

一种基于有限元法和弹性接触理论的 齿轮啮合刚度改进算法

常乐浩, 刘 更, 郑雅萍, 丁云飞
(西北工业大学 机电学院, 西安 710072)

摘 要: 提出了一种将有限元法和弹性接触理论相结合的齿轮啮合刚度计算方法. 该方法利用子结构法提取齿面原始柔度矩阵并分离出接触点弯曲变形, 根据线弹接触变形解析公式计算接触变形, 通过求解非线性变形协调方程得到齿轮时变啮合刚度和齿面载荷分布. 以一对齿轮副为例, 计算的啮合刚度与航空标准计算结果相差在 6% 以内. 该方法发挥了有限元法在预测物体整体变形方面的优势, 同时结合弹性接触理论能够准确计算局部接触变形的优点, 与常规有限元法相比, 能够有效地提升计算效率. 由于接触变形问题的非线性, 啮合刚度随总啮合力增加呈现非线性增大的趋势.

关键词: 啮合刚度; 载荷分布; 有限元法; 线接触理论; 非线性啮合刚度

中图分类号: V233.12; TH113.1

文献标志码: A

A modified method for determining mesh stiffness of gears based on finite element method and elastic contact theory

CHANG Le-hao, LIU Geng, ZHENG Ya-ping, DING Yun-fei
(School of Mechanical Engineering,
Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: A method for determining mesh stiffness of gears was presented using a combination of the finite element method and elastic contact theory. The contact point bending deformations were separated from the original compliances matrix which was obtained using sub-structure method, while contact deformations were derived using an analytical formula of elastic line contact deformation. The time-varying mesh stiffness and load distributions of tooth could be obtained by solving the nonlinear deformation compatibility equations. Taking a gear pair as an example, the mesh stiffness using the presented method is within 6% difference with the aerospace standard. As finite element method has an obvious advantage in predicting global deflection and the elastic contact theory can compute local contact deformation accurately, the method presented combines these advantages to increase the computation efficiency compared to conventional finite element method. Given the nonlinearity of contact deformations problem, the mesh stiffness is increasing nonlinearly with the increase of total mesh force.

Key words: mesh stiffness; load distribution; finite element method;
line-contact theory; nonlinear mesh stiffness

收稿日期: 2013-01-17

基金项目: 国家自然科学基金(51275423); 高等学校创新引智计划(B13044);

长安大学高速公路筑养装备与技术教育部工程研究中心开放基金(2013G1502057)

作者简介: 常乐浩(1987-), 男, 河南汝阳人, 博士生, 研究方向为齿轮啮合理论、齿轮系统动力学等。

齿轮啮合刚度的时变性是齿轮系统产生振动的主要内部激励之一,国内外学者已对啮合刚度的算法进行了大量的研究.啮合刚度求解的核心问题是计算轮齿的变形.经典的材料力学方法和弹性力学方法能够较准确地计算直齿轮副的变形,但对斜齿轮副的计算就有失准确性.随着计算机技术的发展,越来越多的学者借助于有限元法求解斜齿轮副的变形.

国内外学者在计算齿轮啮合刚度和传动误差时应用广泛的一种方法为齿轮承载接触分析 (loaded tooth contact analysis, LTCA) 方法^[1-5],该方法基于 Conry 等建立的弹性接触问题求解模型^[6-7].这类模型通过计算可能接触区域接触点的柔度矩阵,将非线性接触问题化为线性规划模型求解齿轮变形和载荷分布.利用这类模型需要提取加载点处的变形,而有限元法在力边界条件处的局部变形通常是不准确的,这使得模型的求解精度有所降低.为了弥补上述模型的不足, Vijayakar 在此模型基础上建立了有限元法和弹性接触力学混合模型^[8],利用有限元法计算齿轮宏观刚体变形,利用弹性半空间点载荷的 Boussinesq 积分公式求解局部接触变形,并成功应用于齿轮系统动力学分析中^[9-10].

另有一些学者通过进行齿轮动态接触有限元法分析计算齿轮啮合刚度. LIN 等利用一对齿轮副的三维接触有限元法,计算了斜齿轮副运转过程中啮合刚度的变化曲线和接触应力分布^[11].由于利用有限元法求解接触问题的复杂性,其收敛性受接触参数设置影响较大.同时这类模型求解接触变形的精度受网格密度影响显著,而密化的网格又会急剧增加计算时间,使计算效率大为降低.

本文基于 Vijayakar 的思想,把传统有限元法与弹性接触理论相结合,提出了计算圆柱齿轮啮合刚度的改进方法.该方法利用有限元法计算齿轮的弯曲变形,利用线接触解析公式计算各啮合接触点的接触变形,实现了齿轮副啮合刚度和载荷分布的计算,能够有效提高计算效率和计算精度.

1 齿轮啮合过程

1.1 齿轮啮合面的划分

齿轮的啮合过程如图 1 所示,图中 $N_1 N_2$ 为端面啮合线. B_2 为考察轮齿进入啮合点, C_1 为前一个轮齿退出啮合点, M 为考察轮齿节点, D_1 为

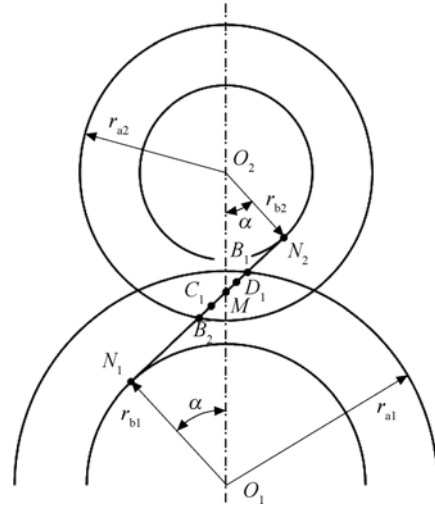


图 1 齿轮副啮合过程

Fig. 1 Meshing process of gear pair

后一个轮齿进入啮合点, B_1 为考察轮齿端面退出啮合点.以齿轮端面实际啮合线段 $B_1 B_2$ 的长度为高,以齿宽 B 为长展成齿轮副的啮合面,如图 2 所示.图中 ϵ_α 为端面重合度, p_{bt} 为端面基节, β_b 为基圆螺旋角.

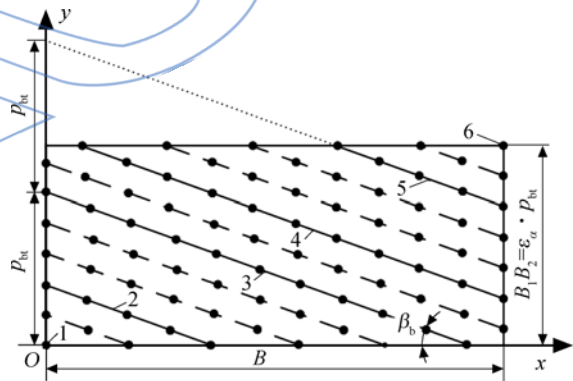


图 2 齿轮副啮合面

Fig. 2 Meshing plane of action of gear pair

一般而言,在一个啮合周期内参与啮合的轮齿对数有 $N+1$ 齿和 N 齿两种情况 (N 为齿轮副总重合度 ϵ_γ 的整数部分).在离齿顶 $(\epsilon_\gamma - N) p_{bt}$ 的区域内,齿轮处于 $N+1$ 齿啮合区,之外则是 N 齿啮合区.图 2 所示齿轮副共有三齿啮合和二齿啮合两种情况,图中实线为三齿啮合与二齿啮合的临界接触线,其中接触线 1~2, 3~4, 5~6 之间的区域为三齿啮合区,接触线 2~3 和 4~5 之间的区域为二齿啮合区.1, 3, 5 为进入啮合瞬时位置;2, 4, 6 为退出啮合瞬时位置.图中虚线为新增的接触线,每条接触线上的圆点 \bullet 为离散的接触点.在同一个啮合位置时,各轮齿上的接触线

在 y 方向上相差一个 p_{bi} 且彼此平行. 根据图 2 可以方便地确定各接触点在啮合面坐标系中的坐标, 向各齿轮坐标系的坐标转换过程可参考文献[12].

1.2 变形协调条件

假设齿轮在啮合过程中的弹性变形主要由宏观的弯曲变形和局部的接触变形两部分组成, 其中弯曲变形随载荷为线性变化, 接触变形随载荷为非线性变化. 在不考虑误差的情况下, 为保证两轮齿间接触的连续性, 同一啮合位置下各接触线上任意接触点的总法向变形应该是相等的, 即应满足啮合变形协调条件

$$\sum_{j=1}^n f_{bij} p_j + \delta_{ci} = C \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

式中 f_{bij} 为弯曲柔度系数, 表示在第 j 个接触点处施加单位法向载荷时, 两轮齿在第 i 个接触点处产生的弯曲变形; δ_{ci} 为第 i 点的接触变形; p_j 表示作用在第 j 个接触点处的法向载荷; C 为该啮合位置下每个接触点沿法向产生的总变形, 即无误差齿轮的传动误差; n 表示该啮合位置所有接触点的个数.

写成矩阵形式为

$$\mathbf{F}_b \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{c1} \\ \delta_{c2} \\ \vdots \\ \delta_{cn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ C \\ \vdots \\ C \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中 \mathbf{F}_b 为啮合面接触点弯曲柔度矩阵.

2 有限元法与弹性接触理论相结合

2.1 基本思想

常规有限元法在计算两物体接触时, 为了得到更为准确的局部接触变形, 必须将接触区域附近的网格划分得非常密集, 这将导致计算量成倍增加. 当网格尺寸较大时, 卸载区域附近的接触变形就会变得不够准确, 而远离载荷作用点处的弯曲变形仍相对可靠. 而弹性接触理论则与有限元方法相反, 其在局部接触区域能获得较为精确的解, 却无法合理预测接触体在位移约束条件下的宏观整体变形. 因此, 若将两者结果相结合就能同时较为准确地获得接触体宏观整体变形和局部变形.

2.2 齿面接触点弯曲变形计算

对于如图 3 所示的齿轮啮合面, 由于各接触点的坐标不是规则排列的, 为保证有限元网格节点能与齿面接触点相重合, 必须将齿面划分为低

阶的四面体单元, 这不仅增加了网格划分难度且精度较低. 为使计算过程更为方便, 首先将齿轮划分为高阶的规则六面体单元, 计算齿面有限元网格节点之间的原始柔度系数; 再通过弯曲变形的分离得到网格节点之间的弯曲柔度系数; 最后利用二维插值方法得到齿面各接触点的弯曲柔度系数. 齿轮模型采用三齿简化模型, 划分的有限元网格如图 3 所示.

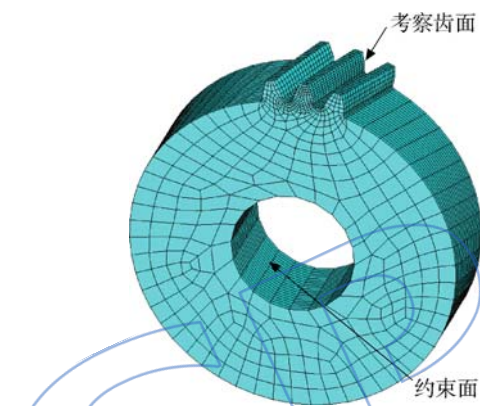


图 3 简化齿轮的有限元网格

Fig. 3 Finite element meshes of simplified gear

2.2.1 齿面网格节点原始柔度系数

齿面网格节点原始柔度系数 f_{ij} 指在齿面第 j' 个网格节点施加单位法向载荷 $p_{j'}$ 时, 在第 i' 个网格节点所产生的变形. 为了后续计算方便, 将各网格节点的柔度系数以矩阵形式 \mathbf{F}' 表示.

齿面网格节点原始柔度矩阵计算可通过以下 3 种方法实现:

1) 循环加载法: 按照柔度系数定义, 在考察齿面每个网格节点 j' ($j'=1, 2, \dots, n_i$, 其中 n_i 为齿面网格节点数) 处施加单位法向载荷进行静力学求解, 提取在其他齿面网格节点 i' 处的变形 f_{ij} . 在各齿面网格节点依次加载, 即可组装齿面网格节点原始柔度矩阵 \mathbf{F}' [12-13]. 采用这种方法需要进行多次静力学计算才能完成.

2) 刚度矩阵求逆法: 由于柔度和刚度互为倒数, 因此齿面网格节点的柔度矩阵可以通过对齿轮在约束边界条件下的刚度矩阵进行转换得到. 首先提取齿轮的总体刚度矩阵 \mathbf{K} , 施加边界条件后将约束节点(齿轮内孔)对应的行和列划去, 得到降阶后的非奇异刚度矩阵 \mathbf{K}_1 . 计算该刚度矩阵的逆矩阵 \mathbf{F}_1 , 此矩阵反映了在各节点施加单位载荷与所有节点变形之间的关系, 即为总体柔度矩阵. 将非齿面网格节点自由度对应的行和列划去,

便可得到齿面网格节点之间的原始柔度矩阵 F' .

3) 子结构法:将考察齿面定义为外部节点,通过内部自由度的凝聚^[14],形成齿面网格节点对应超单元的单元刚度矩阵 K' .将该刚度矩阵求逆,即得到齿面网格节点的柔度矩阵 F' .

以上的第 2)种和第 3)种方法都能避免进行多次静力学求解,只需要对总体刚度矩阵进行简单处理即可,大大减少了计算时间.本文的齿轮有限元模型通过 ANSYS 软件 APDL 命令建立,齿面网格节点原始柔度矩阵通过子结构法获得.

2.2.2 齿面网格节点弯曲柔度系数

在计算网格节点原始变形时,实际上是将齿轮沿接触线的分布载荷简化为各离散接触点的集中点载荷处理.由于有限元法特点的限制,在集中点载荷作用点附近的接触变形通常会有失真,但整体的弯曲变形却较为准确.因此齿面网格节点的弯曲变形可以通过作图法原理在原始总变形中分离出来,如图 4 所示.图中 $f_{bj'}$ 即为在有限元网格节点 j' 施加单位法向载荷 p_j 时在节点 j' 处的弯曲柔度系数.若节点 i' 远离加载点 j' ,则其弯曲柔度系数 $f_{bi'}$ 与原始柔度系数 f_{ij} 相等.依次分离不同加载点 j' 处的弯曲变形,将齿面各网格节点弯曲柔度系数组装为矩阵 F_b' .

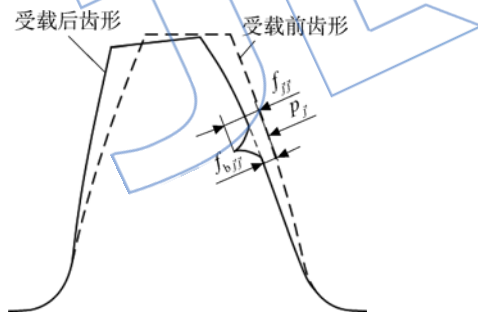


图 4 集中点载荷作用下弯曲变形的分离
Fig. 4 Separation of bending deformation under concentrated point load

2.2.3 齿面接触点弯曲柔度系数

齿面接触点的弯曲柔度系数可通过齿面有限元网格节点的弯曲柔度系数插值得到.将齿面网格节点和接触点均沿齿轮轴线平面进行旋转投影,如图 5 所示,即把原三维坐标 (x, y, z) 转换为二维坐标 (r, z) ,其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.这样可将原三维插值问题转换为二维插值问题,有效降低了插值难度.为了保证插值的准确性,本文采用比常规立方插值精度更高的双调和样条插值^[15],可

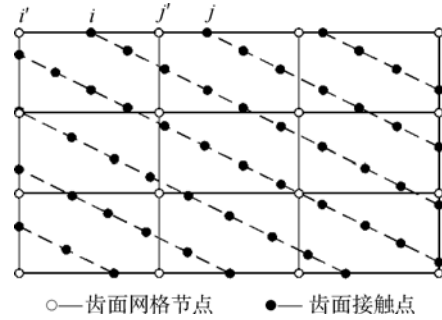


图 5 齿面网格节点与接触点

Fig. 5 Mesh nodes of finite elements and contact points in tooth surface

借助于 Matlab 软件中的 griddata 函数实现.插值的步骤分为两步:

第一步:插值在不同网格节点 j' ($j' = 1 \sim n_i$) 处加载时在齿面接触点 i ($i = 1 \sim n_c$, 其中 n_c 为齿面接触点数) 处的柔度 f_{bij} .对于某一网格节点 j' ,根据齿面接触点 i 与所有网格节点 i' ($i' = 1 \sim n_i$) 的坐标关系,以及一系列已知的 $f_{bi'}$ 插值得到 f_{bij} .

第二步:插值在不同齿面接触点 j ($j = 1 \sim n_c$) 处加载时在齿面接触点 i ($i = 1 \sim n_c$) 处的柔度 f_{bij} .对于某一接触点 i ,根据齿面接触点 j 与所有网格节点 j' ($j' = 1 \sim n_i$) 的坐标关系,以及第一步求解的一系列 $f_{bi'}$ 插值得到 f_{bij} .

分别计算主、从动齿轮各接触点的弯曲柔度系数并进行叠加,按照接触点顺序组装接触点总体弯曲柔度矩阵,记为 F_{b_total} .在计算齿轮啮合刚度时,需要根据不同啮合位置下的接触点编号重组弯曲柔度矩阵 F_b .考虑到受载齿上的载荷对相邻齿的变形影响极小,可忽略不计,因此每个啮合位置下的 F_b 构成了 $n \times n$ 阶以接触线为单位的一个分块对角矩阵,即

$$F_b = \begin{bmatrix} F_{b1\ n_1 \times n_1} & & & 0 \\ & F_{b2\ n_2 \times n_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & F_{bm\ n_m \times n_m} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

其中

$$F_{bk\ n_k \times n_k} = \begin{bmatrix} f_{b11} & f_{b12} & \cdots & f_{b1n_k} \\ f_{b21} & f_{b22} & \cdots & f_{b2n_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{bn_k1} & f_{bn_k2} & \cdots & f_{bn_kn_k} \end{bmatrix}$$

其中 m 为该啮合位置下的接触线条数; n_k ($k = 1, 2, \dots, m$) 为第 k 条接触线上的接触点个数.

2.3 接触点的接触变形

无误差的渐开线圆柱齿轮副是线接触的. 直齿轮副在某一啮合位置的接触问题可以等效为两个圆柱体的接触, 圆柱体的半径分别为两个齿轮在接触点的法向曲率半径. 由于斜齿轮副的接触线与轴线不平行, 同一条接触线上各接触点的法向曲率半径不同, 可以近似等效为两反向圆锥滚子的接触问题. 忽略线接触的局部边界效应, 将第 k 条接触线等分为 n_k 段, n_k 为该条接触线上的接触点个数, 则每段可以看成具有接触点处曲率半径的两个短圆柱体相接触.

经典赫兹理论对线接触仅给出了部分理论解, 未给出弹性接触变形的计算公式. 目前数值分析方法在线接触弹性变形求解中得到广泛应用, 但存在求解过程较为复杂的问题. 文献[16]以一般光滑弹性体点接触理论为基础, 推导出了有限长线弹性接触变形的解析公式, 并通过与数值计算方法的对比, 证明了该解析公式具有较高的求解精度. 根据文献[16]中有限长线弹性接触变形的计算公式, 可得各分段接触线的接触变形为

$$\delta_{ci} = \frac{\eta p_i}{\pi l_i} \ln \frac{6.59 l_i^3 (R_1 + R_2)}{\eta p_i R_1 R_2} \quad (3)$$

式中 l_i 为分段接触线的长度; p_i 为分段接触线上的载荷; R_1 和 R_2 分别为两齿轮在接触点处的法向曲率半径; $\eta = (1 - \nu_1^2)/E_1 + (1 - \nu_2^2)/E_2$, 其中 E_1 和 E_2 分别为两齿轮材料的弹性模量, ν_1 和 ν_2 分别为两齿轮材料的泊松比.

2.4 啮合刚度计算

在同一啮合位置各接触线上各接触点载荷之和应等于齿轮传递的总法向载荷 P , 即

$$\sum_{j=1}^n p_j = P \quad (4)$$

求得弯曲柔度矩阵 F_b 以及接触变形与各接触点载荷的关系后, 式(1)和式(4)就组成了以 p_j ($j = 1, 2, \dots, n$) 和 C 为未知数的 $n+1$ 阶非线性方程组. 求解该非线性方程组, 可进一步求得该啮合位置下的啮合刚度 C_γ 为

$$C_\gamma = P / (C \cdot B) \quad (5)$$

计算不同啮合位置 i ($i=1 \sim n_p$, n_p 为啮合位置数) 下的啮合刚度值, 即可得到齿轮副在一个啮合过程中的啮合刚度曲线. 整个啮合刚度的计算流程见图 6.

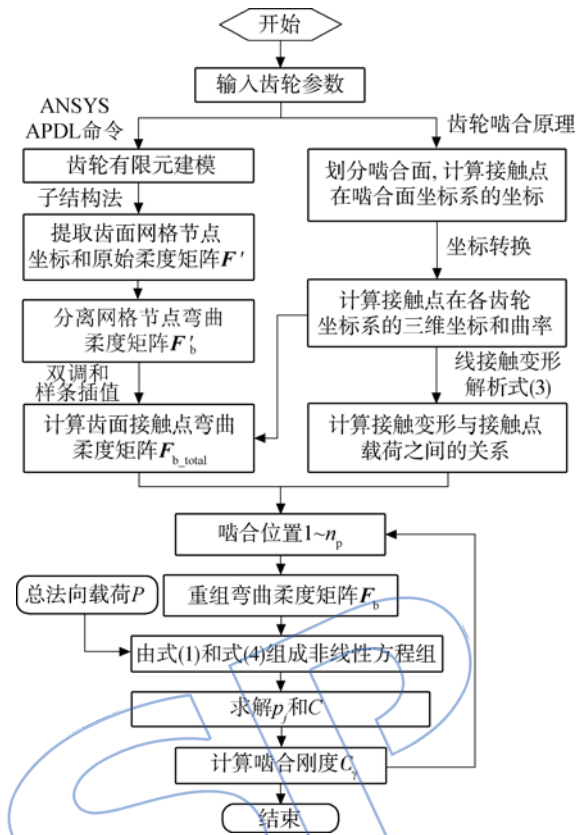


图 6 啮合刚度计算流程
Fig. 6 Calculation flow of mesh stiffness

3 计算结果分析

3.1 直齿轮副的计算结果

以一对直齿轮副为例, 利用本文方法计算其啮合刚度, 齿轮副的参数见表 1. 表中 z_1 和 z_2 分别为主、从动轮的齿数, m_n 为法面模数, α_n 为法向压力角, β 为螺旋角.

表 1 直齿轮副参数

Table 1 Parameters of spur gear pair

z_1	z_2	m_n/mm	$\alpha_n/(\text{°})$	$\beta/(\text{°})$	B/mm
37	62	2.5	20	0	34

航空工业部标准 HB/Z 84.1-1984^[17] 中计算啮合刚度的公式是在单位齿宽载荷为 300 N/mm 下进行的, 因此本文计算在同样的载荷条件进行. 根据本文方法计算的结果与 HB/Z 84.1-1984 (简称 HB 法) 计算的结果对比见表 2.

可以看出在单位齿宽载荷为 300 N/mm 时, 利用本文方法计算该直齿轮副的啮合刚度均值和单对齿啮合刚度与 HB/Z 84.1-1984 计算的数值误差均在 6% 以内, 两者结果非常接近, 因此采用

本文的计算方法是可靠的。

表 2 与 HB/Z84. 1-1984 的啮合刚度结果对比

Table 2 Comparison of results of mesh stiffness with HB/Z84. 1-1984

	本文方法	HB 法	误差/%
$\overline{C}_\gamma/(N/(mm \cdot \mu m))$	23.04	21.86	5.4
C_γ (单对)/ ($N/(mm \cdot \mu m)$)	14.33	14.03	2.1

3.2 斜齿轮副的计算结果

文献[18]利用线性规划法计算了斜齿轮副的啮合刚度,并分析了斜齿轮副啮合刚度的变化规律.为了能与文献[18]的结果相对比,本文采用与之相同的参数进行计算.按照表 1 所示的齿轮参数,保持齿轮单位齿宽载荷为 300 N/mm,螺旋角 β 分别取 $5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ$ 和 25° 时,采用 HB/Z 84. 1-1984、文献[18]方法和本文方法所计算的啮合刚度均值 \overline{C}_γ 以及计算时间对比如表 3 所示.

表 3 3 种方法的结果对比

Table 3 Comparison of results of three methods

$\beta/$ ($^\circ$)	$\overline{C}_\gamma/(N/(mm \cdot \mu m))$		计算时间/min	
	HB 法	文献 [18]	本文 方法	文献 [18] 方法
5	22.4919	17.1088	22.5830	
10	22.6712	21.9723	23.3522	
15	22.8502	22.0772	23.5390	约 120 约 2
20	22.8667	26.6366	24.0908	
25	22.5559	23.7976	23.3669	

由表 3 的结果可知,文献[18]所计算斜齿轮副啮合刚度均值变动较大,而采用 HB 法和本文方法所计算的啮合刚度均值变动较小.这主要是因为文献[18]计算齿面柔度系数时采用常规有限元法,其计算精度与网格的疏密程度相关性较大.由于其网格节点需要迁就于啮合面接触点,导致网格疏密程度难以很好控制.而本文方法使网格节点和啮合面接触点相互独立,同时弯曲变形分离时不需要较密集的网格就能获得准确的结果,所以在不同螺旋角时的计算结果与 HB 法的趋势基本一致,稳定性更好.另外,由于本文采用子结构法提取齿面网格原始柔度矩阵,避免了文献[18]中的多次静力学求解,使计算时间大为降低.

分析各螺旋角的啮合刚度变化曲线可以发

现,啮合刚度的波动情况基本与接触线总长度的波动情况保持一致.限于篇幅,本文仅给出 5° 和 25° 时啮合刚度与接触线总长度 L 的关系,如图 7 所示.图中 ϵ 为无量纲时间,表示一个轮齿从进入啮合到对应啮合位置所经历的时间与啮合周期的比值, ϵ_γ 为总重合度.对于直齿轮副而言,二齿啮合区的啮合刚度一般大于单齿啮合时的刚度.而对于斜齿轮副,其在 $N+1$ 齿啮合区的啮合刚度不一定大于 N 齿啮合区的啮合刚度,如图 7(a) 所示.其原因是在 $N+1$ 齿啮合区,各单齿的接触线长度一般较短,接触线总长度有可能小于 N 齿啮合区的接触线总长度.在轮齿进入和退出啮合的时刻,啮合刚度较小;而在远离进入和退出啮合时刻,啮合刚度会增加.因此啮合刚度在一个啮合周期内大致呈两段抛物线.这些规律与文献[18]所给出的结论相一致.

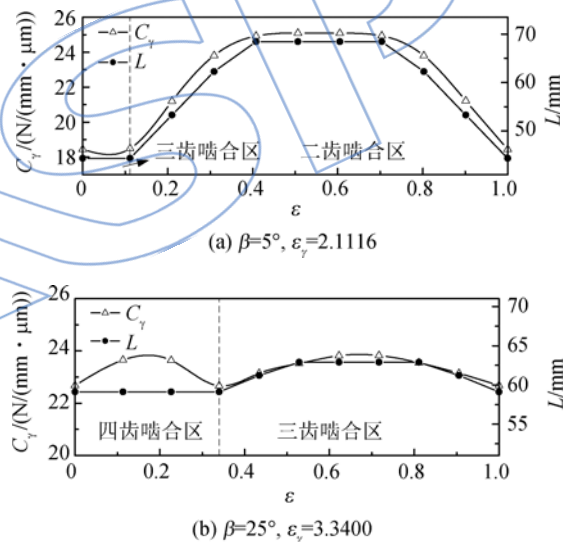


图 7 斜齿轮副啮合刚度曲线

Fig. 7 Mesh stiffness curves of helical gear pair

3.3 啮合总载荷与啮合刚度的关系

选取螺旋角 β 为 25° ,分别计算不同总法向载荷 P 时啮合刚度均值 \overline{C}_γ 的变化,如图 8 所示.从图中可以看出,随着 P 的增加, \overline{C}_γ 呈非线性增加的趋势.这种现象主要是由接触变形随载荷非线性变化所引起的.

图 8 中还给出了不同 P 时所有接触点平均接触变形占平均总变形的比例 R_c .可见随着 P 的增加, R_c 逐渐减小.当总啮合力较小时,两齿轮刚产生接触,此时更容易产生局部的接触变形,由接触变形引起的接触刚度较小.当总啮合力增加后,由于接触变形的非线性变化导致单位载荷下接触

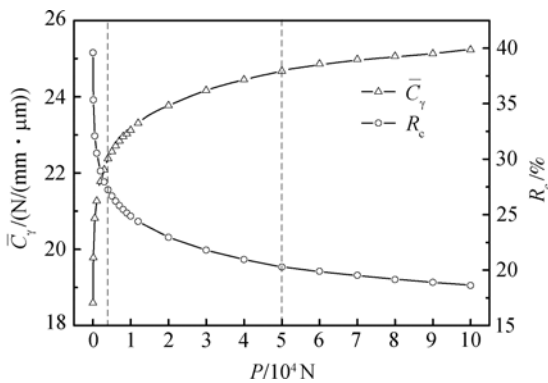


图8 啮合刚度均值随总法向载荷的变化

Fig. 8 Mean value of mesh stiffness varying with total normal load

变形减小,即接触刚度增加,进而导致啮合刚度增加.在轻载条件下($P < 4000$ N),啮合刚度均值随载荷变化率较大;在重载条件下($P > 50000$ N),啮合刚度均值随载荷变化趋于平缓.

4 结论

1) 本文将有限元法与弹性接触理论相结合,提出了一种更为稳定的齿轮啮合刚度计算方法.通过与航空标准计算结果的对比,证实了该方法的有效性.

2) 利用子结构法提取齿面柔度系数矩阵,避免了已有方法中多次静力学求解导致计算耗时的缺点,有效提升了计算效率.

3) 接触变形随载荷是非线性变化的,因此齿轮的啮合刚度随载荷增加呈非线性增加的趋势,这在以往多数文献中鲜有提及.

参考文献:

- [1] Vijayakar S M, Busby H R, Houser D R. Linearization of multibody frictional contact problems[J]. Computers and Structures, 1988, 29(4): 569-576.
- [2] 方宗德. 齿轮轮齿承载接触分析(LTCA)的模型和方法[J]. 机械传动, 1998, 22(2): 2-4, 17, 53.
FANG Zongde. Model and approach for loaded tooth contact analysis (LTCA) of gear drives [J]. Mechanical Transmission, 1998, 22(2): 2-4, 17, 53. (in Chinese)
- [3] LI Shuting. Gear contact model and loaded tooth contact analysis of a three-dimensional thin-rimmed gear[J]. Journal of Mechanical Design, 2002, 124(3): 511-517.
- [4] LI Shuting. Effects of machining errors, assembly errors and tooth modifications on loading capacity, load-sharing ratio and transmission error of a pair of spur gears[J]. Mechanism and Machine Theory, 2007, 42(6): 698-726.
- [5] WANG Yanzhong, WU Canhui, GONG Kang, et al. Loaded tooth contact analysis of orthogonal face-gear drives [J]. Journal of Mechanical Engineering Science, 2012, 226(9): 2309-2319.
- [6] Conry T F, Seireg A. A mathematical programming method for design of elastic bodies in contact[J]. Journal of Applied Mechanics, 1971, 6(2): 387-392.
- [7] Conry T F, Seireg A. A mathematical programming technique for the evaluation of load distribution and optimal modification for gear systems[J]. Journal of Engineering for Industry, 1973, 95(11): 1115-1122.
- [8] Vijayakar S M. A combined surface integral and finite element solution for a three-dimensional contact problem[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1991, 31(3): 525-545.
- [9] Parker R G, Vijayakar S M. Non-linear dynamic response of a spur gear pair: modeling and experimental comparisons [J]. Journal of Sound and Vibration, 2000, 237(3): 435-455.
- [10] Cooley C G, Parker R G, Vijayakar S M. A frequency domain finite element approach for three-dimensional gear dynamics[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2011, 133(8): 041004. 1-041004. 9.
- [11] LIN Tengjiao, Qu H, LI Runfang. A finite element method for 3D static and dynamic contact/impact analysis of gear drives[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2007, 196(9/10/11/12): 1716-1728.
- [12] 刘更. 一种确定内啮合和外啮合斜齿圆柱齿轮载荷分布的有效方法[J]. 机械工程学报, 1991, 27(3): 20-26.
LIU Geng. An effective method for determining the load distribution of external and internal helical gears[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 1991, 27(3): 20-26. (in Chinese)
- [13] 方宗德. 斜齿轮齿面柔度矩阵与修形的有限元计算[J]. 航空动力学报, 1994, 9(3): 242-244.
FANG Zongde. Calculation on flexibility matrix and modification of helical gears by FEM[J]. Journal of Aerospace Power, 1994, 9(3): 242-244. (in Chinese)
- [14] 王勖成. 有限单元法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003.
- [15] Sandwell D T. Biharmonic spline interpolation of GEOS-3 and seasat altimeter data [J]. Geophysical Research Letters, 1987, 14(2): 139-142.
- [16] 丁长安, 张雷, 周福章, 等. 线接触弹性接触变形的解析算法[J]. 摩擦学学报, 2001, 21(2): 135-138.
DING Changan, ZHANG Lei, ZHOU Fuzhang, et al. Theoretical formula for calculation of line-contact elastic contact deformation [J]. Tribology, 2001, 21(2): 135-138. (in Chinese)
- [17] 中华人民共和国航空工业部. HB/Z 84. 1-1984 航空渐开线圆柱齿轮承载能力一般系数计算[S]. 北京: 中国标准出版社, 1986: 23-25.
- [18] 卜忠红, 刘更, 吴立言. 斜齿轮啮合刚度变化规律研究[J]. 航空动力学报, 2010, 25(4): 957-962.
BU Zhonghong, LIU Geng, WU Liyan. Research on the variation rules of meshing stiffness of the helical gear [J]. Journal of Aerospace Power, 2010, 25(4): 957-962. (in Chinese)