

二维柱坐标系中守恒的保球对称的中心型拉氏方法

刘妍*, 田保林, 申卫东, 王双虎, 江松

(北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100094)

摘要:提出了一种 Godunov 型中心型拉氏方法,用于求解二维柱坐标系中的可压缩多介质 Euler 方程组,该方法完全在体积控制体上离散,不仅保证质量、动量和总能量守恒,且该方法在二维柱坐标系中保一维球对称;并且对一维球对称问题在球对称网格划分下,精度测试表明该方法具有一阶精度,算例显示方法非常有效。

关键词:中心型拉氏方法;保球对称性;二维柱坐标系

中图分类号:O241.82 **文献标志码:**A doi:10.7511/jslx201401008

1 引言

拉氏方法^[1] (Lagrangian) 是模拟可压缩多介质流体运动的一种重要数值方法。由于网格随流体运动(跟踪质团),具有自动处理界面运动、获得高清晰界面的优点。根据速度定义的位置,一般将拉氏方法分为交错型^[2]和中心型^[1]两大类。本文主要讨论用于可压缩多介质流动的中心型拉氏方法。

由于拉氏方法具有所述优点,所以在惯性约束聚变(ICF)和武器物理等领域的数值模拟中得到广泛使用。这些领域中的很多三维多介质柱对称问题,通常采用二维柱坐标系下的拉氏方法模拟。而对该类方法,保守性和球对称性非常重要。守恒性指的是在计算过程中保证质量、动量和总能量守恒,以保证数值解收敛到方程的弱解,并保证间断位置模拟的正确性。而要求方法保球对称性非常重要,如模拟球对称内爆问题时,Rayleigh-Taylor 等不稳定性会将数值误差引起的球对称的小偏差放大,导致产生非常大的误差;另外,为更好地理解和分析内爆炸问题,必须清楚一些非对称现象是物理问题本身所具有的还是数值误差引起的。

在过去几十年来,在二维柱坐标系中保一维球对称的拉氏方法的研究非常多,但大多是交错型方

法,且无论对动量方程离散采用面积分法^[2],还是体积分法^[6],都很难同时保球对称性和动量及总能量守恒。近年来,保一维球对称的中心型拉氏方法的研究也越来越多。文献[4]将中心型拉氏方法^[3]推广到二维柱坐标系中,对动量方程分别采用面积分和体积分离散,都能保证总能量守恒,但都不能同时保球对称性和动量守恒。最近文献[5]提出了一个中心型拉氏方法,方法保球对称的同时保证质量、动量和总能量守恒,但方法有些复杂。

早在 20 世纪 80 年代,水鸿寿^[7]提出了一个 Lagrange 与 Euler 相结合的中心型 Godunov 型方法,即体平均多流管方法。该方法在体积控制体上积分,在二维柱坐标系中同时保一维球对称和质量、动量及总能量守恒。可根据问题的特点采用 Lagrange-Euler 混合型计算网格,该方法不同于一般的 ALE 方法,也不同于一般的跟踪质团的拉氏方法。该方法对较简单的具有特定构型的问题体现了其优势,但对较复杂的问题实现比较困难。

本文在文献[7]的基础上发展了一种跟踪质团的 Godunov 型中心型拉氏方法,是对文献[7]的一种推广,可用于求解二维柱坐标系中的可压缩 Euler 方程组。该方法与文献[7]相比适宜于处理较复杂的问题,且可用于纯拉氏计算,也可用于 ALE 方法中的拉氏步计算,与文献[5]相比更简单易用。严格证明了该方法在二维柱坐标系中保一维球对称,并保证质量、动量和总能量守恒,且在一维球对称的情况下该方法与文献[7]等价。对一维球对称问题在球对称网格划分下,数值精度测试表明该方法具有一阶精度。

收稿日期:2012-09-03;修改稿收到日期:2012-11-02.

基金项目:北京应用物理与计算数学研究所计算物理重点实验室基础研究课题(565-03-03);国家自然科学基金(10901022,11171037);中国工程物理研究院科学技术发展基金(2012A0202010);NSAF(11176015)资助项目。

作者简介:刘妍*(19 -),女,博士,副研究员
(E-mail: yan_liu_zh@163.com).

2 数值方法

2.1 控制方程

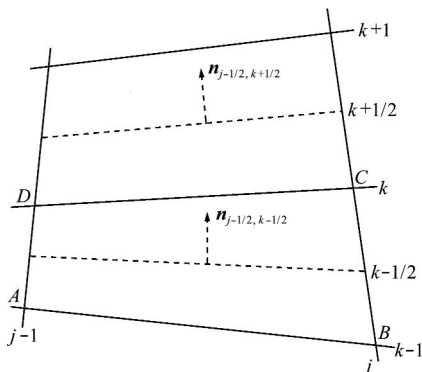
二维柱坐标系中,拉氏框架下积分形式的 Euler 方程组为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega(t)} \rho r dx dr &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega(t)} \rho u r dx dr &= - \oint_{\partial\Omega(t)} p \cos \alpha r dl \\ \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega(t)} \rho v r dx dr &= - \oint_{\partial\Omega(t)} p \sin \alpha r dl + \iint_{\Omega(t)} p dx dr \\ \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega(t)} \rho E r dx dr &= - \oint_{\partial\Omega(t)} p \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} r dl \end{aligned} \quad (1)$$

式中 ρ, p 和 E 分别为密度、压力和总能, $\mathbf{U}=(u, v)$ 为流体的速度, Ω 为积分控制体, $\partial\Omega$ 为 Ω 的边界, \mathbf{n} 和 dl 分别为边界 $\partial\Omega$ 的外法向和长度。采用理想气体状态方程 $p=(\gamma-1)\rho e$ 来封闭式(1), γ 为比热比, e 为单位质量的内能。

2.2 空间离散

采用图 1(a)所示的在 x 和 y 方向分别以 j 族 ($j=0, \dots, J$) 和 k 族 ($k=0, \dots, K$) 曲线划分的结构化四边形网格,所有物理量定义在网格中心。对其中的任一网格 $I_{j-1/2, k-1/2}$ 的一些几何量做如下定义,下标 $j-1/2, k-1/2$ 为网格中心,其公式参见文献[7]。令 $\Omega_{j-1/2, k-1/2}$ 和 $V_{j-1/2, k-1/2}$ 分别为 $I_{j-1/2, k-1/2}$ 的面积和绕 x 轴旋转一个弧度角所形成的体积;令 $S_{j, k-1/2}$ 和 $S_{j-1/2, k}$ 分别为 j 和 k 网格边的侧面积(绕 x 轴旋转一个弧度角所形成曲面的面积);令 $\mathbf{n}_{j, k-1/2}=(\cos \alpha_{j, k-1/2}, \sin \alpha_{j, k-1/2})$ 和 $\mathbf{n}_{j-1/2, k}=(\cos \alpha_{j-1/2, k}, \sin \alpha_{j-1/2, k})$ 分别为 j 和 k 网格边的法向矢量,分别指向 j 和 k 由小到大变化的方向。令



(a) 结构化中心型计算网格

$M_{j-1/2, k-1/2}$ 为 $I_{j-1/2, k-1/2}$ 的质量,由于是拉氏计算,网格质量保持不变,方程组(1)可离散以下形式为

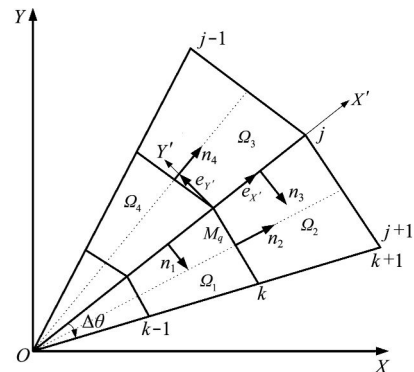
$$\begin{aligned} M_{j-1/2, k-1/2}^{n+1} &= \rho_{j-1/2, k-1/2}^{n+1} V_{j-1/2, k-1/2}^{n+1} = M_{j-1/2, k-1/2}^n \\ &= \rho_{j-1/2, k-1/2}^n V_{j-1/2, k-1/2}^n \\ M_{j-1/2, k-1/2}^{n+1} u_{j-1/2, k-1/2}^{n+1} &= M_{j-1/2, k-1/2}^n u_{j-1/2, k-1/2}^n - \\ &\quad [p \cos \alpha \Delta t]_{j, k-1/2} + [p \cos \alpha \Delta t]_{j-1, k-1/2} - \\ &\quad [p \cos \alpha \Delta t]_{j-1/2, k} + [p \cos \alpha \Delta t]_{j-1/2, k-1} \\ M_{j-1/2, k-1/2}^{n+1} v_{j-1/2, k-1/2}^{n+1} &= M_{j-1/2, k-1/2}^n v_{j-1/2, k-1/2}^n - \\ &\quad [p \sin \alpha \Delta t]_{j, k-1/2} + [p \sin \alpha \Delta t]_{j-1, k-1/2} - \\ &\quad [p \sin \alpha \Delta t]_{j-1/2, k} + [p \sin \alpha \Delta t]_{j-1/2, k-1} + \\ &\quad (\rho \Omega \Delta t)_{j-1/2, k-1/2} \\ M_{j-1/2, k-1/2}^{n+1} E_{j-1/2, k-1/2}^{n+1} &= M_{j-1/2, k-1/2}^n E_{j-1/2, k-1/2}^n - \\ &\quad [p \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \Delta t]_{j, k-1/2} + [p \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \Delta t]_{j-1, k-1/2} - \\ &\quad [p \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \Delta t]_{j-1/2, k} + [p \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \Delta t]_{j-1/2, k-1} \end{aligned} \quad (2)$$

式中 Δt 为时间步长。格式(2)是半离散的,可用 Euler 向前差分来离散时间导数得到一阶精度的全离散格式。要解格式(2),需求解网格边上的压力和法向速度,还需知道网格的角点速度,以此得拉氏网格及其体积与质量。以下对其进行描述。

2.3 网格边物理量的计算—Godunov 型方法

采用文献[7]的思想,分别在 j 和 k 网格边上,求解局部一维 Riemann 问题得到网格边上的压力 $p_{j, k-1/2}$ 和法向速度 $(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})_{j, k-1/2}$,这也是 Godunov 型方法的关键部分。以 j 网格边为例说明该思想,而 k 网格边可类似处理。

以 $(\rho, p, V, c)_L=(\rho, p, \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}^{(j)}, c)_{j-1/2, k-1/2}$ 和 $(\rho, p, V, c)_R=(\rho, p, \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}^{(j)}, c)_{j+1/2, k-1/2}$ 分别为左、右状态在 j 网格边处建立局部一维 Riemann 问题,并可采用精确 Riemann 解^[11]或其他一些近似



(b) 柱坐标系中一球对称网格及状态

图 1
Fig. 1

Riemann 解如 Dukowicz's 双激波近似 Riemann 解^[1]等来求解一维 Riemann 问题,并求得网格边上的压力和法向速度。而计算网格中心的法向速度 $(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}^{(j)})_{j \pm 1/2, k-1/2}$ 所用的法向量 $\mathbf{n}_{j \pm 1/2, k-1/2}^{(j)}$ 的计算方式,仍然采用文献[7]的方式,这是本文方法与文献[7]的方法能保一维球对称的关键所在,即采用网格 $(j \pm 1/2, k-1/2)$ 中 k 边及 $k-1$ 边中点连线的法向量,并指向 j 由小到大变化的方向,具体计算公式参见文献[7]。

2.4 角点速度计算

采用文献[1]的方法计算角点速度,这也是本文方法与文献[7]的方法的最大不同之处。

令角点 (j, k) 的速度 $\mathbf{V}_{j,k}^{n+1} = (v_1, v_2)_{j,k}^{n+1}$ 在其周围相邻四条边上的法向方向上的分量恰好等于一维 Riemann 问题得到的法向速度,即

$$\mathbf{V}_{j,k}^{n+1} \cdot \mathbf{n}_i = (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})_i = (u_n^*)_i, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3)$$

式中 $\mathbf{n}_i = (n_{i,x}, n_{i,y})$ 和 $(u_n^*)_i$ 分别为第 i 条边的法向矢量和由 Riemann 问题得到的法向速度。该问题是超定的,采用文献[1]的最小二乘方法来求解式(3)。即解如下关于角点速度的二次泛涵的极小值。

$$F(v_{1,j,k}^{n+1}, v_{2,j,k}^{n+1}) = \sum_{i=1}^4 W_i [\mathbf{V}_{j,k}^{n+1} \cdot \mathbf{n}_i - (u_n^*)_i]^2 \quad (4)$$

式中 W_i 为网格边 i 的权重。权重一般取为网格边的长度或者网格边左、右两侧网格的密度平均值。得如下二元一次方程组

$$a_{11} v_{1,j,k}^{n+1} + a_{12} v_{2,j,k}^{n+1} = b_1, \quad a_{21} v_{1,j,k}^{n+1} + a_{22} v_{2,j,k}^{n+1} = b_2 \quad (5)$$

$$\text{式中 } a_{11} = \sum_{i=1}^4 W_i n_{i,x}^2, \quad a_{12} = \sum_{i=1}^4 W_i n_{i,x} n_{i,y}$$

$$a_{21} = a_{21}, \quad a_{22} = \sum_{i=1}^4 W_i n_{i,y}^2$$

$$b_1 = \sum_{i=1}^4 W_i (u_n^*)_i n_{i,x}, \quad b_2 = \sum_{i=1}^4 W_i (u_n^*)_i n_{i,y}$$

解此方程组可得角点速度为

$$\mathbf{V}_{j,k}^{n+1} = (v_1, v_2)_{j,k}^{n+1} = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}, b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}} \quad (6)$$

进而得拉氏网格体积,并求解式(2)得网格单元的密度、速度和总能,内能可由总能计算出,压力就可由状态方程得到,至此整个拉氏步计算结束。

3 保一维球对称性证明和守恒性证明

3.1 守恒性证明

由于是拉氏计算,质量守恒自动满足。对动量

和能量方程,由式(2)可知对所有网格有

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K M_{j-1/2, k-1/2}^{n+1} u_{j-1/2, k-1/2}^{n+1} = \\ & \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K M_{j-1/2, k-1/2}^n u_{j-1/2, k-1/2}^n + \\ & \sum_{k=1}^K ([p \cos \alpha S \Delta t]_{0, k-1/2} - [p \cos \alpha S \Delta t]_{J, k-1/2}) + \\ & \sum_{j=1}^J ([p \cos \alpha S \Delta t]_{j-1/2, 0} - [p \cos \alpha S \Delta t]_{j-1/2, K}) \\ & \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K M_{j-1/2, k-1/2}^{n+1} v_{j-1/2, k-1/2}^{n+1} = \\ & \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K M_{j-1/2, k-1/2}^n v_{j-1/2, k-1/2}^n + \\ & \sum_{k=1}^K ([p \sin \alpha S \Delta t]_{0, k-1/2} - [p \sin \alpha S \Delta t]_{J, k-1/2}) + \\ & \sum_{j=1}^J ([p \sin \alpha S \Delta t]_{j-1/2, 0} - [p \sin \alpha S \Delta t]_{j-1/2, K}) + \\ & \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (p \Omega \Delta t)_{j-1/2, k-1/2} \\ & \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K M_{j-1/2, k-1/2}^{n+1} E_{j-1/2, k-1/2}^{n+1} = \\ & \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K M_{j-1/2, k-1/2}^n E_{j-1/2, k-1/2}^n + \\ & \sum_{k=1}^K ([p \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} S \Delta t]_{0, k-1/2} - [p \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} S \Delta t]_{J, k-1/2}) + \\ & \sum_{j=1}^J ([p \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} S \Delta t]_{j-1/2, 0} - [p \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} S \Delta t]_{j-1/2, K}) \end{aligned} \quad (7)$$

式(7)表明,动量和总能量守恒。

3.2 保一维球对称性证明

考虑图 1(b)所示的以 O 为球心的等角度射线型一维球对称网格。假设 n 时刻状态包括速度球对称,即在球对称面上速度的方向是向心,大小相等。以下证明 $n+1$ 时刻的计算结果仍然球对称。

(1) j 和 k 网格边上压力及速度法向分量球对称

由于本文计算网格边上压力及速度法向分量的思想与文献[7]的完全一致,因此,本部分的证明与文献[7]的完全类似,不再赘述,具体参见文献[7]。

(2) 拉氏步的计算网格球对称

如图 1(b)所示, M_q 为任意角点。为简单起见,将推导放于局部直角坐标系 $(M_q, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ 之下,其中 \mathbf{e}_x 是与 OM_q 共线的单位矢量。由 n 时刻状态球对称,可令网格 1 和网格 4 及 2 和 3 中的分布分别为 ρ_1, p_1, c_1 和 ρ_2, p_2, c_2 , 而权重 $W_2 = W_4 = W_{2,4}$, 并由上述(1)部分的证明有 $(u_n^*)_2 = (u_n^*)_4 = \omega_k^n$,

$(u_n^*)_1 = (u_n^*)_3 = 0$ 。四条网格边上的法向矢量为

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 &= (n_{1,x}, n_{1,y}) = (0, -1) \\ \mathbf{n}_2 &= (n_{2,x}, n_{2,y}) = (\cos(\Delta\theta/2), -\sin(\Delta\theta/2)) \\ \mathbf{n}_3 &= (n_{3,x}, n_{3,y}) = (0, -1) \\ \mathbf{n}_4 &= (n_{4,x}, n_{4,y}) = (\cos(\Delta\theta/2), \sin(\Delta\theta/2)) \end{aligned} \quad (8)$$

因此,式(5)中的系数分别为

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2W_{2,4} \cos^2(\Delta\theta/2) \\ a_{12} = a_{21} &= (W_4 - W_2) \cos(\Delta\theta/2) \sin(\Delta\theta/2) = 0 \\ a_{22} &= 2W_{2,4} \sin^2(\Delta\theta/2) + W_1 + W_3 \\ b_1 &= 2W_{2,4} \omega_k^n \cos(\Delta\theta/2), \quad b_2 = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

所以,角点速度在 e_X 和 e_Y 方向的分量分别为

$$\begin{aligned} v_{e_X, j, k}^{n+1} &= \frac{b_1}{a_{11}} = \frac{2W_{2,4} \omega_k^n \cos(\Delta\theta/2)}{2W_{2,4} \cos^2(\Delta\theta/2)} = \frac{\omega_k^n}{\cos(\Delta\theta/2)} \\ v_{e_Y, j, k}^{n+1} &= (b_2 a_{11} - b_1 a_{21}) / (a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

因此,角点只沿射线方向运动,与 j 无关,大小相等,该结果与文献[7]的一致。因此,拉氏步的网格球对称。

(3) 各物理量,密度、速度和内能分布是球对称的

该部分证明与文献[7]的证明完全一致,具体可参见文献[7],在此不再赘述。

至此,证明了 t^{n+1} 时刻计算结果保球对称。

4 数值算例

所有算例都采用 Dukowicz's 双激波近似 Riemann 解^[1] 计算一维 Riemann 问题。

4.1 精度测试

采用自由膨胀问题^[10] 来测试本文方法的精度。计算区域为 $[0, \pi/2] \times [0, 1]$ 。初始气体静止,密度 $\rho=1$, 比热比为 $5/3$, 压力为 $p=1-\sqrt{z^2+r^2}$ 。该问题的理论解为

$$\begin{aligned} R(t) &= \sqrt{1+2t^2} \\ u_\xi(z, r, t) &= [2t/(1+2t^2)] \sqrt{z^2+r^2} \end{aligned}$$

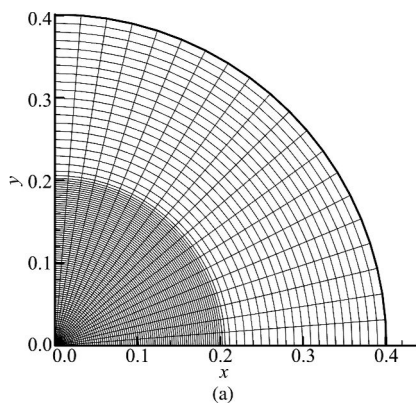


表1 自由膨胀问题的误差估计

Tab.1 Error estimate for the free expansion problem

J=K	Norm	density order	momentum order	energy order
20	L ₁	1.62e-2	9.67e-3	1.04e-2
	L _∞	2.53e-2	1.88e-2	1.80e-2
40	L ₁	8.08e-3	1.00	4.98e-3
	L _∞	1.27e-2	0.99	1.03e-2
80	L ₁	4.06e-3	0.99	2.52e-3
	L _∞	6.26e-3	1.03	5.40e-3
160	L ₁	2.05e-3	0.99	1.28e-3
	L _∞	3.08e-3	1.03	2.79e-3

$$\rho(z, r, t) = 1/R^3$$

$$p(z, r, t) = (1/R^5)[1 - (z^2 + r^2)/R^2]$$

式中 R 为外边界的半径,且 u_ξ 为径向的速度值。

外边界为自由面,其余为反射边界。采用一维球对称网格,表1在 $t=1.0$ 时刻的 L_1 和 L_∞ 误差估计。为减少边界对结果的影响,也采用类似文献[5]的方式只计算区域 $[1, J] \times [\frac{1}{5}K, \frac{4}{5}K]$ 上的 L_1 和 L_∞ 误差。由表1可知,对所有变量而言精度为1阶。

4.2 柱坐标系中的 Noh 问题^[8]

计算区域为 $[0, \pi/2] \times [0, 1]$, 比热比为 $5/3$, 单位密度零内能的气体以单位速度沿径向向内运动,产生速度为 $D=1/3$ 的圆形球面激波,波后密度为64;外边界为自由面,其余为反射边界。采用一维球对称网格,图2为 $t=1.0$ 时刻的计算结果,图2(a)为 20×100 分点的网格图,图2(b)为分点 20×100 和 20×50 在射线方向上的密度。从图2可以看出,该方法能够很好地保持一维球对称,且在射线方向随着网格加密,激波位置与密度分布逼近理论解。密度在球心附近出现壁热现象,这是很多拉氏方法^[3-5] 都会出现的问题,不在本文讨论范围之内。

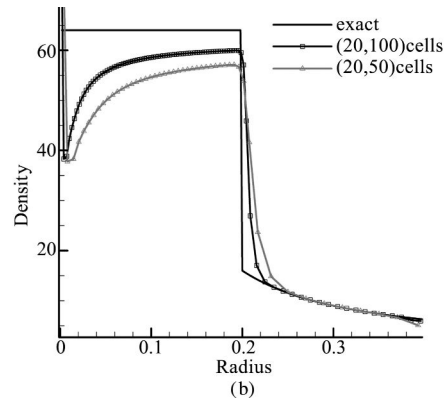


图2 $t=1.0$ 时刻的计算结果
Fig.2 Results at time $t=1.0$

4.3 一维球对称的 Sod 激波管问题^[5]

在柱坐标系中测试 Sod 激波管问题。计算区域为 $[0, \pi/2] \times [0, 20]$, 采用球对称网格。初始条件为

$$(\rho, u, p, \gamma)_L = (1.0, 0, 1.0, 5/3), 0 \leq x \leq 10$$

$$(\rho, u, p, \gamma)_R = (0.125, 0, 0.1, 5/3), 10 \leq x \leq 20$$

所有边界为反射边界。图 3 为 $t = 1.4$ 时刻的计算结果。图 3(a) 为 20×400 个分点的网格, 图 3(b) 为数值解和“参考解”沿射线方向的密度, 其中数值解为 20×400 个点的结果, 而“参考解”是拉氏方法的 20×2000 个点的结果。网格很好地保持一维球对称性, 且密度与参考解很接近。

4.4 柱坐标系下的 Sedov 点爆炸问题^[10]

在柱坐标系中计算 Sedov 点爆炸问题。计算区域为 $[0, \pi/2] \times [0, 1.125]$, 初始分布有均匀单位密度, 零压力; 球心分布有单位能量, 随时间演化形成一个向四周膨胀理论上强度无限大的激波, $\gamma = 1.67$ 。所有边界为反射边界。理论认为激波在 $t = 1.0$ 时刻到达 1 的位置, 且波后密度最高为 4, 采用一维球对称网格。图 4 为 $t = 1.0$ 时刻 20×200 个点的计算结果, 图 4(a) 为网格, 图 4(b) 是沿

射线方向的密度。网格很好地保持一维球对称, 密度逼近理论解。

4.5 Coggeshall expansion 问题^[9]

对该问题即使初始网格球对称, 后期仍发展为非对称, 可测试方法计算非对称性问题的能力。计算区域为 $[0, \pi/2] \times [0, 1]$ 。密度为 1, $\gamma = 1.67$, 网格速度为 $(u_x, u_y) = (-x/4, -y)$, x 和 y 分别为网格角点坐标, 比内能为 $e = (3x_c/8)^2$, x_c 为网格中心的 x 方向坐标。外边界为自由面, 其余为反射边界。采用一维球对称网格, 分点为 10×100 。图 5 为 $t = 0.8$ 时刻的计算结果, 图 5(a) 为网格, 图 5(b) 为沿不同射线的密度。理论认为密度在 $t = 0.8$ 时刻趋于平台值 37.4。从图 5 可以看出, 密度在平台处逼近 37.4, 只是球心处会有所不同。

4.6 在 Cartesian 网格上的 Noh 问题^[8]

在二维柱坐标系中在 Cartesian 网格上计算 Noh 问题, 以测试方法在非射线型网格上计算柱对称问题的能力。计算区域为 $[0, 1] \times [0, 1]$, 初始状态为 $(\rho, u_x, u_y, e, \gamma) = (1, 0, -1, 10^{-5}, 1.67)$, 由此产生一个波速为 $1/3$, 波后密度为 16 的柱面激波。上边界为入射边界, 其余为反射边界。图 6 为

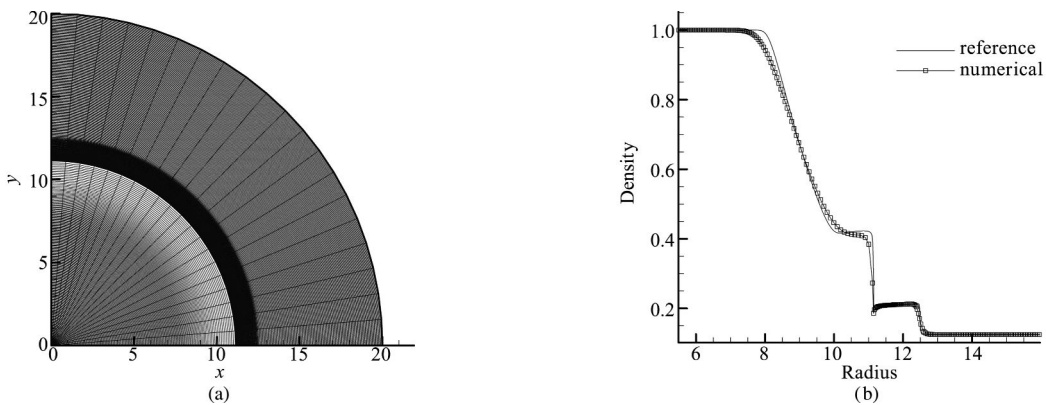


图 3 $t = 1.4$ 时刻的计算结果
Fig. 3 Results at time $t = 1.4$

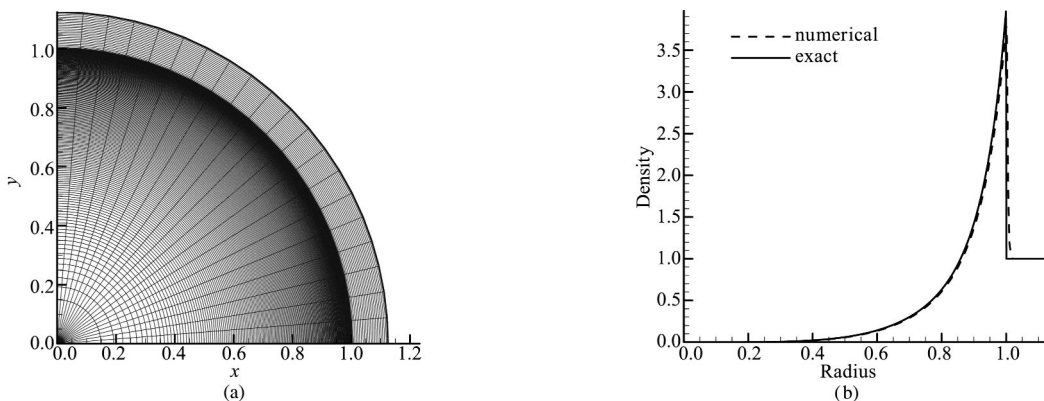


图 4 $t = 1.0$ 时刻的计算结果
Fig. 4 Results at time $t = 1.0$

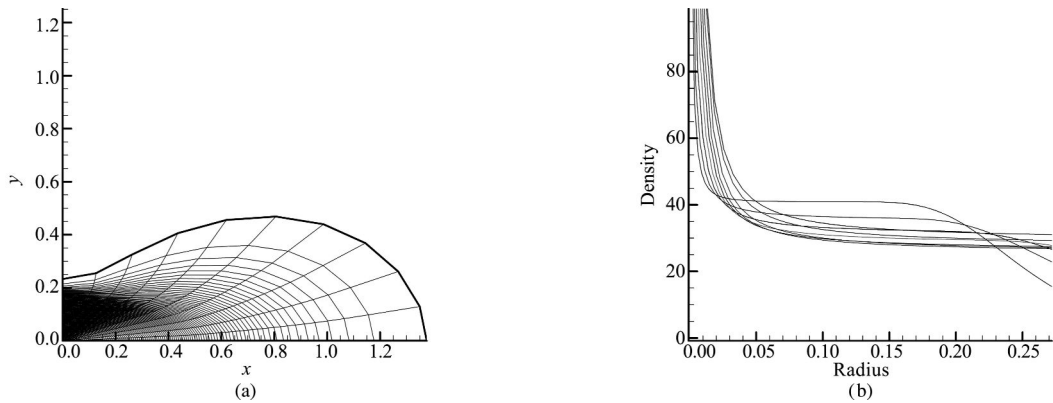


图5 $t=0.8$ 时刻的计算结果
Fig. 5 Results at time $t=0.8$

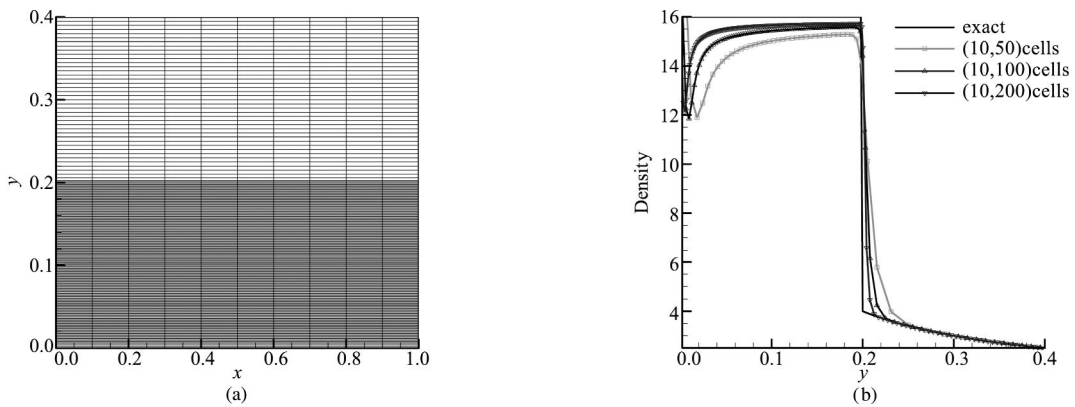


图6 $t=0.6$ 时刻的计算结果
Fig. 6 Results at time $t=0.6$

$t=0.6$ 时刻的计算结果,图 6(a)为 10×200 个分点的网格,图 6(b)为沿 y 方向不同分点的密度。从图 6 可以看出,该方法很好地保持二维柱对称,且随 y 方向网格加密,密度收敛于理论解。密度出现与算例 4.2 类似的壁热现象,不在本文的讨论范围。

5 结 论

本文给出一种 Godunov 型中心型拉氏方法,用于求解二维柱坐标系中的可压缩多介质 Euler 方程组,该方法完全在体积控制体上离散,能够保证质量、动量和总能量守恒。对一维球对称问题在一维球对称网格划分情况下该方法严格保一维球对称,精度测试显示该方法具有一阶精度。数值算例显示方法非常有效。

参考文献(References):

[1] Addessio F L, et al. CAVEAT: A Computer Code for Fluid Dynamics Problem with Large Distortion and Internal Slip[R]. Los Alamos Report LA-10613-MS, 1992.
[2] Benson D J. Computational methods in Lagrangian

and Eulerian hydrocodes[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1992, **99**(2): 235-394.

- [3] Maire P H, Abgrall R, Breil J, et al. A cell-centered lagrangian scheme for multidimensional compressible flow problems [J]. *SIAM J. Sci. Comput.*, 2007, **29**(4):1781-1824.
[4] Shen Z J, Yuan G W, Yue J Y, et al. A cell centered Lagrangian scheme in two-dimensional cylindrical geometry[J]. *Science in China Series A: Mathematics*, 2008, **51**(8):1479-1494.
[5] Cheng J, Shu C W. A cell centered Lagrangian scheme with the preservation of symmetry and conservation properties for compressible fluid flows in two-dimensional cylindrical geometry [J]. *J. Comput. Phys.*, 2010, **229**(19):7191-7206.
[6] Browne P L. Integrated Gradients: A Derivation of Some Difference Forms for the Equation of Motion for Compressible Flow in Two-Dimensional Lagrangian Hydrodynamics, using Integration of Pressures Over Surfaces[R]. Los Alamos National Laboratory Report LA-2105872-MS, 1986.
[7] 李德元,徐国荣,水鸿寿,等.二维非定常流体力学数

- 值方法[M]. 北京:科学出版社,1987. (LI De-yuan, XU Guo-rong, SHUI Hong-shou, et al. *Numerical Methods for two Dimensional Unsteady Fluid Mechanics*[M]. Beijing:Science Press,1987. (in Chinese))
- [8] Noh W F. Errors for calculations of strong shocks using artificial viscosity and artificial heat flux[J]. *J. Comput. Phys.*,1987,**72**(1):78-120.
- [9] Coggeshall S V, Meyer-Ter-Vehn J. Group invariant solutions and optimal systems for multidimensional hydrodynamics[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1992,**33**(10):3585-3601.
- [10] Solov'ev A, Shashkov M. Difference scheme for the Dirichlet particle method in cylindrical method in cylindrical coordinates, conserving symmetry for gasdynamic flow[J]. *Differential Equations*, 1988, **24**(7):817-823.
- [11] Sod G A. Review:a survey of several finite difference methods for systems of Nonlinear hyperbolic conservation laws[J]. *J. Comput. Phys.*,1978,**27**(1):1-31.

A cell-centered Lagrangian method with the property of preservation of conservation and symmetry in two-dimensional cylindrical coordinates

LIU Yan^{*}, TIAN Bao-lin, SHEN Wei-dong, WANG Shuang-hu, JIANG Song

(Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100094, China)

Abstract: We proposed a Godunov type cell-centered Lagrangian method for solving Euler equations of compressible gas dynamics in cylindrical coordinates. The method is discretized on the true volume and it can not only preserve the conservation property for all the conserved variables including mass, momentum and total energy but also preserve the one-dimensional spherical symmetry in two-dimensional cylindrical coordinates. The numerical results show the efficiency of the method.

Key words: cell-centered Lagrange method; spherical symmetry; two-dimensional cylindrical coordinates