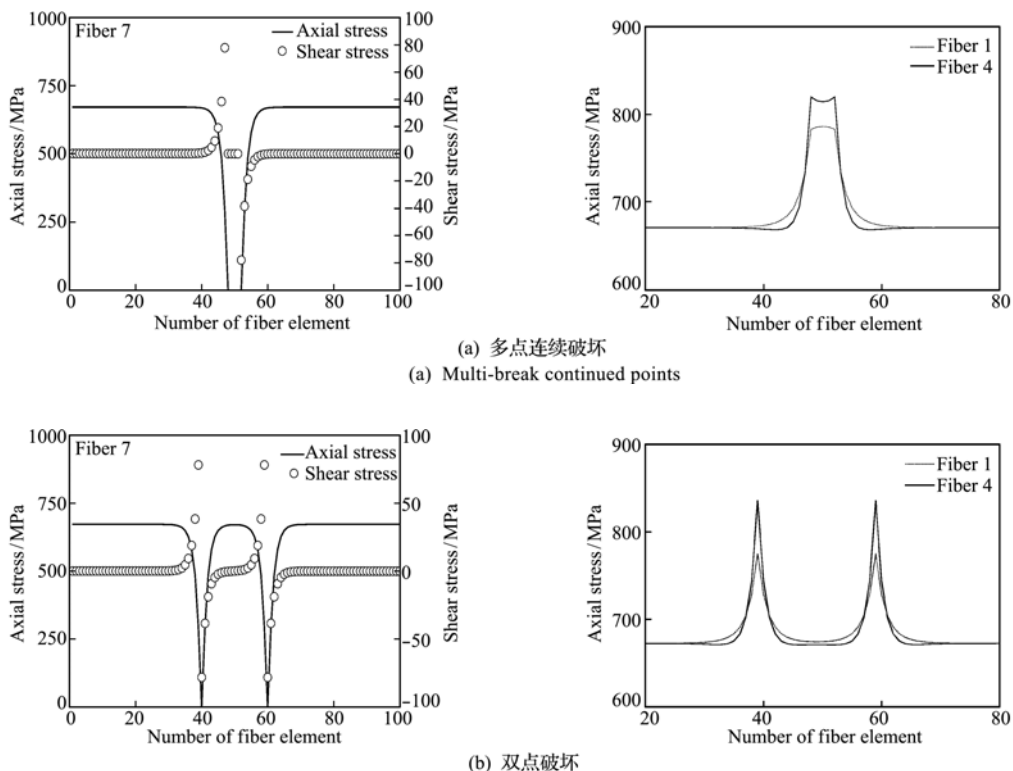
维4和最远纤维1的轴向应力分布对比,由此可见,应力集中程度同距离成反比关系。

### 5.2 强度分析算例

在模拟过程中,随着应变的增加,不断记录外加载荷的变化直到复合材料失效,把上述记录数据绘成图形,可以得到复合材料的应力应变曲线,如图8所示。

为揭示复合材料内部的应力场变化,利用MSC.Patran的后处理功能,将应力状态结果写入PCL文件中,获得单向复合材料在拉伸过程中的应力状态截图如图9所示。可以看出,复合材料内部的损伤随着加载过程而不断增加,并最终导致材料失效。图10给出了在总单元数为20000的情况下复合材料内部的损伤积累情况,复合材料内部的破坏单元数随着外载的增加呈加速上升趋势。

由Monte-Carlo方法获得的强度值和应力应变曲线具有一定的随机性,每一次获得的强度值都是一个随机值,这个随机值不仅取决于纤维的强度分布情况,也取决于复合材料内部的纤维分布情况。利用多次模拟取平均值的方法,可以确定复合材料的最终强度及其强度的区间和分散度。



(a) 多点连续破坏  
(a) Multi-break continued points

(b) 双点破坏  
(b) Two broken points

图7 应力分析结果

Fig. 7 Stress simulation results

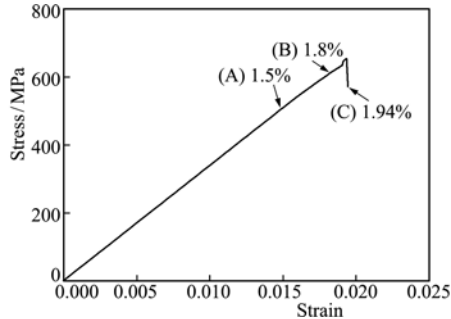


图8 应力应变模拟曲线  
Fig. 8 Simulated stress-strain curve

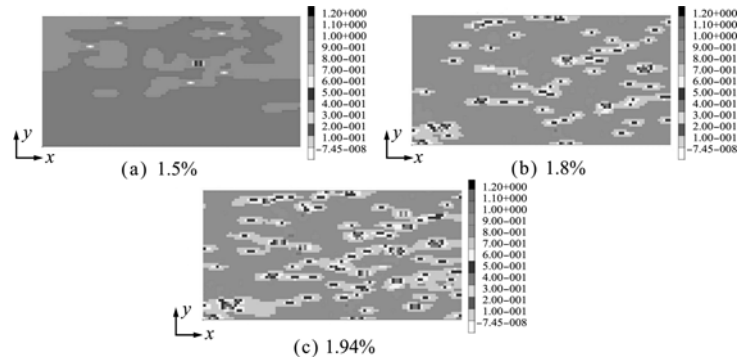


图9 图8中标记点(A)-(C)的应力集中因子分布  
Fig. 9 The distribution of SCF at points labeled (A)-(C) in Fig. 8

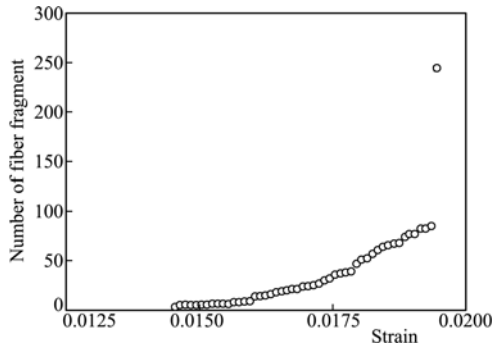


图10 加载过程中的断裂单元数  
Fig. 10 The number of broken elements in the loading process

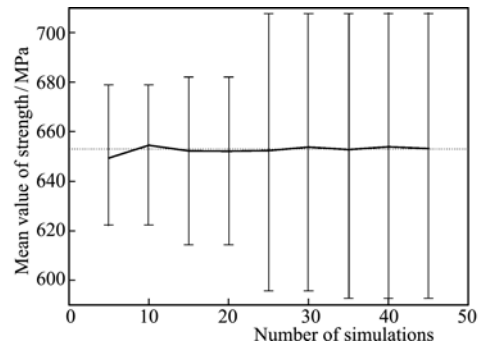


图11 强度平均值趋势  
Fig. 11 Trend of mean strength

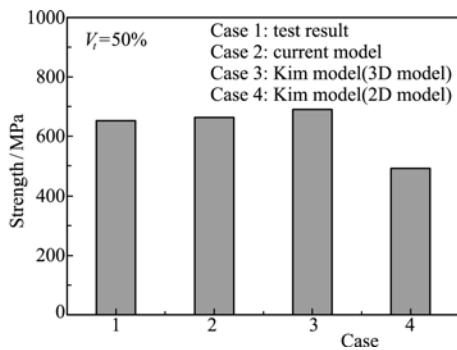


图12 现有模型和 Kim 模型<sup>[4]</sup>以及试验值比较  
Fig. 12 Comparison between simulation results of current and Kim's models<sup>[4]</sup> and experimental results

图11所示为强度平均值的趋势及其区间变化。可以看出,现有模型的强度平均值在多次模拟后接近 653 MPa,并在一个微小的区间范围浮动。

文献[4]用同样构型的三维模型模拟了玻纤/环氧复合材料的拉伸过程,虽然没有考虑纤维位置的随机性,但最终获得的结果与试验结果很接近。本文利用现有模型,得到的强度结果比 Kim 模型结果有明显的降低如图12所示,且更接近试验值。

## 6 结论

本文在剪滞模型基础上,假定纤维在基本排列构型的位置是一随机分布函数,该函数符合均匀分

布规律,并由 Monte-Carlo 方法给出随机数。在此基础上建立了新的有限差分模型,并按此模型对单向复合材料的拉伸过程进行了模拟。

对7纤维模型特殊情况的应力分析发现,纤维断裂点周围的应力集中因子与纤维之间的距离成反比。这种应力分布的不均匀性会影响到模拟加载时的单元破坏,并导致最终的强度值也会受到影响。通过与 Kim 模型的对比,新模型模拟所得到的极限拉伸强度有所降低,并且更接近试验值。

## 参考文献(References):

- [1] 杜善义,王彪. 复合材料细观力学[M]. 北京: 北京科学出版社, 1998. (DU Shan-yi, WANG Biao. *Composites Material Micromechanics* [M]. Beijing: Beijing Science Press, 1998. (in Chinese))
- [2] Hedgepeth J M, Van Dyke P. Local Stress concentrations in imperfect filamentary composite materials [J]. *Composite Mater*, 1976, 1(3): 294-309.
- [3] OH K P. A monte-carlo study of the strength of unidirectional fiber reinforced composites [J]. *Journal of Composite Materials*, 1979, 13(4): 311-328.
- [4] Kim J K, Kim C S, Song D Y. Strength evaluation and failure analysis of unidirectional composites using monte-carlo simulation [J]. *Material Science and*

- Engineering*, 2003, **A340**(1,2):33-40.
- [5] Okabe T, Takeda N, Kamoshida Y, et al. A 3D shear-lag model considering micro-damage and statistical strength prediction of unidirectional fiber reinforced composites [J]. *Composites Science and Technology*, 2001, **61**(12):1789-1800.
- [6] Okabe T, Takeda N. Elastoplastic shear-lag analysis of single-fiber composites and strength prediction of unidirectional multiber composites [J]. *Composites Science and Engineering*, 2002, **A33**(10):1327-1335.
- [7] Okabe T, Sejine H, Ishii K, et al. Numerical method for failure simulation of unidirectional fiber-reinforced composites with spring element model [J]. *Material Science and Engineering*, 2005, **65**(6):921-933.
- [8] Zhang J Q, Wang F. Modeling of damage evolution and failure in fiber-reinforced ductile composites under thermomechanical fatigue loading [J]. *International Journal of Damage Mechanics*, 2010, **19**(7):851-875.
- [9] Graham L L, Gurleyb K, Masters F. Non-gaussian simulation of local material properties based on a moving window technique [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2003, **18**(3):223-224.
- [10] Frantziskonis G N. Stochastic modeling of heterogeneous materials—a process for the analysis and evaluation of alternative formulations [J]. *Mechanics of Materials*, 1998, **27**(3):165-175.
- [11] Gibiansky L V, Torquato S. Geometrical parameter bounds on the effective model of composites [J]. *Journal of the Mechanics and Physics Solids*, 1995, **43**(10):1587-1613.
- [12] Rowatt J D, Spanos P D. Markov chain models for life prediction of composite laminates [J]. *Structural Safety*, 1998, **20**(2):117-135.
- [13] Mullen R L, Ballarini R, Yin Y, et al. Monte carlo simulation of effective elastic constants of polycrystalline thin films [J]. *Acta Materialia*, 1997, **45**(6):2247-2255.
- [14] Povirk G L. Incorporation of micro-structural information into models of two phase materials [J]. *Acta Materialia*, 1995, **43**(8):3199-3206.
- [15] Roberts A P, Teubner M. Transport properties of heterogeneous materials derived from gaussian random fields: bounds and simulation [J]. *Physics Review E*, 1995, **51**(5):4141-4154.
- [16] Papathanasiou T D, Lee P D. Morphological effects on the transverse permeability of arrays of aligned fibers [J]. *Polymers & Polymer Composites*, 1997, **18**(2):242-253.
- [17] Coleman B D. On the strength of classical fibers and fiber bundles [J]. *Journal of the Mechanics and Physics Solids*, 1985, **7**(1):60-70.

## The simulation of damage process for uni-directional composite materials based on fibers' stochastic distribution

FAN Yin, CHEN Xiu-hua\*, WANG Hai

(School of Aeronautics and Astronautics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China)

**Abstract:** Ultimate Tensile Strength (UTS) of composite materials is influenced by the variation in fiber strength and randomness of fibers' distribution. A shear-lag numerical model, which depends on a reasonable hypothesis of fiber distribution, is built in this paper. A Monte-Carlo simulation using current model is used to analyze the failure process of uni-directional composites and obtain the UTS. Compared with model from literature, current model obtains much more perfect results.

**Key words:** shear-lag method; fibers' stochastic distribution; Monte-Carlo simulation