

# 人工粗糙壁面的水跃特性研究

张志昌 傅铭煊 赵莹 李若冰

(西安理工大学 710048 西安)

**摘要:** 根据已有文献对密排加糙壁面水跃共轭水深、水跃旋滚长度、水跃长度的试验结果,分析了密排加糙壁面水跃的共轭水深、水跃旋滚长度、水跃长度、壁面平均切应力随弗劳德数、跃前和跃后断面水深、壁面粗糙度的变化规律;给出了人工粗糙壁面水跃共轭水深、水跃旋滚长度、水跃长度、壁面阻力系数、壁面平均切应力的计算公式;通过已有文献的试验结果对公式进行了验证,得到了水跃共轭水深的平均误差为4.06%,水跃旋滚长度和水跃长度的平均误差分别为4.25%和7.16%。研究表明:人工粗糙壁面水跃的共轭水深和水跃长度随着跃前断面弗劳德数的增大而增大,随着壁面粗糙度的增大而减小;壁面平均切应力随着壁面粗糙度和跃前断面弗劳德数的增大而增大,随着共轭水深比的增大而减小。

**关键词:** 人工粗糙壁面; 共轭水深; 水跃长度; 壁面平均切应力

**中图分类号:** TV135.2+1 **文献标识码:** A **DOI:** 10.11776/cjam.31.02.D014

## 1 引言

人工粗糙壁面水跃有别于一般的粗糙壁面水跃,前者是指人为的在水跃区的底板上加设粗糙块(底部粗糙),例如砾石、横条、方块、波形底部,或做成各种不同形式的粗糙面;后者是指一般的混凝土壁面。

在水工建筑物中,常利用水跃进行消能,消能形式就是通过修建消力池来形成水跃。研究表明,水跃的消能效果与跃前断面的弗劳德数  $Fr_1$  有关,  $Fr_1$  越大,消能效果越好。但水跃消能有一定的局限性,为了增加消能效果、减少工程投资,人们往往在水跃区(消力池)增设墩坎。最早增加水跃区消能效果的方法是在消力池中设置分流齿墩。1948年,Blaiasdell 推荐了 SAF 型消力池,即在消力池中设

置两排消力墩,可用于  $Fr_1$  为 1.3~4.1 的小型工程。1957年,文献[1]提出了三种类型的消力池,称为 USBR 定型消力池,又称为 A 型池、B 型池、C 型池。1957年,美国垦务局修改了 A 型池,使之适用于低弗劳德数,称为 D 型消力池。1969年,印度标准研究所提出 ISI 型消力池,用于低弗劳德数条件下消能。1964年,文献[2]研究了一种五边形的消力墩,该消力墩前部的三角形的夹角为  $120^\circ$ ,边角为  $90^\circ$ ;1966年和1969年的运用证明,在  $Fr_1$  为 5~9 时,其消能效果很好。1989年,文献[3]又将  $120^\circ$  改为  $150^\circ$ ,称为新型消力池。文献[3]比较了 SAF 型、USBR 型、D 型、ISI 型和新型消力池的水力特性,认为 SAF 型消力池明显优于 ISI 型和 USBR 型,新型消力池的池长和 SAF 型相等,冲坑的深度和长度都比 SAF 型的对应值小,具有推广价值。

以上消力池都是为了提高消能效果而设计的,

但在使用时有严格的要求,这是因为当入池流速超过规定限度时,很可能引起梳流齿墩和消力墩的空蚀破坏。我国柘林水电站泄洪洞趾墩消力池从1972年建成至1976年运用期间,每年都有不同程度的破坏,蚀坑大部分深达20~40cm,最深达0.7m<sup>[4]</sup>。所以在入池流速较高时,在其首部设置梳流齿墩和中部设置消力墩可使消力池容易产生空蚀破坏。

近年来,国外开始研究人工粗糙壁面水跃的水力特性。2002年~2009年,文献[5-7]研究了波状床面的水跃特性。研究表明:自由水跃时,跃后水深约减小了20%;当弗劳德数小于6时,水跃长度比光滑床面减小了50%;当弗劳德数大于6时,水跃长度减小了42%。2007年,文献[8]通过试验研究了在水跃区底板上设置密排砾石的水跃特性,研究的粗糙度范围(模型)为0~3.2cm。结果表明:随着粗糙度的增加,共轭水深比减小,水跃长度减小。2008年,文献[9]结合河道改建工程,在消力池底板采用不均匀糙度的新型消能形式。试验表明:不均匀糙度床面的共轭水深比、水跃长度比密排粗糙面更小,说明此种消能形式有更好的消能效果。

我国在人工粗糙床面消力池的研究方面有少量成果,1993年,文献[10]研究了壁面摩阻力对水跃的影响。2005年,文献[11]模拟了波浪形底板上非恒定的水跃发展过程,并与文献[5]的试验结果进行了对比,计算结果与试验资料基本相符。

人工粗糙壁面消力池是否会发生空蚀,也是人们关注的焦点。文献[12]对波状涵洞中的流速的研究表明,波状床面水流紊动加剧,雷诺切应力增大,流速明显减小,空蚀的可能性减小。文献[13]对溢流面加糙的研究表明,人工粗糙床面的空蚀远小于同样水流强度下的类似高度的孤立凸体空蚀。但对于人工粗糙壁面消力池的空蚀问题仍是一个值得研究的问题,本文不对此问题进行探讨。

文献[8]和文献[14]的密排加糙消力池的材料为砾石,均匀密排。本文在此基础上,分析密排加糙水跃的共轭水深、水跃旋滚长度、水跃长度、壁面平均切应力随弗劳德数、跃前断面水深、跃后断面水深、壁面粗糙度的变化规律,给出人工密排加糙壁面(以下简称人工粗糙壁面)水跃的共轭水深、水跃旋滚长度、水跃长度、壁面平均切应力、壁面阻力的计算方法,并通过算例说明计算过程。

## 2 人工粗糙壁面水跃的共轭水深

人工粗糙壁面的水跃共轭水深可以通过动量

方程求解。图1为一粗糙壁面矩形断面上发生的水跃。图中: $h_1$ 和 $h_2$ 、 $v_1 = q/h_1$ 和 $v_2 = q/h_2$ 分别为跃前、跃后断面的水深、流速; $L_r$ 为水跃的旋滚长度; $L_j$ 为水跃长度; $F$ 为壁面阻力; $k_s$ 为壁面粗糙度。

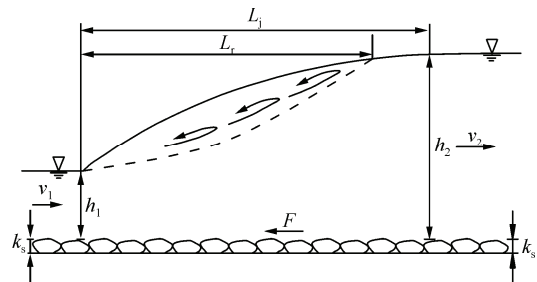


图1 粗糙壁面水跃  
Fig.1 Hydraulic jump on roughened beds

通过跃前和跃后断面的动量方程,可得

$$\gamma h_1^2 / 2 - \gamma h_2^2 / 2 - F = q\gamma(v_2 - v_1) / g \quad (1)$$

由上式可以解出

$$h_2 = \sqrt{h_1^2 + 2q(v_1 - v_2) / g - 2F / \gamma} \quad (2)$$

式中: $q$ 为单宽流量; $g$ 为重力加速度; $\gamma$ 为水的重度。

将 $v_1 = q/h_1$ 、 $v_2 = q/h_2$ 代入式(2)得

$$\frac{h_2}{h_1} = \sqrt{1 + \frac{2q^2}{gh_1^3} \left( \frac{h_2 - h_1}{h_2} \right) - \frac{2F}{\gamma h_1^2}} = \sqrt{1 + 2Fr_1^2 \left( 1 - \frac{h_1}{h_2} \right) - \frac{2F}{\gamma h_1^2}} \quad (3)$$

式中: $h_2/h_1$ 为共轭水深比; $Fr_1 = q / \sqrt{gh_1^3}$ 为跃前断面的弗劳德数。

由式(3)可以看出,共轭水深比 $h_2/h_1$ 与跃前断面的弗劳德数 $Fr_1$ 、水的重度 $\gamma$ 、壁面阻力 $F$ 有关, $F$ 越大,共轭水深比越小。对于一般混凝土壁面,由于壁面阻力很小,可取 $F = 0$ ,即得出水跃共轭水深公式

$$h_2 / h_1 = 0.5(\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1) \quad (4)$$

但对于人工粗糙壁面,壁面阻力 $F$ 不能忽略,而 $F$ 又与壁面粗糙度有关。壁面粗糙度可以用中值粒径 $d_{50}$ 来表示,即 $d_{50} = k_s$ (其中 $k_s$ 为人工加糙的粗糙高度)。

文献[8]和文献[14]对粗糙壁面水跃的共轭水深进行了试验,试验共包含409组数据,壁面粗糙度 $k_s$ 分别为0.39cm、0.46cm、0.55cm、0.82cm、1.04cm、1.46cm、2.39cm、3.2cm, $Fr_1$ 的范围为2.1~10.5。

对于粗糙壁面水跃共轭水深的计算已有一些公式,笔者依据文献[8]和文献[14]的试验资料对这些公式进行如下分析。

文献[8]收录的共轭水深比为

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{1 + 8(1 - 0.42 \frac{k_s}{h_1}) Fr_1^2} - 1 \right\} \quad (5)$$

上式计算的平均误差为5.82%，误差超过10%的有67组，其中有14组误差为15%~20%，有7组误差为20%~30%，有5组误差大于30%。

文献[8]给出的公式为

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{1 + 8 \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \arctan \left[ 0.8 \left( \frac{k_s}{h_1} \right)^{0.75} \right] \right\} Fr_1^2} - 1 \right\} \quad (6)$$

上式计算的平均误差为4.48%，误差超过10%的有25组，其中有5组误差为15%~20%。

文献[15]提出的水跃共轭水深的计算公式为

$$\frac{h_2}{h_1} - 1 = \sqrt{2} \exp\left(-\frac{k_s}{h_1 Fr_1^{2/3}}\right) (Fr_1 - 1)^{0.963} \quad (7)$$

上式计算的平均误差为4.38%，误差超过10%的有14组，其中有5组误差为15%~20%。显然该式的精度略高于式(6)。

笔者分析了文献[8]和文献[14]的409组数据，得出共轭水深比  $\eta = h_2 / h_1$  与壁面相对粗糙度  $k_s / h_1$ 、弗劳德数  $Fr_1$  的关系如图2所示。由图可得

$$\frac{h_2}{h_1} = 2.3145 (Fr_1 - 1)^{0.73872} \left[ \exp\left(-\frac{k_s}{h_1 Fr_1^{2/3}}\right) \right]^{0.7776} \quad (8)$$

上式的平均误差4.06%，误差超过10%的有19组，其中有3组误差为15%~20%，相关系数  $R^2=0.976$ 。误差的原因是水跃区的水流急剧变化，不管是跃前断面水深还是跃后断面水深都上下波动，给测量造成了一定的困难。

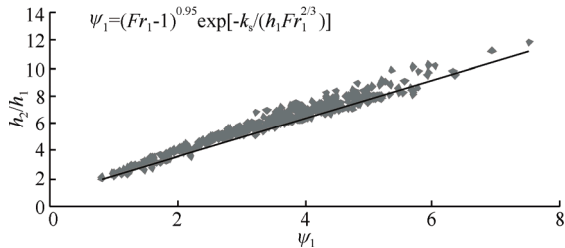


图2  $h_2 / h_1$  与  $\psi_1$  关系

Fig.2 The variety of  $h_2 / h_1$  with  $\psi_1$

由上面的分析可以看出，以上公式均为显函数计算式。其中式(5)和式(6)是在不考虑壁面阻力式(4)的基础上做的修正，为半经验公式；式(7)和式(8)是在对水跃共轭水深影响因素分析的基础上得出的经验公式。通过比较得出，式(8)的平均误差最小。

### 3 人工粗糙壁面水跃的旋滚长度和水跃长度

水跃的旋滚长度和水跃长度如图1所示。旋滚长度是指跃首至旋滚结束断面间的水平距离，水跃

长度是指跃首断面至跃后水面近似与渠底平行的断面间的水平距离。对于水跃的旋滚长度，Hughes给出水跃旋滚长度的计算公式为<sup>[8]</sup>

$$L_r = 8h_1 (Fr_1 - 1.5) \quad (9)$$

Pietrkowski和Smetana提出的公式为<sup>[8]</sup>

$$L_r = ah_1 (h_2 / h_1 - 1.0) \quad (10)$$

其中  $a$  的取值可以为6、5.5、5.2或4.616<sup>[8]</sup>。

2004年，Carollo和Ferro给出了水跃旋滚长度的两个计算式<sup>[8]</sup>，即

$$L_r = bh_1 (h_1 / h_2)^{-1.272} \quad (11)$$

$$L_r = ch_1 (Fr_1 - 1) \quad (12)$$

其中： $b = 2.244$ ； $c = 6.525 \exp(-0.6k_s / h_1)$ <sup>[8]</sup>。

文献[8]根据Hughes和Flack以及自己的试验共544组数据，分析了式(10)(取系数为  $a = 4.616$ )和式(11)。前者的平均误差为13.6%，其中有34组的误差超过了30%；后者的平均误差为12.6%，其中有31组的误差超过了30%。但以上两式中均未考虑粗糙度的影响，公式似不完善。对于式(12)，根据文献[8]的分析，公式的平均误差为12.3%，544组数据中有37组的误差超过了30%。

笔者用文献[8]的公式验证了文献[8]的试验资料，其粗糙度  $k_s$  的取值为0.46cm、0.82cm、1.46cm、2.39cm、3.2cm，弗劳德数范围为2.1~9.89。对277组数据的分析结果表明，式(12)的平均误差为15%，误差大于10%的有179组，其中10%~20%的有110组，20%~30%的有45组，30%~40%的有15组，40%~50%的有7组，误差大于50%的有2组。由此可见，用式(12)计算水跃的旋滚长度误差较大。

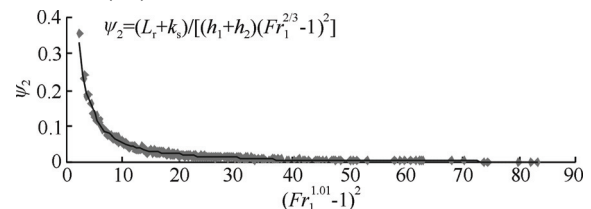


图3  $\psi_2$  与  $(Fr_1^{1.01} - 1)^2$  的关系

Fig.3 The relationship between  $\psi_2$  and  $(Fr_1^{1.01} - 1)^2$

对文献[8]的277组试验数据重新分析，得到水跃旋滚长度  $(L_r + k_s) / [(h_1 + h_2)(Fr_1^{1.5} - 1)^2]$  与  $(Fr_1^{1.01} - 1)^2$  的关系，如图3所示。由图可得

$$\frac{L_r + k_s}{(h_1 + h_2)(Fr_1^{1.5} - 1)^2} = 0.9782 (Fr_1^{1.01} - 1)^{-2.5035} \quad (13)$$

整理得

$$L_r = 0.9782 (Fr_1^{1.01} - 1)^{-2.5035} (h_1 + h_2) (Fr_1^{1.5} - 1)^2 - k_s \quad (14)$$

上式的平均误差为4.25%，超过10%的有54组，其中

有20组超过了15%。 $R^2=0.9907$ 。可见用上式计算的水跃旋滚长度精度明显高于文献[8]给出的公式。

对于水跃长度,文献[8]未给出测量结果。文献[14]测量了水跃长度,共92组数据,粗糙高度(即粒径的高度) $d_{65}$ 为0.43cm、0.64cm、1.13cm,中值粒径 $d_{50}$ 为0.39cm、0.55cm、1.04cm,且 $d_{50}=k_s$ ,弗劳德数 $Fr_1$ 为2.4~10.5。提出的水跃长度的计算公式为

$$\frac{L_j}{h_2} = \frac{8Fr_1 + 6\sqrt{Fr_1} - 14}{1.4Fr_1 - 0.4} \frac{1 - 0.35\sqrt{d_{65}/h_1}}{1 - 0.2d_{65}/h_1} \quad (15)$$

上式的平均误差为6.09%,超过10%的有19组,其中3组数据误差为15%~20%。可见上式的计算精度较高。

一般习惯用中值粒径表示粗糙高度 $k_s$ ,笔者将中值粒径代入上式进行分析,结果相差不大,平均误差为6.14%,误差超过10%的仍是19组数据,其中有4组数据误差为15%~20%,有一组大于20%。所以在用式(15)计算时可用中值粒径表示粗糙高度。

为了分析水跃长度与水跃旋滚长度之间的关系,对文献[14]的试验数据分析,得到水跃相对长度 $(L_j + k_s) / [(h_1 + h_2)(Fr_1^{1.5} - 1)^2]$ 与 $(Fr_1^{1.01} - 1)^2$ 的关系,如图4所示。由图4可得

$$\frac{L_j + k_s}{(h_1 + h_2)(Fr_1^{1.5} - 1)^2} = 1.2621(Fr_1^{1.01} - 1)^{-2.4417} \quad (16)$$

$$L_j = 1.2621(Fr_1^{1.01} - 1)^{-2.4417} (h_1 + h_2)(Fr_1^{1.5} - 1)^2 - k_s \quad (17)$$

上式的平均误差为7.16%,超过10%的有28组,其中有6组数据误差为15%~20%, $R^2=0.9942$ 。分析原因,主要是由于水跃区水流前后波动较大,水跃长度不易测准,实际测量取其多次测量的平均值。

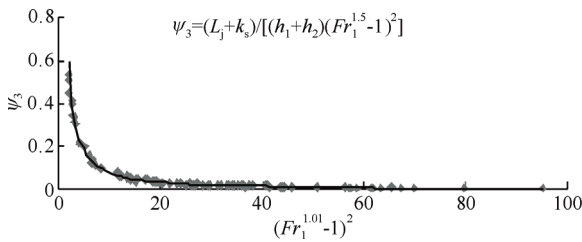


图4  $\psi_3$  与  $(Fr_1^{1.01} - 1)^2$  的关系

Fig.4 The relationship between  $\psi_3$  and  $(Fr_1^{1.01} - 1)^2$

比较式(14)和式(17)得

$$L_j = 1.29(L_r + k_s)(Fr_1^{1.01} - 1)^{0.0618} - k_s \quad (18)$$

由上式可以看出,在弗劳德数 $Fr_1$ 为2.4~10.5时,水跃长度为水跃旋滚长度的1.3~1.46倍,且弗劳德数越大,水跃长度越大。

在以往研究中,由于未对二者关系加以区别而造成设计中的困难。本文提出的水跃长度和水跃旋

滚长度的关系对消力池长度的设计具有重要意义。

## 4 人工粗糙壁面消力池的壁面阻力系数及壁面平均切应力

在通常粗糙度时,由于壁面阻力 $F$ 较小,所以忽略了这个因素。当有人工加糙时,阻力的损失将相当大,必须考虑壁面阻力的影响。设

$$F = C_f \gamma h_1^2 / 2 \quad (19)$$

式中 $C_f$ 为壁面阻力系数。

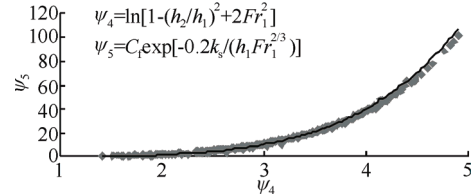


图5  $\psi_4$  与  $\psi_5$  关系

Fig.5 The relationship between  $\psi_4$  and  $\psi_5$

分析文献[8]和文献[14]的409组数据,得到 $C_f \exp[-0.2k_s / (h_1 Fr_1^{2/3})]$ 与 $\ln[1 - (h_2 / h_1)^2 + 2Fr_1^2]$ 的关系,如图5所示。由图可得

$$C_f = 0.0494 \exp\left(\frac{0.2k_s}{h_1 Fr_1^{2/3}}\right) \left\{ \ln\left[1 - \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 + 2Fr_1^2\right] \right\}^{4.8269} \quad (20)$$

上式的相关系数 $R^2=0.956$ 。

设人工粗糙床面阻力为

$$F = \tau_0 \chi L_j \quad (21)$$

式中: $\tau_0$ 为壁面平均切应力; $\chi L_j$ 为壁面的面积,由于消力池仅在底部加糙,所以湿周 $\chi = b$ ,对于单位宽度, $\chi L_j = 1 \times L_j = L_j$ 。比较式(19)和式(21)得

$$\tau_0 = \frac{1}{2L_j} \gamma h_1^2 C_f \quad (22)$$

将式(20)代入式(22)得

$$\tau_0 = \frac{0.0494}{2L_j} \gamma h_1^2 \exp\left(\frac{0.2k_s}{h_1 Fr_1^{2/3}}\right) \left\{ \ln\left[1 - \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 + 2Fr_1^2\right] \right\}^{4.8269} \quad (23)$$

相关算例如下。已知壁面粗糙度 $k_s = 1.13$  cm,跃前水深 $h_1 = 1.8$  cm,单宽流量为 $q = 0.0455 \text{ m}^3 / (\text{s} \cdot \text{m})$ ,求跃后水深 $h_2$ 、水跃旋滚长度 $L_r$ 、水跃长度 $L_j$ 、壁面阻力系数 $C_f$ 和壁面平均切应力 $\tau_0$ 。求解过程如下。

$$Fr_1 = q / \sqrt{gh_1^3} = 0.0455 / \sqrt{9.8 \times 0.018^3} = 6.02$$

$$L_r = 0.9782(Fr_1^{1.01} - 1)^{-2.5035} (h_1 + h_2)(Fr_1^{1.5} - 1)^2 - k_s = 41.22 \text{ cm}$$



$$L_j = 1.3(L_r + k_s)(Fr_1^{1.01} - 1)^{0.0583} - k_s = 60.56\text{cm}$$

$$C_f = 0.0494 \exp\left(\frac{0.2k_s}{h_1 Fr_1^{2/3}}\right) \left\{ \ln\left[1 - \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 + 2Fr_1^2\right] \right\}^{4.8269}$$

$$= 18.824$$

$$\tau_0 = \gamma h_1^2 C_f / (2L_j) = 49.35\text{N/m}^2$$

$$h_2 = 2.3145h_1 (Fr_1 - 1)^{0.73872} \left[ \exp\left(-\frac{k_s}{h_1 Fr_1^{2/3}}\right) \right]^{0.7776}$$

$$= 11.84\text{cm}$$

模型实测跃后水深  $h_2 = 12.31\text{cm}$ ，相差3.5%，水跃长度为  $L_j = 60.96\text{cm}$ ，相差0.66%，壁面阻力系数  $C_f = 17.248$ ，相差9.14%。

用以上算例的已知参数，可求得一般混凝土壁面水跃的跃后水深和水跃长度，即

$$h_2' = 0.5h_1(\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1) = 14.45\text{cm}$$

$$L_j' = 9.4(Fr_1 - 1)h_1 = 82.23\text{cm}$$

与一般混凝土壁面相比，人工粗糙壁面消力池的跃后水深减小了  $(h_2' - h_2) / h_2' \times 100 = 17.79\%$ ，水跃长度减小了  $(L_j' - L_j) / L_j' \times 100 = 26.35\%$ 。

## 5 结 论

根据 Francesco 和 Hughes 对人工密排加糙水跃的试验资料，分析并给出了人工密排加糙水跃共轭水深、水跃旋滚长度、水跃长度、壁面阻力系数、壁面平均切应力的计算方法。共轭水深比随着跃前断面弗劳德数的增大而增大，随着壁面粗糙度的增大而减小，水跃旋滚长度和水跃长度、壁面切应力也是跃前和跃后断面水深、跃前断面弗劳德数和壁面粗糙度的函数。分析表明，水跃共轭水深比的计算式(7)和式(8)精度较高，式(7)的平均误差为4.38%，式(8)的平均误差最小，为4.06%。水跃旋滚长度式(9)~(11)中没有考虑粗糙高度，式(12)虽然考虑了粗糙高度，但计算误差大，平均误差为12.3%，作者提出的式(14)精度最高，平均误差仅为4.25%。水跃长度以式(15)精度最高，平均误差为6.14%。式(18)分析了水跃长度与水跃旋滚长度之间的关系，在弗劳德数  $Fr_1$  为2.4~10.5范围内，水跃长度为水跃旋滚长度的1.3~1.46倍，弗劳德数越大，水跃长度越大。

## 参 考 文 献 (References)

[1] Bradley J N, Peterka A J. Hydraulic design of stilling

basins[J]. Journal of the Hydraulics Division, 1957, 83(5): 1-14.

[2] Narayana N P, Unny T E. Shapes of appurtenances in stilling basins[J]. Journal of Hydraulic Division, 1964, 90(3): 1-21.

[3] Narayana P N, Goel A, Dubey A K. Hydraulic jump type stilling basin for low Froude numbers[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1989, 115(3): 989-994.

[4] 闫晋垣. 掺气分流墩设施的研究[J]. 水利学报, 1988(12): 46-50. (Yan Jinyuan. Study on aerated flow by splitting pier[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1988(12): 46-50 (in Chinese)).

[5] Ead S A, Rajaratnam N. Hydraulic jumps on corrugated beds[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2002, 128(7): 656-663.

[6] Ead S A, Rajaratnam N. Plane turbulent wall jets on rough boundaries with limited tailwater[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2004, 130(10): 1245-1250.

[7] Abbaspour A, Dalir A H, Farsadizadeh D, et al. Effect of sinusoidal corrugated bed on hydraulic jump characteristics[J]. Journal of Hydro-environment Research, 2009(3): 109-117.

[8] Carollo F G, Ferro V, Pampalone V. Hydraulic jumps on rough beds[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2007, 133(9): 989-999.

[9] Pagliara S, Lotti I, Palermo M. Hydraulic jump on rough bed of stream rehabilitation structures[J]. Journal of Hydro-environment Research, 2008(2): 29-38.

[10] 薛朝阳. 考虑摩阻力影响的水跃方程[J]. 河海大学学报, 1993, 21(2): 109-114. (Xue Zhaoyang. A hydraulic jump equation involving the friction force[J]. Journal of Hehai University, 1993, 21(2): 109-114 (in Chinese)).

[11] 程香菊, 陈永灿. 波浪形底板上水跃的数值模拟[J]. 水利学报, 2005, 36(10): 1252-1257. (Cheng Xiangju, Chen Yongcan. Numerical simulation of hydraulic jumps on corrugated beds[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2005, 36(10): 1252-1257 (in Chinese)).

[12] Ead S A, Rajaratnam N, Katopodis C, et al. Turbulent open-channel flow in circular corrugated culverts[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2000, 126(10): 750-757.

[13] 聂孟喜. 陡坡明槽反弧段空化问题的试验研究[J]. 水力发电学报, 1987, 6(4): 79-88(Nie Mengxi. Preliminary experimental study of roughening bucket for cavitation protection in open flow[J]. Journal of Hydroelectric Engineering, 1987, 6(4): 79-88 (in Chinese)).

[14] Hughes W C, Flack J E. Hydraulic jump properties over a rough bed[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1984, 110(12): 1755-1771.

[15] Carollo F G, Ferro V, Pampalone V. New solution of classical hydraulic jump[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2009, 135(6): 527-531.