

# 粘聚裂纹扩展的强化有限元 $h$ 型网格自适应模拟

凌道盛\*, 卜令方, 涂福彬

(浙江大学 软弱土与环境土工教育部重点实验室 岩土工程研究所, 杭州 310058)

**摘要:**非连续变形分析和非规则节点处理是基于单元细划的粘聚裂纹扩展网格自适应模拟的关键。首先,利用强化有限单元法中数学单元和物理单元分离的特点,通过引入过渡单元,将适用于非连续变形描述的数学模式覆盖法和方便处理非规则节点的物理模式重构法结合,提出了强化有限单元法的统一关联法则,并导出了相应的单元列式。其次,基于数学裂纹尖端影响域和裂尖单元尺寸,提出了基于强化有限单元法的粘聚裂纹扩展过程模拟的  $h$  型网格自适应策略。最后,通过两个算例验证了本文方法的合理性和有效性。

**关键词:**粘聚裂纹;  $h$  型网格自适应; 非连续变形; 非规则节点; 强化有限单元法

**中图分类号:** O346.1; TU4      **文献标志码:** A      doi:10.7511/jslx201402017

## 1 引言

结构断裂、岩土体滑坡等引起的建(构)筑物破坏对人类的生命财产安全构成巨大威胁,再现建(构)筑物破坏过程、揭示破坏机理对预防灾害发生具有十分重要的意义。通常,建(构)筑物破坏都伴随有裂纹或剪切带扩展等非连续变形。对于混凝土等准脆性材料,裂纹尖端存在断裂过程区,该区域内材料未完全开裂,仍能传递一定的粘聚力。这种裂纹通常被称为粘聚裂纹,断裂过程区内粘聚力与裂纹两侧相对位移间的非线性关系常用粘聚区域模型 CZM (Cohesive Zone Model)<sup>[1,2]</sup> 来表征。剪切带在剪切滑移过程中也传递一定的法向和切向作用, Castelli 等<sup>[3]</sup> 和凌道盛等<sup>[4]</sup> 将剪切带视为粘聚裂纹,采用粘聚区域模型模拟剪切带内的作用。综上所述,粘聚裂纹扩展的数值模拟成为数值再现土木工程破坏过程的核心。

粘聚裂纹扩展的有限元模拟存在两个方面的困难。首先,常规有限单元法不适于模拟非连续变形问题。为此,先后提出一些新的理论和方法,例如数值流形法<sup>[5]</sup>、扩展有限元法<sup>[6]</sup>、广义有限元法<sup>[7]</sup>及 Hansbo 法<sup>[8]</sup>。凌道盛等<sup>[9,10]</sup>将常规的有限单元分离为几何上相互独立的数学单元和物理单元,通过数学模式覆盖法建立数学单元与物理单

元的位移关联,提出了强化有限单元法(FEM<sup>++</sup>),实现了非连续变形描述。其次,裂纹尖端附近应力场和单元尺寸对数值模拟结果影响很大,由于多数工程问题中裂纹产生的位置和扩展的路径事先并不确定,故大范围网格细划将导致计算量大幅提高,而根据裂纹扩展动态调整网格则可兼顾计算精度和计算效率。Khoei 等<sup>[11]</sup>基于 Zienkiewicz-Zhu 误差估计因子,采用  $h$  型自适应有限元研究了粘聚裂纹扩展问题。黄茂松等<sup>[12]</sup>认为,在应变局部化引起的渐进破坏问题分析中,采用精确的总体误差表达式是不合适的,也没必要。Lo 等<sup>[13]</sup>和 Prudhomme 等<sup>[14]</sup>指出,裂尖应力场等物理量的精度主要取决于裂纹尖端的网格情况,而与总体能量范数误差之间并不存在很强的联系。因此,直接细划裂纹尖端一定区域内的网格,使之满足一定密度要求成为裂纹扩展问题网格自适应的常用方法。

网格重划(remeshing)和单元细划(element subdivision)是  $h$  型网格自适应的两种常用方法。Khoei 等<sup>[11]</sup>和黄茂松等<sup>[12]</sup>采用了网格重划的方法。与网格重划相比,单元细划具有新旧网格间状态量传递方便、易于实现等优点。杨庆生等<sup>[15]</sup>、Unger 等<sup>[16]</sup>和 Fries 等<sup>[17]</sup>通过细划裂纹尖端附近的单元实现了裂纹扩展的有效模拟。单元细划不可避免地引入非规则节点,目前,多点约束法是处理非规则节点的常用方法,但存在自由度多、数值稳定性差的缺点。针对非规则节点问题,凌道盛等<sup>[18]</sup>基于强化有限单元法,提出了物理模式重构的单元位移关联法则,有效地克服了多点约束法的不足。

收稿日期: 2012-05-07; 修改稿收到日期: 2013-12-10.

基金项目: 高等学校博士学科点专项科研基金(20100101110027);

浙江省自然科学基金重点(LZ12E09001)资助项目.

作者简介: 凌道盛\*(1968-),男,博士,教授,博士生导师  
(E-mail: dsling@zju.edu.cn).

针对裂纹扩展模拟中非连续变形分析和网格自适应两个关键问题,本文基于强化有限单元法,结合数学模式覆盖法和物理模式重构法两种关联法则,提出一种适合裂纹扩展网格自适应模拟的统一关联法则。在此基础上提出了基于裂纹尖端局部区域网格细划的粘聚裂纹扩展  $h$  型网格自适应策略。

## 2 统一的强化有限单元关联法则

强化有限单元法以数学单元 ME(Mathematical Element)的节点位移为基本未知量,在数学单元上构造位移插值函数,物理单元 PE(Physical Element)的位移模式则由数学单元位移插值函数通过关联法则确定。

数学模式覆盖法<sup>[9]</sup>和物理模式重构法<sup>[18]</sup>是强化有限单元法的两种常用的关联法则。前者适合描述非连续变形,已成功应用于粘聚裂纹扩展模拟<sup>[10,19]</sup>,后者可以方便地处理非规则节点,已成功应用于  $h$  型网格自适应。针对粘聚裂纹扩展过程的网格自适应模拟需要同时采用两种不同的关联法则,本节以平面等参单元为例提出一种统一的关联法则。

### 2.1 数学模式覆盖法

基于数学单元构建的插值函数,其定义域为数学单元内部。数学模式覆盖法直接将插值函数的定义域延拓至整个物理单元,而插值函数的形式不变。对于等参单元,数学单元的位移插值函数为

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}^{\text{ME}}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{u}^{\text{ME}} \quad (1)$$

式中  $\mathbf{N}^{\text{ME}}$  为数学单元的插值形函数矩阵,  $\boldsymbol{\xi} = \{\xi, \eta\}^T$  为数学单元对应的母单元自然坐标(以下简称为数学单元自然坐标),  $\mathbf{u}^{\text{ME}}$  为数学单元的节点位移矢量。

根据物理节点与数学单元间的几何关系,可得各物理节点在数学单元中的自然坐标,记第  $i$  个物理节点的数学单元自然坐标为  $(\xi_i, \eta_i)$ 。与常规有限单元不同,物理节点可能位于数学单元区域外。也就是说,对于四边形等参单元,下式并不总是成立

$$\xi_i \in [-1, 1], \eta_i \in [-1, 1] \quad (2)$$

物理单元内任一点的数学单元自然坐标可通过插值得到

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{N}^{\text{PE}}(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\xi}^{\text{PE}} \quad (3)$$

式中  $\mathbf{N}^{\text{PE}}$  为物理单元的插值形函数矩阵,  $\boldsymbol{\xi}^{\text{PE}}$  为物理单元节点的数学单元自然坐标矢量,  $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha, \beta\}^T$  为物理单元对应的母单元自然坐标(以下简称为物

理单元自然坐标),对于四边形等参单元,满足

$$\alpha \in [-1, 1], \beta \in [-1, 1] \quad (4)$$

将式(1)的定义域延拓至整个物理单元,即将式(3)代入式(1),可得物理单元的位移模式。

### 2.2 物理模式重构法

首先将物理节点的数学单元自然坐标  $\xi_i$  代入式(1),得到用数学单元节点位移矢量表示的物理单元节点位移矢量为

$$\mathbf{u}^{\text{PE}} = \mathbf{T}^{\text{PM}} \mathbf{u}^{\text{ME}} \quad (5)$$

$$\mathbf{T}^{\text{PM}} = [(\mathbf{N}_1^{\text{ME}})^T, (\mathbf{N}_2^{\text{ME}})^T, \dots, (\mathbf{N}_{NP}^{\text{ME}})^T]^T \quad (6)$$

式中  $\mathbf{N}_i^{\text{ME}} = \mathbf{N}^{\text{ME}}(\xi_i)$ ,  $NP$  为物理单元的节点数。

然后,在物理单元上再次采用等参插值,即模式重构,可得

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}^{\text{PE}}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{u}^{\text{PE}} = \mathbf{N}^{\text{PE}}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{T}^{\text{PM}} \mathbf{u}^{\text{ME}} \quad (7)$$

### 2.3 统一的关联法则

统一关联法则的基本思想是,通过构造一个过渡单元 TE(Transitional Element)来联系数学单元和物理单元的位移场,先由数学单元的位移插值函数通过“模式重构”获得过渡单元位移插值函数,再通过“模式覆盖”确定物理单元的位移模式,如图1所示。称定义过渡单元的节点为过渡节点,称过渡单元对应的母单元坐标为过渡单元自然坐标。为方便起见,在数学单元自然坐标系中定义过渡节点,在过渡单元自然坐标系中定义物理节点。

根据上述思想,可得物理单元的位移模式和坐标插值为

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}^{\text{TE}}(\boldsymbol{\lambda}) \mathbf{T}^{\text{TM}} \mathbf{u}^{\text{ME}} \quad (8)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{N}^{\text{TE}}(\boldsymbol{\lambda}) \mathbf{T}^{\text{TM}} \mathbf{x}^{\text{ME}} \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{N}^{\text{PE}}(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{\lambda}^{\text{PE}} \quad (10)$$

式中

$$\mathbf{T}^{\text{TM}} = [(\mathbf{N}_1^{\text{ME}})^T, (\mathbf{N}_2^{\text{ME}})^T, \dots, (\mathbf{N}_{NT}^{\text{ME}})^T]^T \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\lambda}^{\text{PE}} = \{\boldsymbol{\lambda}_1^T, \boldsymbol{\lambda}_2^T, \dots, \boldsymbol{\lambda}_{NP}^T\}^T \quad (12)$$

式中  $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda, \kappa\}^T$  为过渡单元自然坐标矢量,  $\boldsymbol{\lambda}^{\text{PE}}$  为物理单元节点的过渡单元自然坐标矢量,  $\mathbf{N}^{\text{TE}}$  为过渡单元插值形函数矩阵,  $NT$  为过渡单元的节点数。



图1 统一关联法则

Fig. 1 Uniform rule

不难看出,当过渡单元、数学单元和物理单元三者重合时,强化有限单元法退化为常规有限单元法;当过渡单元与数学单元重合时,统一关联法则退化为数学模式覆盖法;当过渡单元与物理单元重合时,统一关联法则又可退化为物理模式重构法。通过式(8)即可统一方便地描述非连续变形和处理非规则节点。

### 3 基于统一关联法则的单元列式

为计算单元应变,首先必须求得  $\partial N_i^{TE}/\partial \mathbf{x}$ 。由式(9)可得

$$\mathbf{J}^{MT} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \sum_{i=1}^{NM} \sum_{j=1}^{NT} N_i^{ME}(\boldsymbol{\xi}_j) \mathbf{x}_i \left[ \frac{\partial N_i^{TE}(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right]^T \quad (13)$$

根据复合函数求导法则可得

$$\frac{\partial N_i^{TE}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial N_i^{TE}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial \mathbf{x}} = (\mathbf{J}^{MT})^{-1} \frac{\partial N_i^{TE}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \quad (14)$$

利用式(8)和式(14)可以导出物理单元的应变矢量为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}^{TE}(\boldsymbol{\lambda}) \mathbf{T}^{TM} \mathbf{u}^{ME} \quad (15)$$

式中

$$\mathbf{B}^{TE}(\boldsymbol{\lambda}) = [B_1^{TE}(\boldsymbol{\lambda}), B_2^{TE}(\boldsymbol{\lambda}), \dots, B_{NT}^{TE}(\boldsymbol{\lambda})] \quad (16)$$

$$B_i^{TE}(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^{TE}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_i^{TE}}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_i^{TE}}{\partial y} & \frac{\partial N_i^{TE}}{\partial x} \end{bmatrix}^T \quad (17)$$

利用虚功原理,并考虑到只有物理单元对虚功方程有贡献,经推导可以得出单元的元素矩阵如下:

$$\mathbf{K}^e = (\mathbf{T}^{TM})^T \int_{\Omega^{PE}} [\mathbf{B}^{TE}(\boldsymbol{\lambda})]^T \mathbf{D} \mathbf{B}^{TE}(\boldsymbol{\lambda}) d\Omega \mathbf{T}^{TM} \quad (18)$$

$$\mathbf{F}_f^e = (\mathbf{T}^{TM})^T \int_{\Omega^{PE}} [\mathbf{N}^{TE}(\boldsymbol{\lambda})]^T \mathbf{f} d\Omega \quad (19)$$

$$\mathbf{F}_t^e = (\mathbf{T}^{TM})^T \int_{\Gamma_i^{PE}} [\mathbf{N}^{TE}(\boldsymbol{\lambda})]^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (20)$$

$$\mathbf{F}_p^e = (\mathbf{T}^{TM})^T [\mathbf{N}^{TE}(\boldsymbol{\lambda}_p)]^T \mathbf{p} \quad (21)$$

式中  $\mathbf{K}^e$ ,  $\mathbf{F}_f^e$ ,  $\mathbf{F}_t^e$  和  $\mathbf{F}_p^e$  分别为单元刚度阵、体积力、表面分布力和集中力等效节点力,  $\mathbf{D}$  为材料系数矩阵,  $\Omega^{PE}$  为物理单元占据的区域,  $\Gamma_i^{PE}$  为表面力作用的边界,  $\boldsymbol{\lambda}_p$  为集中力作用点的过渡单元自然坐标,  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{t}$  和  $\mathbf{p}$  分别为体积力、表面力和集中力。

下面以单元刚度矩阵为例说明积分的数值实现。由式(10)可得

$$\mathbf{J}^{TP} = \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \sum_{i=1}^{NP} \boldsymbol{\lambda}_i^{PE} \left[ \frac{\partial N_i^{PE}(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \right]^T \quad (22)$$

利用式(13)和式(22),可得

$$d\Omega = dx dy = |\mathbf{J}^{MT}| |\mathbf{J}^{TP}| d\alpha d\beta \quad (23)$$

式中  $||$  代表矩阵的行列式。

将式(23)代入式(18)并利用式(10),采用常规的积分方法,即可求得单元的刚度矩阵。

## 4 裂纹扩展模拟的网格自适应策略

### 4.1 粘聚裂纹问题的一般表述

对于含粘聚裂纹  $\Gamma_c$  的区域  $\Omega$ , 其弱形式的控制方程为

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega + \int_{\Gamma_c} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w}(\mathbf{v}) d\Gamma = \int_{\Gamma_F} \bar{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{v} d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{U} \quad (24)$$

具体推导过程可参见文献[10]。式中,  $\mathbf{v}$  为几何容许位移场,  $\mathbf{U}$  为所有几何容许位移场的集合,  $\bar{\mathbf{F}}$  为边界  $\Gamma_F$  上的给定外力,  $\mathbf{t}$  和  $\mathbf{w}$  为断裂过程区内的粘聚力和相对位移, 本文采用图 2 所示的粘聚区域模型表征二者间的非线性关系<sup>[20]</sup>。峰值强度  $f_t$  (或  $f_s$ ) 和断裂能  $G$  ( $\mathbf{t}$ - $\mathbf{w}$  曲线与横轴所围的面积) 为粘聚区域模型中两个最重要的参数。一般采用粘聚裂纹单元来离散  $\Gamma_c$ 。

### 4.2 网格自适应策略

Prudhomme 等<sup>[14]</sup>认为, 远离裂纹区域的网格质量对裂纹扩展影响不大。为此, 本文假设存在两个物理量: 裂纹影响域半径  $R$  和裂纹尖端单元尺寸  $h$ 。每一步裂纹扩展前, 以数学尖端为圆心、以  $R$  为半径划定圆形影响域, 所有物理单元位于影响域内或与影响域相交的单元, 都必须逐级细化至物理单元尺寸不大于  $h$  为止。

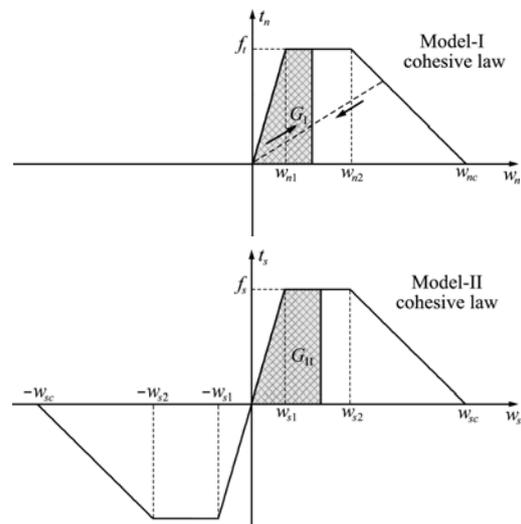


图2 复合型粘聚本构关系  
Fig. 2 Mixed-mode cohesive law

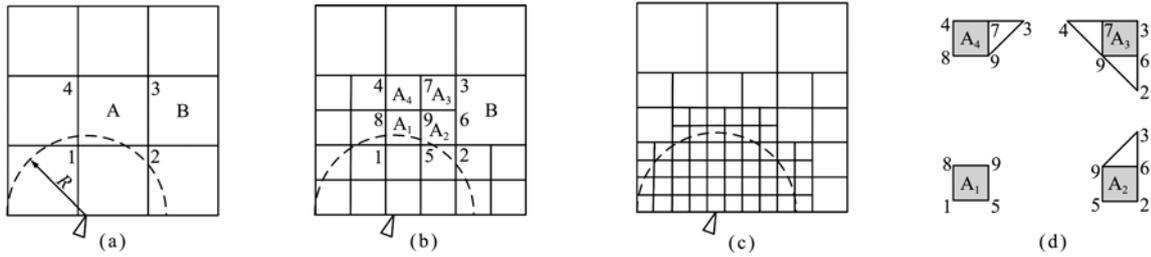


图3 裂尖单元细划过程及不规则节点处理  
Fig. 3 Refining process of crack-tip elements and handling of hanging nodes



图4 非连续变形描述及粘聚裂纹单元  
Fig. 4 Representation of crack and cohesive crack element

如图3所示,当裂纹尖端到达图3(a)所示位置时,单元细划一次后的网格如图3(b)所示,新增节点6和节点7为非规则节点。单元间位移连续条件使得非规则节点的位移并不独立,采用统一关联法则可以方便地实现单元间连续。以单元A2为例(图3(d)),定义其数学单元为2-3-9-5,物理单元为2-6-9-5,过渡单元与物理单元重合,仍保持良好的几何形状,则6号节点的自由度由节点2和节点3确定,可保证单元A2与B间的位移连续性。

若图3(b)所示影响域内单元需进一步细划,为避免影响域内外单元尺寸变化梯度过大,本文规定非规则节点的阶次不超过1。因此,细划单元A2前需先细划单元B,细划后的网格如图3(c)所示。

裂尖影响域内单元完成细划和状态量传递后,在当前荷载下迭代至新的平衡状态,再调整荷载使得裂尖应力场满足扩展条件,并确定下一个扩展单元和扩展方向。为简化分析,假定下一个裂纹扩展单元不含非规则节点;否则,细划邻单元直至其不含非规则节点为止。以图4为例,物理单元PE与其对应的数学单元ME,当PE被粘聚裂纹CD穿越后,形成两个新的物理单元PE1和PE2,分别采用两个共域的数学单元ME1和ME2描述其离散位移场,如图4(b,c)所示。其中,数学节点a'和节点b'是为了描述非连续变形而增加的富集节点。过渡单元仍与数学单元重合,从而保证了良好的插值性态。此外,还需增加一个粘聚裂纹单元,其数学单元为ME3(a-b'-c-d-a'-b-c-d),物理单元为裂纹段CD<sup>[10]</sup>。

利用式(8)可分别给出两个物理单元的位移模式,相减即可获得裂纹面CD两侧的相对位移,再

代入控制方程,可得粘聚裂纹单元的元素矩阵<sup>[10]</sup>。

### 4.3 粘聚裂纹扩展网格自适应模拟步骤

基于强化有限单元法,粘聚裂纹扩展的h型网格自适应模拟的具体实施步骤如下:

- (1) 划分初始网格,给定裂纹影响域半径R和裂尖单元尺寸h。
- (2) 加载分析,如果有新的裂纹产生或已有裂纹尖端继续扩展,转下一步;否则,结束分析。
- (3) 细划裂纹影响域内单元,完成状态量传递,并迭代至平衡状态。
- (4) 调整荷载使得裂尖应力场满足裂纹扩展条件,扩展裂纹。判断裂纹是否贯通,如贯通,结束分析;否则,迭代至平衡状态。
- (5) 转步骤(2)进行下一步裂纹扩展。

## 5 数值算例

根据强化有限单元法统一关联法则及粘聚裂纹扩展模拟网格自适应策略,作者编制了相应的程序。本节将通过两个典型算例,即三点弯梁和单边缺口梁,验证方法的有效性。

以下算例均采用Wells等<sup>[21]</sup>提出的裂尖加权平均应力作为裂纹扩展判断的依据,裂纹扩展准则为最大主应力准则。由于裂纹扩展过程中发生结构软化,本文采用柱面弧长法控制加载过程。

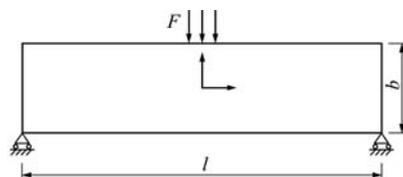


图5 三点弯梁  
Fig. 5 Three-Point Bending Beam(TPB)

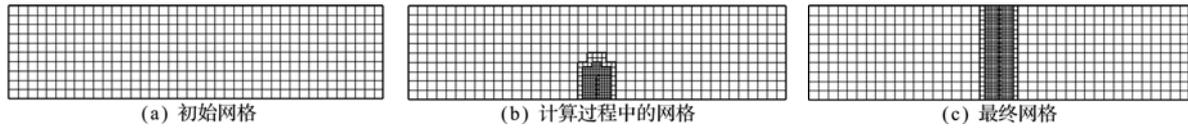


图6 有限元网格  
Fig. 6 Finite element meshes for TPB

5.1 三点弯梁

如图5所示无初始裂纹的混凝土平面应力三点弯梁<sup>[22]</sup>,长  $l=0.6$  m,宽  $b=0.15$  m,厚  $t=0.15$  m。材料杨氏模量  $E=36.5$  GPa,泊松比  $\nu=0.1$ ,峰值强度  $f_t=3.19$  MPa。荷载  $F$  均匀作用在梁上表面中心  $0.03$  m 的宽度范围内,上表面中心点水平向、下表面两角点竖向位移固定。

初始网格如图6(a)所示,把梁均匀离散为  $40 \times 10$  个单元,单元尺寸为  $0.015$  m。分析过程中,取裂纹影响域半径为  $1.5$  倍初始网格单元尺寸 ( $0.0225$  m)。

裂纹在梁底部中间位置首先出现,随着裂纹的扩展,裂纹尖端附近的单元不断细化,图6(b,c)分别给出了裂尖单元尺寸  $0.00375$  m(即相对初始单元细化两次)、裂纹长度(到数学尖端)分别为  $0.0375$  m 和  $0.15$  m 时的网格。

图7给出了断裂能为  $5$  N/m、初始网格相同、裂尖单元尺寸不同时无量纲荷载-梁上表面中点竖向位移曲线。可以看出,当裂尖单元尺寸为  $0.00375$  m 时,本文给出的荷载-位移曲线与 Moes 等<sup>[22]</sup>利用扩展有限元法得到的结果相近,比较发现前者节点数略少于后者。随着裂尖单元尺寸的减小,荷载-位移曲线呈现越来越显著的跳回(snap-back)特性,曲线随裂尖单元尺寸的减小缓慢收敛。这主要是由于断裂能过小导致断裂过程区很短引起的。图8给出了断裂能为  $500$  N/m 时的荷载-位移曲线,可以看出,随着裂纹尖端附近单元密度

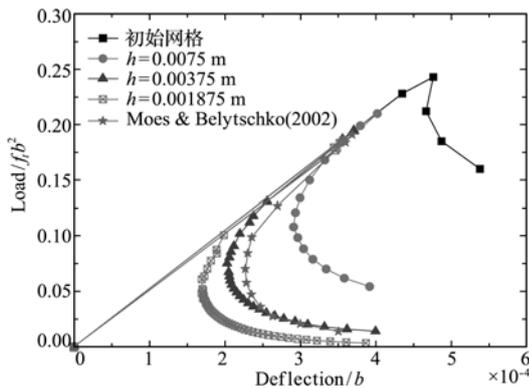


图7 不同细化程度无量纲荷载-位移曲线( $G=5$  N/m)  
Fig. 7 Non-dimensional load-deflection curves( $G=5$  N/m)

的增加,荷载-位移曲线快速收敛,当裂尖单元尺寸小于  $0.00375$  m 时,荷载-位移曲线基本不变,并与 Moes 等采用细密网格给出的计算结果一致。比较图7和图8可以看出,对于粘聚裂纹,断裂能或断裂过程区长度对达到收敛所需的裂尖单元尺寸具有决定性的影响。

5.2 单边缺口梁

如图9所示平面应变沥青混凝土筒支梁<sup>[23]</sup>,长为  $376$  mm,高为  $100$  mm,厚为  $75$  mm。下表面离中心  $65$  mm 处有一初始裂纹,高为  $19$  mm。下表面距两角点  $26$  mm 处竖向约束,上表面跨中作用集中荷载  $P$ 。材料弹性模量  $E=14.2$  GPa,泊松比  $\nu=0.35$ ,峰值强度  $f_t=3.2$  MPa,断裂能  $G=241$  N/m。

初始网格被离散为  $36 \times 10$  个单元,裂尖单元尺寸为  $10$  mm。分析过程中,裂纹影响域半径为  $25$  mm。图10为  $h=2.5$  mm 时裂纹扩展过程中的有限元网格。

图11给出了荷载-裂纹张开位移(CMOD)关系曲线。可以看出,不采用网格自适应时,P-CMOD曲线出现较大幅度的震荡,裂尖单元尺寸为  $5$  mm(局部细化一次)时,震荡现象明显变得较弱,而当裂尖单元尺寸小于  $2.5$  mm 时,震荡消失,P-CMOD曲线趋于收敛。

图12则给出了不同裂尖单元尺寸时的裂纹扩展路径。可以看出,裂尖单元尺寸小于  $2.5$  mm 时,裂纹扩展路径几乎完全重合,且与 Song 等<sup>[23]</sup>的试验包络线吻合得非常好。

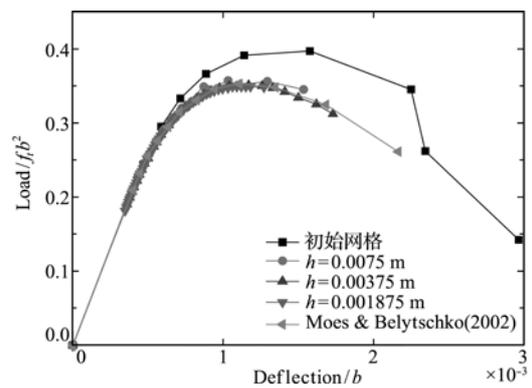


图8 无量纲荷载-位移曲线( $G=500$  N/m)  
Fig. 8 Non-dimensional load-deflection curves( $G=500$  N/m)

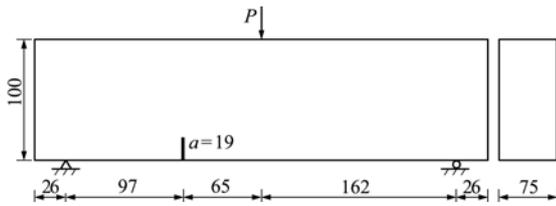


图9 单边缺口梁(单位:mm)

Fig. 9 Single-Edge Notched Beam (SENB) (unit: mm)

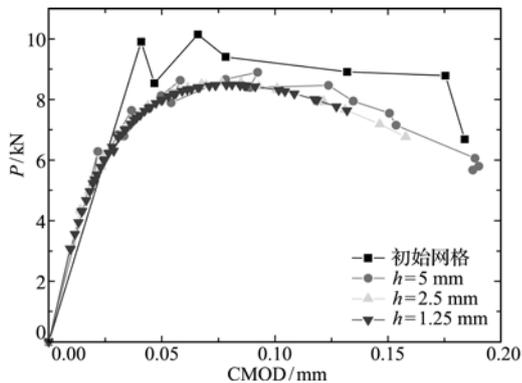


图11 不同细划程度的荷载-位移曲线

Fig. 11 P-CMOD curves for different crack-tip element sizes

## 6 结论

根据强化有限单元法中数学单元和物理单元相分离的特点,提出了结合数学模式覆盖法和物理模式重构法的统一关联法则,以及模拟粘聚裂纹扩展的  $h$  型网格自适应策略,并通过算例验证了理论和方法的合理性及有效性。得到如下结论。

(1) 统一关联法则同时实现了非连续变形描述和非规则节点处理,解决了基于单元细划的粘聚裂纹扩展网格自适应模拟的两个关键问题。

(2) 本文提出的基于统一关联法则的强化有限元  $h$  型网格自适应策略具有自由度少、计算效率高和裂纹扩展过程中过渡单元不畸形成等优点。

(3) 断裂能或断裂过程区长度对裂尖单元尺寸的确定影响较大,断裂能越小、断裂过程区越短,达到收敛所需裂尖单元尺寸越小,随网格细划收敛速度越慢。

## 参考文献(References):

- [1] Dugdale D S. Yielding of steel sheets containing slits [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1960, **8**(2): 100-108.
- [2] Barenblatt G I. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture [J]. *Advances in Applied Mechanics*, 1962, **7**(1): 55-129.
- [3] Castelli M, Allodi A, Scavia C. A numerical method for the study of shear band propagation in soft rocks [J]. *International Journal for Numerical and Ana-*

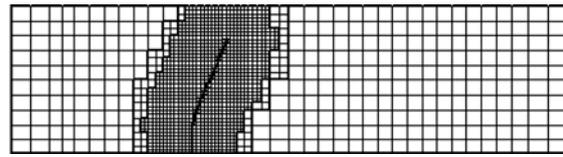


图10 自适应网格和裂纹扩展路径

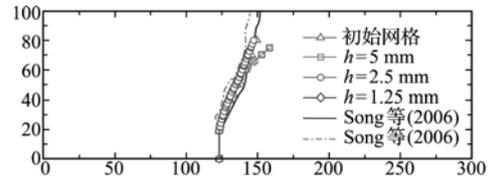
Fig. 10 Adaptive mesh and crack trajectory ( $h=2.5$  mm)

图12 裂纹扩展路径

Fig. 12 Crack trajectories for SENB

*lytical Methods in Geomechanics*, 2009, **33**(13): 1561-1587.

- [4] 凌道盛,涂福彬,卜令方. 基于粘聚区域模型的边坡渐进破坏过程强化有限元分析 [J]. *岩土工程学报*, 2012, **34**(8): 1387-1393. (LING Dao-sheng, TU Fu-bin, BU Ling-fang. Enhanced finite element analysis of progressive failure of slopes based on cohesive zone model [J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2012, **34**(8): 1387-1393. (in Chinese))
- [5] 石根华. 数值流形方法与非连续变形数值分析新方法 [M]. 裴觉民,译. 北京:清华大学出版社,1997. (SHI Gen-hua. *Numerical Manifold Method and Discontinuous Deformation Analysis* [M]. PEI Jue-min, translated. Beijing: Tsinghua University Press, 1997. (in Chinese))
- [6] Moes N, Dollow J, Belytschko T. A finite element method for crack growth without remeshing [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, **46**(1): 131-150.
- [7] Stroubulis T, Copps K, Babuska I. The generalized finite element method [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, **190**(32): 4081-4193.
- [8] Hansbo A, Hansbo P. A finite element method for simulation of strong and weak discontinuities in solid mechanics [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004, **193**(33): 3523-3540.
- [9] 凌道盛,徐小敏,陈云敏. 数学网格和物理网格分离的有限单元法(I): 基本理论 [J]. *计算力学学报*, 2009, **26**(3): 401-407. (LING Dao-sheng, XU Xiao-min, CHEN Yun-min. An enhanced finite element method with separate mathematical and physical mesh (I): theory [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2009, **26**(3): 401-407. (in Chinese))
- [10] 凌道盛,韩超,陈云敏. 数学网格和物理网格分离的有限单元法(II): 粘聚裂纹扩展问题中的应用 [J]. *计算力学学报*, 2009, **26**(3): 408-414. (LING Dao-sheng,

- HAN Chao, CHEN Yun-min. An enhanced finite element method with separate mathematical and physical mesh (II): application in propagation of cohesive crack [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2009, **26**(3): 408-414. (in Chinese))
- [11] Khoei A R, Moslemi H, Ardakany K M, et al. Modeling of cohesive crack growth using an adaptive mesh refinement via the modified-SPR technique [J]. *International Journal of Fracture*, 2009, **159**(1): 21-41.
- [12] 黄茂松, 钱建固, 吴世明. 土坝动力应变局部化与渐进破坏的自适应有限元模拟 [J]. *岩土工程学报*, 2001, **23**(3): 306-310. (HUANG Mao-song, QIAN Jian-gu, WU Shi-ming. An adaptive finite element method for strain localization and progressive failure of earth dam under earthquake [J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2001, **23**(3): 306-310. (in Chinese))
- [13] Lo S H, Lee C K. Solving crack problems by an adaptive refinement procedure [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1992, **43**(2): 147-163.
- [14] Prudhomme S, Oden J T. On goal-oriented error estimation for elliptic problems: application to the control of pointwise errors [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1999, **176**(1): 313-331.
- [15] 杨庆生, 杨卫. 断裂过程的有限元模拟 [J]. *计算力学学报*, 1997, **14**(4): 407-412. (YANG Qing-sheng, YANG Wei. Finite element simulation of fracture process [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 1997, **14**(4): 407-412. (in Chinese))
- [16] Unger J F, Eckardt S, Konke C. Modelling of cohesive crack growth in concrete structures with the extended finite element method [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2007, **196**(41): 4087-4100.
- [17] Fries T P, Byfut A, Alizada A, et al. Hanging nodes and XFEM [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2011, **86**(4-5): 404-430.
- [18] 凌道盛, 卜令方, 黄根清, 等. 平面强化有限单元法的  $h$  型网格自适应 [J]. *浙江大学学报(工学版)*, 2011, **45**(12): 2150-2158. (LING DAO-sheng, BU Ling-fang, HUANG Gen-qing, et al.  $h$ -adaptive enhanced finite element method for plane problems [J]. *Journal of Zhejiang University (Engineering Science)*, 2011, **45**(12): 2150-2158. (in Chinese))
- [19] Ling D S, Yang Q D, Cox B. An augmented finite element method for modeling arbitrary discontinuities in composite materials [J]. *International Journal of Fracture*, 2009, **156**(1): 53-73.
- [20] Yang Q D, Thouless M D, Ward S M. Elastic-plastic mode-II fracture of adhesive joints [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, **38**(18): 3251-3262.
- [21] Wells G N, Slusly L J. A new method for modelling cohesive cracks using finite elements [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, **50**(12): 2667-2682.
- [22] Moes N, Belytschko T. Extended finite element method for cohesive crack growth [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2002, **69**(7): 813-833.
- [23] Song S H, Paulino G H, Buttlar W G. A bilinear cohesive zone model tailored for fracture of asphalt concrete considering viscoelastic bulk material [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2006, **73**(18): 2829-2848.

## Modelling of cohesive crack propagation using enhanced finite element method via $h$ -adaptive technique

LING Dao-sheng\*, BU Ling-fang, TU Fu-bin

(MOE Key Laboratory of Soft Soils and Geoenvironmental Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China)

**Abstract:** Representation of discontinuities and handling of hanging nodes are two key points of numerical simulation of cohesive crack propagation via  $h$ -adaptive technique such as element subdivision. Firstly, a unified correlation rule for enhanced finite element method, as a combination of coverage of mathematical mode, suitable for representing discontinuous displacement field, and reconstruction of physical mode, suitable for dealing with hanging nodes, is proposed by introducing a transitional element between mathematical element and physical element. The corresponding finite element formulas are then derived. Secondly, a scheme for  $h$ -adaptivity, with two indexes, i. e., the influencing radius of mathematical crack tip and the crack-tip mesh size, is put forward for modeling of cohesive crack propagation. The reasonability and effectiveness of the proposed approach is validated against two examples.

**Key words:** cohesive crack;  $h$ -adaptivity; discontinuous deformation; hanging nodes; enhanced finite element method