

等几何壳体分析与形状优化

张升刚, 王彦伟*, 黄正东

(华中科技大学 国家 CAD 支撑软件工程技术研究中心, 武汉 430074)

摘要:首先基于 Reissner-Mindlin 理论进行了三维壳体等几何分析,而后基于此对三维壳体进行形状优化,提出了形状优化中灵敏度的全解析计算方法,包括位移应变阵、雅可比阵和刚度阵等相对控制顶点位置的灵敏度解析计算公式;通过实例验证了壳体等几何分析和灵敏度全解析计算方法的有效性。与传统的基于网格的灵敏度半解析计算方法相比,基于 NURBS 的灵敏度全解析计算具有精确、计算效率高的特点,且可以避免优化迭代中的网格畸变。

关键词:等几何分析;NURBS;壳;形状优化;灵敏度

中图分类号:O343;O24;O18

文献标志码:A

doi:10.7511/jslx201401020

1 引言

等几何分析 IGA(Isogeometric Analysis)是应用同样的样条基函数离散几何形状和物理场进行分析的数值方法^[1]。其最常用的样条基函数是非均匀有理 B 样条 NURBS(Non-Uniform Rational B-Spline)基函数。IGA 由于其在物理场分析中所具有的优越特性,已广泛用于物理场问题分析中。文献[2,3]分别运用 IGA 完成了无旋转自由度的 Kirchhoff-Love 壳体和大变形无旋转自由度的 Reissner-Mindlin 壳体的分析;张勇等^[4]将等几何分析方法与比例边界有限元法相结合,提出了一种具有比例边界有限元半解析特性和等几何分析的几何特性的新方法。针对 NURBS 基函数不具有插值属性,难以施加边界条件的问题,王东东等^[5]提出了一种罚函数施加位移边界条件方法,与直接施加位移约束的计算结果相比,其计算精度明显提高。

在基于物理场分析进行形状优化过程中,一个关键问题是优化过程中的形状表示。传统的形状优化方法使用网格表示几何形状,迭代过程中网格畸变往往使形状优化难以继续。基于 NURBS 的等几何分析可以在分析过程中精确表示几何形状,

因此以此为基础进行形状优化可以有效解决形状表示问题。文献[6]将基于 NURBS 的等几何方法应用到形状优化中,以控制顶点为设计变量,对二维形状进行了优化。

本文基于 NURBS 基函数对空间壳体进行等几何分析,并对壳体进行了形状优化。灵敏度信息是基于梯度的形状优化方法进行优化迭代的基础。对于基于网格的形状表示方法而言,很难建立设计变量与离散网格的关联,因而难以得到灵敏度的解析解,常用的灵敏度计算方法是半解析法^[7]。而等几何分析使用 NURBS 基函数进行几何外形精确表示和物理场离散,且 NURBS 基函数及其导数均有着明确的解析表达,基于此可以得到灵敏度的全解析表示;得到灵敏度之后,使用基于梯度的优化方法便可以进行壳体的形状优化。

2 B 样条、NURBS 和等几何分析的基本概念

B 样条是由 B 样条基函数 $N_{i,p}(i=0,1,\dots,n)$ 、控制顶点 P_i 、节点向量 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ 定义的。B 样条基函数具有非负性、局部支承性及凸组合性等良好的数学特性。

NURBS 曲线定义式为

$$C(u) = \frac{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(u) \omega_i P_i / [\sum_{i=1}^n N_{i,p}(u) \omega_i]}{\sum_{i=1}^n R_{i,p}(u) P_i} \quad (1)$$

式中 $C(u)$ 为 NURBS 曲线, u 为节点向量, $N_{i,p}(u)$

收稿日期:2012-06-30;修改稿收到日期:2012-10-28.

基金项目:国家自然科学基金(51075162,51375186,61173115)资助项目.

作者简介:张升刚(1988-),男,硕士生;

王彦伟*(1975-),男,博士,副教授

(E-mail: ywwang_cad@mail.hust.edu.cn);

黄正东(1961-),男,博士,教授.

为 p 阶 B 样条基函数, ω_i 为控制顶点 P_i 的权因子, $R_{i,p}(u)$ 为一维 NURBS 基函数, $R_{i,p}(u) = N_{i,p}(u) \omega_i / (\sum_{i=1}^n N_{i,p}(u) \omega_i)$ 。

NURBS 曲面的定义式为

$$S(u, v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,p,j,q}(u, v) P_{i,j} \quad (2)$$

式中 $S(u, v)$ 为 NURBS 曲面, $R_{i,p,j,q}(u, v)$ 为二维 NURBS 基函数, $R_{i,p,j,q}(u, v) = N_{i,p}(u) M_{j,q}(v) \omega_{i,j} / (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(u) M_{j,q}(v) \omega_{i,j})$ 。

二维 NURBS 基函数按其控制顶点在控制网格中的位置, 可以将其分为三类, 分别是角点、边界点和内点基函数^[5]。

式(2)中 $P_{i,j}$ 为控制顶点。NURBS 曲面的参数域由两组一维节点向量 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ 和 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ 的张量积定义, (u, v) 为参数域中的节点。

等几何分析中, 单个的曲面称为片体, 它被离散为若干型值面。每一个型值面与节点参数空间中的一个子域 $[u_i, u_{i+1}] \times [v_i, v_{i+1}]$ 相对应的部分定义为等几何单元。

3 等几何壳体分析

壳体分析基本理论有 Kirchhoff-Love 理论和 Reissner-Mindlin 理论。在此, 本文基于 Reissner-Mindlin 理论进行等几何壳体分析, 采用的基函数为三次 NURBS 基函数。

3.1 单元形状与位移场表示

进行壳体有限元分析首先要完成壳体单元形状和壳体内位移场的描述。单元内任意一点的坐标值可由壳体中面上的点法向插值得到。壳体中面控制顶点 P^k 对应 NURBS 基函数为 R^k , 则中面任意点坐标:

$$x_i(u, v) = \sum_{k=1}^n R^k(u, v) P_i^k \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3)$$

式中 P_i^k 为控制顶点 P^k 的第 i 个坐标, (u, v) 为该点对应的参数坐标。

假定 $\zeta \in [-1, 1]$, 壳体厚度为 h , 则壳体内任意点坐标为

$$x(u, v, \zeta) = \sum_{k=1}^n R^k(u, v) (P^k + (h/2)\zeta V_{3i}^k) \quad (4)$$

式中 V_{3i}^k 为控制顶点 P^k 对应的法向量。等几何分析中, 控制顶点不准确位于中面上, 本文选择中面

上距离控制顶点 P^k 最近的点的法向量来近似表示 V_{3i}^k 。

单元位移场可由 NURBS 基函数表示为

$$\delta(u, v, \zeta) = \sum_{k=1}^n R^k(u, v) [\delta^k + H^k(\zeta) (\theta_2^k V_{1i}^k - \theta_1^k V_{2i}^k)] \quad (5)$$

式中 δ^k 为第 k 个控制顶点的位移向量, V_{1i}^k 和 V_{2i}^k 为控制顶点处的切向量, 而 θ_1^k 和 θ_2^k 为控制顶点绕单位向量 V_{1i}^k 和 V_{2i}^k 的转角。

3.2 单元刚度阵

单元刚度矩阵的通用数学表达式为

$$K_e = \int_{\Omega_e} B^T D B d\Omega = \sum_{i=1}^{NIN} B_i^T D B_i |J_i| \omega_i \quad (6)$$

式中 B 为单元应变矩阵, D 为单元的材料属性矩阵, J 为雅克比矩阵。

3.2.1 坐标变换

图 1 为等几何分析的坐标变换过程, 其中, L 为高斯积分域与参数域间的坐标变换, S 为给定法向参数 ζ 后, S 由式(4)确定, 实现从参数域到全局坐标系的变换。 L 为一个二维线性变换, 它将标准高斯积分域 $[-1, 1] \times [-1, 1]$ 变换到参数域 $[u_i, u_{i+1}] \times [v_i, v_{i+1}]$ 。

$$L: \{\xi, \eta\} \rightarrow \{u, v\}$$

$$\begin{cases} u(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^4 N_j(\xi, \eta) u_j(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^4 N_j(\xi, \eta) v_j(\xi, \eta) \end{cases} \quad (7)$$

式(8)中 N_j 为二维拉格朗日线性基函数,

$$N_j = \frac{1}{4} (1 + \xi_j \xi) (1 + \eta_j \eta) \quad (8)$$

$$S: \{u, v, \zeta\} \rightarrow \{x, y, z\}, \text{ 由式(4)实现。}$$

3.2.2 雅克比矩阵

等几何壳体分析需要进行如图 1 所示 S 和 L 两次坐标变换, 相应的有两个雅克比矩阵 J_1 和 J_2 。为表达上的方便, 规定符号 $x_{i,u}$ 为第 i 个坐标对 u 的导数, 则由图 1 中 S 所确定的雅克比矩阵为

$$[J_1] = \begin{bmatrix} x_{1,u} & x_{2,u} & x_{3,u} \\ x_{1,v} & x_{2,v} & x_{3,v} \\ x_{1,\zeta} & x_{2,\zeta} & x_{3,\zeta} \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中

$$\partial x_i / \partial u = \sum_{k=1}^n (\partial R^k / \partial u) (P_i^k + H^k V_{3i}^k) \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\partial x_i / \partial v = \sum_{k=1}^n (\partial R^k / \partial v) (P_i^k + H^k V_{3i}^k) \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\partial x_i / \partial \zeta = \sum_{k=1}^n R^k (\partial H^k / \partial \zeta) V_{3i}^k \quad (i = 1, 2, 3)$$

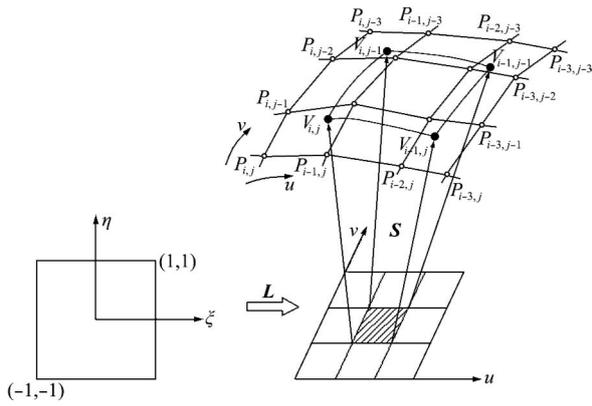


图1 等几何分析中的坐标变换过程
Fig.1 Coordinates transformations in IGA

由 L 所确定的雅克比矩阵为

$$J_2 = \begin{bmatrix} -(1/4)(1-\eta) & (1/4)(1+\eta) & 0 \\ (1/4)(1+\xi) & (1/4)(1-\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

由式(9,10)壳体单元的整体雅克比矩阵为

$$[J] = [J_1][J_2] \quad (11)$$

3.2.3 位移应变阵

本文以三次 NURBS 基函数进行等几何分析,每个单元由 16 个控制顶点确定,故应变矩阵 $[B] = [B^1, B^2, \dots, B^{16}]$, 其中 $[B^k]$ 表示为

$$[B^k] = \begin{bmatrix} \frac{\partial R^k}{\partial x_1} & 0 & 0 & -g_1^k V_{21}^k & g_1^k V_{11}^k & 0 \\ 0 & \frac{\partial R^k}{\partial x_2} & 0 & -g_2^k V_{22}^k & g_2^k V_{12}^k & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial R^k}{\partial x_3} & -g_3^k V_{23}^k & g_3^k V_{13}^k & 0 \\ \frac{\partial R^k}{\partial x_2} & \frac{\partial R^k}{\partial x_1} & 0 & -g_2^k V_{21}^k - g_1^k V_{22}^k & g_2^k V_{11}^k + g_1^k V_{12}^k & 0 \\ 0 & \frac{\partial R^k}{\partial x_3} & \frac{\partial R^k}{\partial x_2} & -g_3^k V_{22}^k - g_2^k V_{23}^k & g_3^k V_{12}^k + g_2^k V_{13}^k & 0 \\ \frac{\partial R^k}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial R^k}{\partial x_1} & -g_3^k V_{21}^k - g_1^k V_{23}^k & g_3^k V_{11}^k + g_1^k V_{13}^k & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

式中 $g_i^k = (\partial R^k / \partial x_i) H^k + R^k (\partial H^k / \partial x_i)$
 $i = 1, 2, 3 \quad (13)$

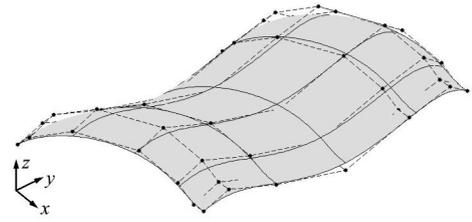


图2 壳体几何形状
Fig.2 Geometry of the analysis shell

式(13)中 $\partial R^k / \partial x_i$ 等由下式计算为

$$\begin{bmatrix} \partial R^k / \partial x_1 & \partial H^k / \partial x_1 \\ \partial R^k / \partial x_2 & \partial H^k / \partial x_2 \\ \partial R^k / \partial x_3 & \partial H^k / \partial x_3 \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \partial R^k / \partial \xi & 0 \\ \partial R^k / \partial \eta & 0 \\ 0 & \partial H^k / \partial \zeta \end{bmatrix} \quad (14)$$

将 $[B]$ 和 $[J]$ 代入式(6)可得单刚矩阵为

$$[K]_{ele} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T [D] B |J_1| |J_2| d\xi d\eta d\zeta \quad (15)$$

将单元刚度矩阵按“对号入座”原则组装为总刚矩阵后,引入边界条件,便可完成壳体的等几何分析。本文实例中边界条件施加在边界控制顶点上。

3.3 壳体等几何分析算例

该实例为曲面壳体,曲面的型值线和控制顶点如图2所示,所有控制顶点的权重为1;曲面 s 向节点向量为 $\{0, 0, 0, 0, 0, 0.1923, 0.4615, 0.7307, 1, 1, 1, 1\}$; t 向节点向量为 $\{0, 0, 0, 0, 0, 0.1923, 0.4615, 0.7307, 1, 1, 1, 1\}$ 。壳体的弹性模量为 200 GPa,泊松比为 0.25,壳体厚度为 0.94 mm。边界条件为左边界曲线上施加 Z 向均布力,大小为 5 N/mm,右边界曲线完全固定。

图3(a)为该曲面以相同边界条件在 ANSYS 中的分析结果,为保证 ANSYS 分析精度,选取壳体分析单元为 shell93 单元,壳体共划分 10201 个节点,10000 个单元。对比图3(a,b),可得到 ANSYS

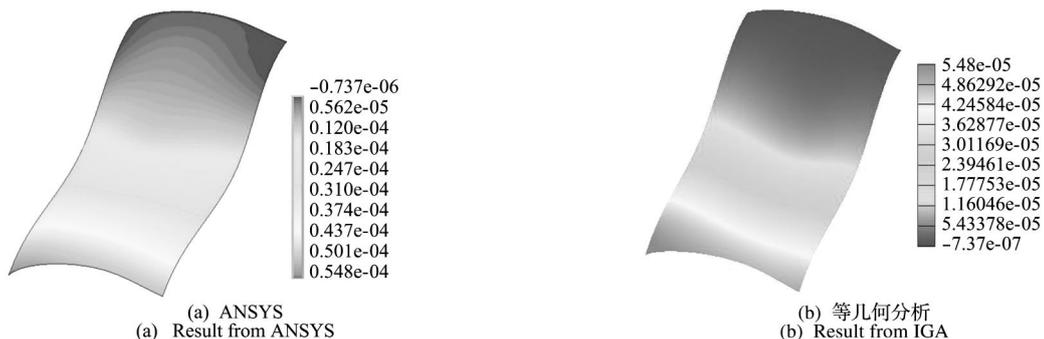


图3 ANSYS与等几何方法的壳体Z向位移云图
Fig.3 Z-displacement from ANSYS and IGA

分析结果与等几何壳体分析结果比较相似,其最大位移均出现在左下角处,两者的位移分布趋势也相近。

4 壳体形状优化

灵敏度计算是壳体形状优化的关键,本节首先推导灵敏度的解析表达式,然后将其应用到具体壳体实例中,进行壳体形状优化;通过分析优化结果,验证灵敏度解析表达和壳体形状优化方法的正确性。

4.1 壳体形状灵敏度

求解优化中的目标或约束函数,对设计变量的灵敏度的关键是得到总刚矩阵对设计变量的灵敏度^[7],而总刚矩阵是由单刚矩阵组装得到的,因而本文首先推导单刚矩阵对设计变量的导数。单元刚度矩阵灵敏度的解析表示由单元刚度矩阵定义式(15)对设计变量 v_i 求导而来。

$$[K]_{\text{ele}, v_i} = \int_{\Omega_{\text{ele}}} [B]_{, v_i}^T [D] [B] |J| d\Omega + \int_{\Omega_{\text{ele}}} [B]^T [D] [B]_{, v_i} |J| d\Omega + \int_{\Omega_{\text{ele}}} [B]^T [D] [B] |J|_{, v_i} d\Omega \quad (16)$$

式中 D 是只与材料特性相关的常数矩阵。结合式(12),应变矩阵中每个元素对设计变量的导数 $d\mathbf{B}/dv_i$ 可由式(17)确定,

$$\frac{d}{dv_i} \begin{pmatrix} \partial R/\partial x_1 & \partial H/\partial x_1 \\ \partial R/\partial x_2 & \partial H/\partial x_2 \\ \partial R/\partial x_3 & \partial H/\partial x_3 \end{pmatrix} = (J^{-1})_{, v_i} \begin{pmatrix} \partial R/\partial \xi & \partial H/\partial \xi \\ \partial R/\partial \eta & \partial H/\partial \eta \\ \partial R/\partial \zeta & \partial H/\partial \zeta \end{pmatrix} \quad (17)$$

式中 $(J^{-1})_{, v_i}$ 由式(18)定义,

$$(J^{-1})_{, v_i} = -J^{-1} \mathbf{J}_{, v_i} J^{-1} \quad (18)$$

式中 $[J]$ 是 $[J_1]$ 和 $[J_2]$ 乘积,而 v_i 仅与 $[J_1]$ 有关,结合式(9)有

$$(J_1)_{, v_i} = \begin{bmatrix} dx_{1,u}/dv_i & dx_{2,u}/dv_i & dx_{3,u}/dv_i \\ dx_{1,v}/dv_i & dx_{2,v}/dv_i & dx_{3,v}/dv_i \\ dx_{1,\zeta}/dv_i & dx_{2,\zeta}/dv_i & dx_{3,\zeta}/dv_i \end{bmatrix} \quad (19)$$

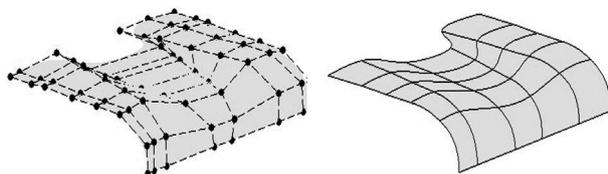


图 4 壳体控制顶点及型值面
Fig. 4 Control points and NURBS patches

其中 $dx_{j,u}/dv_i$ 的值由曲面造型的方式决定。如果选取控制顶点坐标为优化设计变量,则式(19)中所有元素可由 B 样条基函数的德布尔导数运算得出,其解析表达式为

$$R^r(u) = \frac{\partial^r}{\partial u^r} \sum_{j=0}^n d_j N_{j,p}(u) = \sum_{j=i-p}^{i-r} d_j^r N_{j,p-r}(u) \quad (20)$$

式中 r 为求导的阶数, p 为 B 样条基函数的阶数, d_j^r 由下式确定为

$$d_j^r = \begin{cases} d_j, & r=0 \\ (p-r+1)(d_{j+1}^{r-1} - d_j^{r-1}) / (u_{j+p+1} - u_{j+r}), & j=i-p; i=p+1, \dots, i-l \\ & r=1, 2, \dots, l \end{cases} \quad (21)$$

至此,由式(16~21)便可以得出基于 NURBS 的壳体形状优化中目标函数和约束函数的灵敏度全解析表示,将其与基于梯度的优化方法结合中,便可以完成壳体的形状优化。

4.2 壳体优化算例

该实例中,优化目标为最小化应变能,设计变量为壳体中面的控制顶点;为简化问题,约束条件仅限定优化对象的上下限,变量间没有等式和不等式约束。

优化壳体的几何描述如图 4 所示(左图为控制顶点分布,右图为型值线分布)。控制曲面的节点向量 $U=\{0,0,0,0,0,0.14667,0.36,0.78667,1,1,1,1\}$, $V=\{0,0,0,0,0,0.14667,0.36,0.78667,1,1,1,1\}$,控制顶点的权重为 1,选择其中除边界外的其余 36 个控制顶点的 Z 轴坐标为优化变量。壳体材料特性与第三节实例相同,边界条件为前边界曲线完全固定,在后边界曲线上施加-Z 向分布力、大小为 5 N/mm。优化结果如图 5 所示。

壳体优化的目标函数——应变能随优化迭代的变化过程如图 6 所示。

对比图 4 与图 5,壳体优化后的形状非常光滑,避免了传统的基于网格划分进行形状优化时的网格畸变现象。图 6 表明经过优化壳体应变能有大幅度降低——减小为原来的 4.45%。

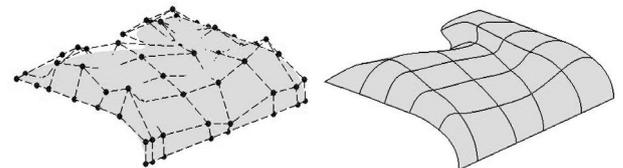


图 5 壳体优化结果
Fig. 5 Result of shape optimization

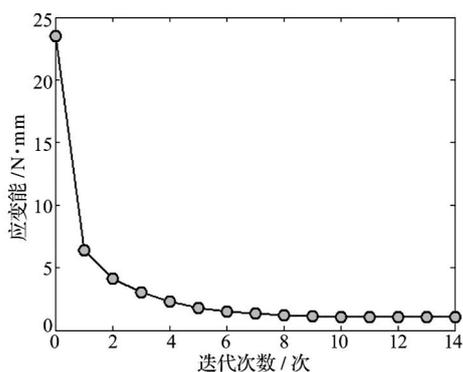


图6 迭代中应变能的变化

Fig. 6 Strain energy in optimization

5 结语与展望

本文首先建立等几何壳体分析框架,并以实例验证了等几何壳体分析方法的正确性;而后,推导了壳体形状优化过程中灵敏度相对控制顶点位置的全解析表达式。基于 NURBS 的灵敏度全解析表示相对传统的基于网格的灵敏度半解析法而言,更为精确且计算效率高,不仅能加快形状优化迭代过程,还可以有效避免传统形状优化方法的网格畸变现象。

工程应用中壳体结构几何外形较为复杂,往往由多个曲面片裁剪后拼接组合而成。对于由裁剪曲面构成的复杂壳体,其分析关键是处理曲面片交线处的物理场耦合,这涉及曲面上曲线表达等几何处理难题。将来的研究工作是首先完成由裁剪曲面构成的复杂壳体的等几何分析,而后推导其灵敏度表达式并进行形状优化。

参考文献(References):

[1] Hughes T J R, Cottrell J A, Bazilevs Y. Isogeometric: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and

mesh refinement[J]. *Comput. Method Appl. Mech. Engrg.*, 2005, **194**(39-41):4135-4195.

[2] Kiendl J, Bazilevs Y, Hsu M C, et al. The bending strip method for isogeometric analysis of Kirchhoff-Love shell structures comprised of multiple patches [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, **199**:2403-2416.

[3] Benson D J, Bazilevs Y, Hsu M C, et al. A large deformation, rotation-free, isogeometric shell [J]. *Comput. Method Appl. Mech. Engrg.*, 2011, **200**: 1367-1378.

[4] 张勇,林皋,胡志强,等.基于等几何分析的比例边界有限元方法[J]. *计算力学学报*, 2012, **29**(2): 113-120. (ZHANG Yong, LIN Gao, HU Zhi-qiang, et al. Scaled boundary finite element method based on isogeometric analysis[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2012, **29**(2): 113-120. (in Chinese))

[5] 王东东,轩军厂,张灿辉.几何精确 NURBS 有限元中边界条件施加方式对精度影响的三维计算分析[J]. *计算力学学报*, 2012, **29**(1): 31-37. (WANG Dong-dong, XUAN Jun-chang, ZHANG Can-hui. A three computational investigation on the influence of essential boundary condition imposition in NURBS isogeometric finite element analysis[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2012, **29**(1): 31-37. (in Chinese))

[6] Wolfgang A Wall, Moritz A Frenzel, Christian Cyron. Isogeometric structural shape optimization [J]. *Comput. Method Appl. Mech. Engrg.*, 2008, **197**: 2976-2988.

[7] 戴磊.基于 CAD/CAE 集成技术的开放式参数化结构形状优化设计平台 [D]. 法国兰斯大学, 2006. (DAI Lei. An Open Platform of Parameterized Shape Optimization Based-on CAD/CAE Integration Technique [D]. Universite de Reims, 2006. (in Chinese))

Isogeometric shell analysis and shape optimization

ZHANG Sheng-gang, WANG Yan-wei*, HUANG Zheng-dong
(CAD Center, Huazhong University of Science & Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: The isogeometric shell analysis is implemented based on Reissner-Mindlin theory, and then the shape optimization of 3D shells is carried out. The analytical computation method of sensitivity is presented including the analytical computational formulae of the strain-displacement matrix, the Jacobin matrix and the stiffness matrix with respect to the positions of the control points. Effectiveness of the isogeometric shell analysis and the presented analytical computation methods of sensitivity are demonstrated with numerical examples. Compared with the conventional mesh based semi-analytical method, the NURBS based analytical computational method of sensitivity is more precise and more efficient, and can avoid the mesh distortion as well.

Key words: isogeometric analysis; NURBS; shells; shape optimization; sensitivity