

基于面积坐标和解析试函数的厚薄通用板单元

王丽¹ 龙志飞² 卢玉林¹ 魏佳¹ 郭丹² 刘存真²

(1 防灾科技学院 065201 廊坊; 2 中国矿业大学力学与建筑工程学院 100083 北京)

摘要: 求出了 Mindlin-Reissner 厚板理论控制方程的基本解析解, 以其作为试探函数构造了两个基于第二类四边形面积坐标的广义协调厚薄通用板单元 AATF-PQ4a 和 AATF-PQ4b; 在此基础上计算了承受均布荷载方板的中心挠度和中心弯矩。结果表明: 两种单元随网格加密而趋近于精确解, 表现出较高的精度和较好的收敛性, 而且 AATF-PQ4b 的收敛速度比 AATF-PQ4a 快; 对于薄板极限情况, 这两种厚薄通用板单元自动退化为薄板单元, 完全无剪切闭锁现象发生; 两种板单元均对网格畸变不敏感, 具有较好的稳定性, 适用于实际工程计算。

关键词: 有限元; 试探函数; 厚薄通用板元; 剪切闭锁

中图分类号: O241.8 **文献标识码:** A **DOI:** 10.11776/cjam.31.02.B045

1 引言

基于第二类四边形面积坐标的解析试函数法已经由文献[1]提出。本文将文献[1]提出的 10 项试探函数延伸到 12 项, 再将 Mindlin-Reissner 厚板理论的基本解析解作为试探函数, 构造两个厚薄通用板单元 AATF-PQ4a 和 AATF-PQ4b, 当问题退化到薄板结构时, 可给出薄板结构的解答。这种基于解析试函数的方法可在源头上消除剪切闭锁现象, 体现了离散法与解析法的渗透与互补。最后, 本文通过几个具体算例进行计算, 检验这两个单元的性能。

2 厚板理论的基本解析解

在 Mindlin-Reissner 厚板平衡微分方程中, 如果将内力改用位移表示, 就得到厚板位移法的基本微分方程^[2-3]。考虑荷载为零时的齐次问题, 微分方程的解可以表示为

$$w = F - \frac{D}{C} \nabla^2 F, \quad \psi_x = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \psi_y = \frac{\partial F}{\partial y} \quad (1)$$

式中: F 是双调和函数, 满足双调和方程 $\nabla^2 \nabla^2 F = 0$; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; $D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$; $C = \frac{5Et}{12(1+\mu)}$ 。其中: E 为弹性模量; μ 为泊松比; t 为单元厚度。

利用第二类四边形面积坐标^[4-7], 设 F 为含 12 个系数多项式, 则

$$F = [1, Z_1, Z_2, Z_1^2, Z_1 Z_2, Z_2^2, Z_1^3, Z_1^2 Z_2, Z_1 Z_2^2, Z_2^3, f_3 Z_1^4 - f_1 Z_1^3 Z_2, f_3 Z_2^4 - f_2 Z_2^3 Z_1] \lambda \quad (2)$$

式中: $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, \lambda_8, \lambda_9, \lambda_{10}, \lambda_{11}, \lambda_{12}]^T$; Z_1, Z_2 均为第二类四边形面积坐标的坐标分量; $f_1 = \overline{b_1^2} + \overline{c_1^2}$, $f_2 = \overline{b_2^2} + \overline{c_2^2}$, $f_3 = \overline{b_1 b_2} + \overline{c_1 c_2}$ 。其中 $\overline{b_1}, \overline{b_2}, \overline{c_1}, \overline{c_2}$ 为第二类四边形面积坐标与直角坐标的转换系数^[4]。

位移 w 、 ψ_x 、 ψ_y 和曲率 $\mathbf{k} = [k_x \ k_y \ 2k_{xy}]^T$ 以及剪应变 $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_x \ \gamma_y]^T$ 的表示式分别为

$$\begin{Bmatrix} w \\ \psi_x \\ \psi_y \end{Bmatrix} = [\mathbf{G}_1 \ \mathbf{G}_2 \ \mathbf{G}_3 \ \mathbf{G}_4] \boldsymbol{\lambda} \quad (3)$$

$$\begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ 2k_{xy} \end{Bmatrix} = [\boldsymbol{\kappa}_1 \ \boldsymbol{\kappa}_2 \ \boldsymbol{\kappa}_3 \ \boldsymbol{\kappa}_4] \boldsymbol{\lambda} \quad (4)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{Bmatrix} = [\boldsymbol{\Gamma}_1 \ \boldsymbol{\Gamma}_2 \ \boldsymbol{\Gamma}_3 \ \boldsymbol{\Gamma}_4] \boldsymbol{\lambda} \quad (5)$$

式中 \mathbf{G}_1 、 \mathbf{G}_2 、 \mathbf{G}_3 、 \mathbf{G}_4 和 $\boldsymbol{\kappa}_1$ 、 $\boldsymbol{\kappa}_2$ 、 $\boldsymbol{\kappa}_3$ 、 $\boldsymbol{\kappa}_4$ 以及 $\boldsymbol{\Gamma}_1$ 、 $\boldsymbol{\Gamma}_2$ 、 $\boldsymbol{\Gamma}_3$ 、 $\boldsymbol{\Gamma}_4$ 的表达式参见文献[8]。

3 四结点厚板元的构造

利用前面推导的厚板理论解析基本解作为试探函数，采用四个结点的位移 w 、 ψ_x 、 ψ_y 作为基本未知量，由 12 个协调条件构造四结点厚薄通用板元 AATF-PQ4a 和 AATF-PQ4b。

首先选取由式(3)~(5)包含 12 个参数的位移场、曲率场、剪应变场构成单元的物理场子空间。其次本文采用两种不同的协调条件。

方案 a 采用 12 个点协调条件^[9-10](AATF-PQ4a 单元)，方案 b 采用 8 个点协调条件和 4 个边协调条件^[8-9](AATF-PQ4b 单元)，这两种协调条件分别表示为

$$w|_i = w_i, \psi_x|_i = \psi_{xi}, \psi_y|_i = \psi_{yi} \quad (6a)$$

$$w|_i = w_i, \psi_s|_i = \psi_{si}, \int_{l_{ij}} (\psi_n - \tilde{\psi}_n) ds = 0 \quad (6b)$$

将四个结点坐标代入式(3)，得

$$\mathbf{q} = \mathbf{T}\boldsymbol{\lambda} \quad (7)$$

式中 \mathbf{q} 为结点位移向量，其表达式为

$$\mathbf{q} = [w_1, \psi_{x1}, \psi_{y1}, w_2, \psi_{x2}, \psi_{y2}, w_3, \psi_{x3}, \psi_{y3}, w_4, \psi_{x4}, \psi_{y4}]^T \quad (8)$$

对式(7)求逆，得

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{q} \quad (9)$$

曲率场式(4)和剪应变场式(5)可合记为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{S}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{q} = \mathbf{B}\mathbf{q} \quad (10)$$

式中

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\boldsymbol{\kappa}_x \ \boldsymbol{\kappa}_y \ 2\boldsymbol{\kappa}_{xy} \ \gamma_x \ \gamma_y]^T \quad (11)$$

\mathbf{S} 可由式(4)、式(5)得出，且

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}\mathbf{T}^{-1} \quad (12)$$

令

$$\tilde{\mathbf{u}} = \{w \ \psi_x \ \psi_y\}^T \quad (13)$$

则式(3)可记为

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{F}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{F}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{q} = \mathbf{N}\mathbf{q} \quad (14)$$

式中 \mathbf{F} 由式(2)给出，且

$$\mathbf{N} = \mathbf{F}\mathbf{T}^{-1} \quad (15)$$

在式(11)中，应变场 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 及其矩阵 \mathbf{B} 已经求出。

因此，单元刚度矩阵 \mathbf{K}^e 可按式(15)用高斯积分求出

$$\mathbf{K}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} J d\xi d\eta \quad (16)$$

式中： \mathbf{J} 为坐标变换的雅可比行列式； \mathbf{D} 为弹性矩阵。

4 数值算例

4.1 算例 1

计算承受均布荷载的简支方板和固支方板，边长为 1m，泊松比为 0.3，均布荷载 $q=1\text{N}\cdot\text{m}^{-2}$ 。对于 $t=0.3\text{m}$ 的厚板， $E=4.04444\text{Pa}$ ；对于 $t=0.001\text{m}$ 的薄板， $E=109.2\text{MPa}$ 。采用图 1(a)所示矩形单元网格计算中心挠度和中心弯矩。计算结果如表 1~表 4 所示(其中： N 为网格数； t 为板厚)，可看到单元随网格加密而趋近于精确解，表现出较高的精度和较好的收敛性，而且 AATF-PQ4b 的收敛速度比 AATF-PQ4a 快；两个单元在薄板情况下，自动退化为薄板单元，计算出正确的结果，并且没有发生剪切闭锁现象。

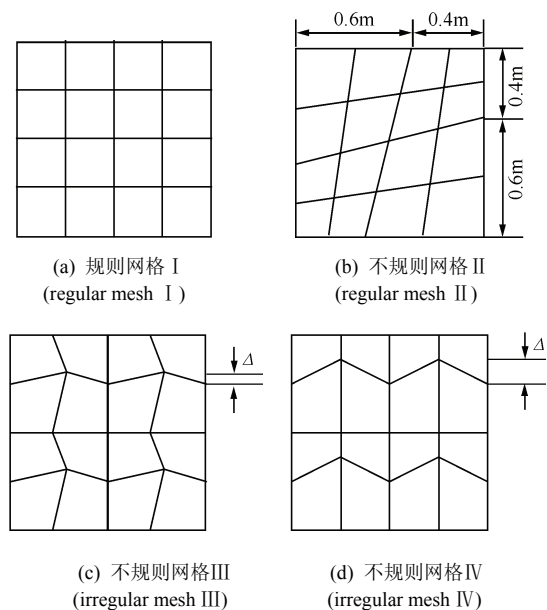


图 1 四种网格
Fig.1 Four meshes

表1 均布荷载作用下固支方板中心挠度值

Tab.1 Central deflection of clamped square plate under uniform loading

	网格 (mesh)	厚板固支 (clamped thick plate)		薄板固支 (clamped thin plate)	
		AATF-PQ4a	AATF-PQ4b	AATF-PQ4a	AATF-PQ4b
		2×2	0.3441	0.3440	0.1403
	4×4	0.3274	0.3247	0.1304	0.1273
	8×8	0.3234	0.3225	0.1275	0.1270
	16×16	0.3224	0.3224	0.1268	0.1267
	32×32	0.3221	0.3221	0.1266	0.1265
精确解 (exact solution)		0.3227	0.3227	0.1265	0.1265

表2 均布荷载作用下简支方板中心挠度值

Tab.2 Central deflection of simply supported square plate under uniform loading

	网格 (mesh)	厚板简支 (simply supported thick plate)		薄板简支 (simply supported thin plate)	
		AATF-PQ4a	AATF-PQ4b	AATF-PQ4a	AATF-PQ4b
		2×2	0.6326	0.6010	0.4328
	4×4	0.6048	0.6001	0.4129	0.4080
	8×8	0.5979	0.5961	0.4079	0.4075
	16×16	0.5962	0.5958	0.4067	0.4063
	32×32	0.5958	0.5957	0.4063	0.4063
精确解 (exact solution)		0.5956	0.5956	0.4062	0.4062

表3 均布荷载作用下固支方板中心弯矩的相对精度

Tab.3 The relative precision for the central moment of clamped square plate under uniform loading

网格 (mesh)	厚板固支 (clamped thick plate)		薄板固支 (clamped thin plate)		
	AATF-PQ4a	AATF-PQ4b	AATF-PQ4a	AATF-PQ4b	
	2×2	1.0265	1.0083	1.0139	1.0096
	4×4	1.0070	1.0050	1.0087	1.0071
	8×8	1.0045	1.0030	1.0071	1.0043
	16×16	1.0029	1.0025	1.0043	1.0025
	32×32	1.0025	1.0015	1.0015	1.0008

表4 均布荷载作用下简支方板中心弯矩的相对精度

Tab.4 The relative precision for the central moment of simply supported square plate under uniform loading

网格 (mesh)	厚板简支 (simply supported thick plate)		薄板简支 (simply supported thin plate)		
	AATF-PQ4a	AATF-PQ4b	AATF-PQ4a	AATF-PQ4b	
	2×2	1.0145	1.0030	1.0178	1.0136
	4×4	1.0074	1.0015	1.0082	1.0074
	8×8	1.0023	1.0005	1.0023	1.0015
	16×16	1.0005	1.0004	1.0015	1.0004
	32×32	1.0004	1.0003	1.0004	1.0003
精确解 (exact solution)		0.04788	0.04788	0.04788	0.04788

4.2 算例2

计算承受均布荷载的简支方板和固支方板,板厚 t 分别为 0.1m 和 0.001m, 其他结构参数与算例 1 相同, 讨论单元在网格畸变下的性能。计算结果分别如表 5 和表 6 所示, 无论是厚板还是薄板, 两个单元都给出趋近于精确解的解答, 说明这两个单元

对网格畸变不敏感, 具有较好的稳定性。

表5 固支方板在网格畸变下中心挠度值

Tab.5 Central deflection of clamped square plate in irregular mesh

网格类型 (mesh type)	厚板固支 (clamped thick plate)		薄板固支 (clamped thin plate)		
	AATF-PQ4a	AATF-PQ4b	AATF-PQ4a	AATF-PQ4b	
	I	0.1646	0.1515	0.1403	0.1275
II	0.1699	0.1589	0.1474	0.1276	
III, $\Delta=0.05m$	0.1649	0.1568	0.1407	0.1284	
III, $\Delta=0.10m$	0.1696	0.1569	0.1464	0.1325	
III, $\Delta=0.12m$	0.1739	0.1679	0.1518	0.1336	
IV, $\Delta=0.05m$	0.1647	0.1537	0.1405	0.1277	
IV, $\Delta=0.10m$	0.1657	0.1575	0.1412	0.1305	
IV, $\Delta=0.20m$	0.1744	0.1694	0.1448	0.1325	
精确解 (exact solution)		0.1499	0.1499	0.1265	0.1265

表6 简支方板在网格畸变下中心挠度值

Tab.6 Central deflection of simply supported square plate in irregular mesh

网格类型 (mesh type)	厚板简支 (simply supported thick plate)		薄板简支 (simply supported thin plate)		
	AATF-PQ4a	AATF-PQ4b	AATF-PQ4a	AATF-PQ4b	
	I	0.4551	0.4315	0.4328	0.4102
II	0.4535	0.4453	0.4328	0.4082	
III, $\Delta=0.05m$	0.4748	0.4684	0.4530	0.4100	
III, $\Delta=0.10m$	0.5234	0.4934	0.5000	0.4095	
III, $\Delta=0.12m$	0.5391	0.5271	0.5098	0.4090	
IV, $\Delta=0.05m$	0.4650	0.4578	0.4430	0.4101	
IV, $\Delta=0.10m$	0.4926	0.4831	0.4713	0.4095	
IV, $\Delta=0.20m$	0.5517	0.5315	0.5176	0.4039	
精确解 (exact solution)		0.4273	0.4273	0.4062	0.4062

5 结束语

由上面算例可以看出: 单元 AATF-PQ4a 和 AATF-PQ4b 随网格加密而趋近于精确解, 具有较高的精度和较好的收敛性, 而且 AATF-PQ4b 的收敛速度比 AATF-PQ4a 快; 两个单元均对网格畸变不敏感, 同时还有较好的稳定性, 当问题退化到薄板结构时, 可给出薄板结构的解答, 不会出现剪切闭锁现象。由于本单元的构造采用了广义协调条件, 因此本单元具有良好的性能并通过分片检验, 是可靠的厚薄板通用单元。综上所述, 本文所构造单元的收敛性可靠且无剪切闭锁现象。

参 考 文 献 (References)

[1] 陈晓明, 岑松. 基于四边形面积坐标的平面单元解析试函数法[J]. 清华大学学报: 自然科学版, 2008, 48(2): 289-293. (Chen

- Xiaoming, Cen Song. Analytical trial function method for plane elements based on quadrilateral area coordinate theory[J]. Journal of Tsinghua University: Science and Technology Edition, 2008, 48(2): 289-293 (in Chinese) .
- [2] 黄克智. 板壳理论[M]. 北京: 清华大学出版社, 1987. (Huang Kezhi. Theory of plates and shells[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1987 (in Chinese)) .
- [3] 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1981. (Hu Haichang. Variational principles in elasticity and applications[M]. Beijing: Science Press, 1981 (in Chinese)) .
- [4] 陈晓明, 岑松, 龙驭球, 等. 含两个分量的四边形单元面积坐标理论[J]. 工程力学, 2007, 24(SI): 1-11. (Chen Xiaoming, Cen Song, Long Yuqiu, et al. A two-component area coordinate method for quadrilateral elements[J]. Engineering Mechanics, 2007, 24(SI): 1-11 (in Chinese)) .
- [5] 龙志飞, 李聚轩, 岑松, 等. 采用面积坐标的四边形板弯曲单元[J]. 工程力学, 1997, 14(4): 1-10. (Long Zhifei, Li Juxuan, Cen Song, et al. A quadrilateral plate bending element by using area coordinate method[J]. Engineering Mechanics, 1997, 14(4): 1-10 (in Chinese)) .
- [6] Long Yuqiu, Li Juxuan, Long Zhifei, et al. Area coordinates used in quadrilateral elements[J]. Communications in Numerical Methods in Engineering, 1999, 15(8): 533-545.
- [7] Long Zhifei, Li Juxuan, Cen Song, et al. Some basic formulae for area coordinates used in quadrilateral elements[J]. Communications in Numerical Methods in Engineering, 1999, 15(12): 841-852.
- [8] 王丽. 四边形第三类面积坐标的建立及应用研究[D]. 北京: 中国矿业大学, 2009. (Wang Li. Establishment and application of the third version of quadrilateral area coordinate[D]. Beijing: China University of Mining and Technology, 2009 (in Chinese)) .
- [9] 龙志飞, 岑松. 有限元法新论[M]. 中国水利水电出版社, 2001. (Long Zhifei, Cen Song. New monograph of finite element method[M]. Beijing: China Hydraulic and WaterPower Press, 2001 (in Chinese)) .
- [10] 龙驭球, 龙志飞, 岑松. 新型有限元法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004. (Long Yuqiu, Long Zhifei, Cen Song. Advanced finite element method in structural engineering[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004 (in Chinese)) .