

R-函数理论及准 Green 函数方法在正交各向异性板振动问题中的应用

李善倾 袁鸿

(暨南大学力学与土木工程系 510632 广州)

摘要:首次将 R-函数理论及准 Green 函数方法应用于求解固支正交各向异性薄板的自由振动问题。首先引入参数变换,将正交各向异性薄板的自由振动微分方程转化为双调和算子的边值问题,并应用 R-函数理论,以解析函数形式描述复杂边界形状;利用问题的基本解和边界方程构造了一个准 Green 函数,该函数满足了问题的齐次边界条件;通过 R-函数理论构造适当的边界方程,消除了积分方程核的奇异性;再采用 Green 公式将其化为第二类 Fredholm 积分方程。数值算例表明:该方法减少了理论计算量,精度较高。本文还证明了其优越性和正确性,是一种新型的数学方法。

关键词: Green 函数; 积分方程; R-函数; 正交各向异性板; 自由振动

中图分类号: O326 **文献标识码:** A **DOI:** 10.11776/cjam.31.02.C023

1 引 言

在工程中,除了材料性质为各向异性的板,还有混凝土空心板、钢筋混凝土板等都可视为正交各向异性板。研究这些板的力学性能及其振动问题非常重要。

Green 函数法被广泛用来求解各种边值问题,然而,对于二维或高维问题,建立 Green 函数极其复杂。在极其简单的区域(如圆、球)上,可以找到 Green 函数,但困难在于虽然易于找到满足基本方程的函数(基本解),却难以满足问题的齐次边界条件。如果以基本解代替 Green 函数,将得到边界积分方程,它一般是一个在边界上具有奇异性的积分方程。针对边界积分方程存在的问题,准 Green 函

数方法采用了另一条途径推导积分方程。用有限元法或有限差分法求解固支多边形薄板问题时,需对整个研究区域划分单元网格,前处理工作量大,数据准备麻烦,且花费大量机时。边界元法则克服了区域型数值方法的缺点,只在边界上划分单元,通过基本解将域内未知量化为边界未知量来求解,可使自由度数目大大减少。但这种方法却存在大量奇异积分,而且在边界及其附近区域上解的精度较低。

使用 R-函数理论和准 Green 函数方法,文献[1-6]已成功求解了简支、固支各向同性薄板、扁球壳的自由振动及弯曲等问题。与有限元法或有限差分法相比,准 Green 函数方法在解决问题时,对整个研究区域划分的单元网格很少,前处理工作量相对小很多,相应地,求解结果的精度会很高。

本文首次采用文献[7]提出的 R-函数理论和准

Green 函数方法,分析了固支正交各向异性薄板的振动问题。利用问题的基本解构造一个准 Green 函数,该函数满足了问题的齐次边界条件,但未能满足基本微分方程。而建立准 Green 函数的关键在于将问题的边界用规范化方程 $\omega = 0$ 表示出来,将问题的区域由不等式 $\omega > 0$ 表示出来。 ω 将存在多种选择,经过适当的数学处理,积分方程核的奇异性可以被克服。R-函数理论可描述任一复杂区域,从而 R-函数理论保证了对于任何复杂区域,总可以找到函数 ω ,从而可将原问题化为无奇异性的第二类 Fredholm 积分方程。本文首次将准 Green 函数方法应用于求解固支正交各向异性薄板的振动问题,通过固支正交各向异性薄板的数值结果再次证明了 R-函数理论和准 Green 函数方法的有效性和可行性。

2 基本方程

正交各向异性板的自由振动微分方程和固支边界条件分别为

$$D_1 \frac{\partial^4 W(\mathbf{x}')}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 W(\mathbf{x}')}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 W(\mathbf{x}')}{\partial y^4} = \bar{m} \bar{\omega}^2 W(\mathbf{x}'), \quad \mathbf{x}' \in \Omega \quad (1)$$

$$W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{x}' \in \Gamma \quad (2)$$

式中: $W(\mathbf{x}')$ 为振型函数; $\mathbf{x}' = (x, y)$; Ω 为笛卡儿坐标系中板中面 ($x-y$ 平面) 所包含的区域; $\Gamma = \partial\Omega$ 为 Ω 的边界; n 为边界曲线的外法线方向; $\bar{\omega}$ 为固有频率; \bar{m} 为单位面积内的质量; $D_1 = E_1 t^3 / [12(1 - \mu_1 \mu_2)]$ 、 $D_2 = E_2 t^3 / [12(1 - \mu_1 \mu_2)]$ 为抗弯主刚度,对于上、下表面平整的板 $D_3 = \sqrt{D_1 D_2}$; t 为板的厚度; E_1 和 E_2 、 μ_1 和 μ_2 分别为两个主方向的弹性模量、泊松比。

引入以下参数及坐标变换

$$m = D_2 / D_1, \quad E = E_1, \quad \mu = \sqrt{\mu_1 \mu_2}, \quad D = Et^3 / [12(1 - \mu^2)], \quad x_1 = x, \quad x_2 = m_1^{-\frac{1}{4}} y \quad (3)$$

式(1)可化为

$$D \nabla^4 W = \bar{m} \bar{\omega}^2 W \quad (4)$$

其中 $\nabla^4 = (\partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2)^2$ 为双调和算子。

3 积分方程的推导

设 $\omega = 0$ 为边界 Γ 的一阶规范化方程,即满足^[8]

$$\omega(\mathbf{x}) = 0, \quad |\nabla \omega| = 1, \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (5)$$

$$\omega(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (6)$$

构造准 Green 函数如下

$$G(\mathbf{x}, \xi) = -r^2 \ln r - e(\mathbf{x}, \xi) \quad (7)$$

$$e(\mathbf{x}, \xi) = -r^2 \ln R + 2\omega(\mathbf{x})\omega(\xi) \quad (8)$$

式中

$$r = \|\xi - \mathbf{x}\| = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2} \quad (9)$$

$$\mathbf{r} = (\xi_1 - x_1)\mathbf{i} + (\xi_2 - x_2)\mathbf{j} \quad (10)$$

$$R = \sqrt{r^2 + 4\omega(\xi)\omega(\mathbf{x})} \quad (11)$$

其中: \mathbf{i} 、 \mathbf{j} 分别表示 x_1 、 x_2 方向的单位向量;

$\mathbf{x} = (x_1, x_2)$; $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ 。

显然准 Green 函数 $G(\mathbf{x}, \xi)$ 满足条件

$$G(\mathbf{x}, \xi)|_{\xi \in \partial\Omega} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}, \xi)}{\partial n} \Big|_{\xi \in \partial\Omega} = 0 \quad (13)$$

为了将边值问题式(2)和式(4)化为积分方程,应用 $C^4(\Omega)$ 函数类的 Green 公式,对所有的 U 、 $V \in C^4(\Omega \cup \Gamma)$ 有

$$\int_{\Omega} (V \nabla^4 U - U \nabla^4 V) d\Omega = \int_{\partial\Omega} [V \frac{\partial}{\partial n} (\nabla^2 U) - \frac{\partial V}{\partial n} \nabla^2 U - U \frac{\partial}{\partial n} (\nabla^2 V) + \frac{\partial U}{\partial n} \nabla^2 V] d\Gamma \quad (14)$$

用式(4)中的 W 、式(7)中的 G 分别代替式(14)中的 U 、 V ,并注意到 $(1/8\pi)r^2 \ln r$ 是双调和算子的基本解^[8],利用式(2)、式(4)、式(12)和式(13)可得

$$W(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} W(\xi) K(\mathbf{x}, \xi) d\Omega \quad (15)$$

式中

$$K(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial^4}{\partial \xi_1^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial \xi_2^4} \right) e(\mathbf{x}, \xi) - \frac{1}{8\pi} \frac{\bar{\omega}^2 \bar{m}}{D} G(\mathbf{x}, \xi) \quad (16)$$

将表达式(8)代入式(16)中,推导可得 $K(\mathbf{x}, \xi)$ 的具体表达式,即

$$\begin{aligned}
 8\pi\mathbf{K}(\mathbf{x},\xi) = & 8\frac{4\omega(\mathbf{x})\omega + \omega(\mathbf{x})R^2\nabla^2\omega - 4(\mathbf{r}\cdot\nabla\omega)\omega(\mathbf{x}) - 4\omega^2(\mathbf{x})(\nabla\omega)^2}{R^4} + \frac{1}{R^4}\{64r^2 + 24r^2\omega(\mathbf{x})\nabla^2\omega + 96\omega(\mathbf{x})\omega + \\
 & 96\omega(\mathbf{x})\mathbf{r}\cdot\nabla\omega + 2r^4\omega(\mathbf{x})\nabla^4\omega + 32r^2\omega(\mathbf{x})\nabla^2\omega + 16r^2\omega(\mathbf{x})\mathbf{r}\cdot\nabla(\nabla^2\omega) + 8r^2\omega^2(\mathbf{x})[\omega\nabla^4\omega + (\nabla^2\omega)^2 + \\
 & 2\nabla\omega\cdot\nabla(\nabla^2\omega)] + 32\omega^2(\mathbf{x})\omega\nabla^2\omega + 32\omega^2(\mathbf{x})\mathbf{r}\cdot[\omega\nabla(\nabla^2\omega) + \nabla\omega\nabla^2\omega] + 32\omega(\mathbf{x})^2\omega[2\nabla^2\omega + \mathbf{r}\cdot\nabla(\nabla^2\omega)] + \\
 & 32\omega^2(\mathbf{x})\nabla^2\omega\mathbf{r}\cdot\nabla\omega + 64\omega^2(\mathbf{x})\nabla\omega\cdot[\nabla\omega + \mathbf{r}\cdot\nabla\nabla\omega] + 8\omega^2(\mathbf{x})r^2\nabla^2(\nabla\omega)^2 - 32\omega(\mathbf{x})^2(\nabla\omega)^2 - \\
 & 32\omega^2(\mathbf{x})\mathbf{r}\cdot\nabla(\nabla\omega)^2\} - [4r^4 + 24r^2\omega(\mathbf{x})\omega + 2r^4\omega(\mathbf{x})\nabla^2\omega + 8r^2\omega^2(\mathbf{x})\omega\nabla^2\omega + 32\omega^2(\mathbf{x})\omega\mathbf{r}\cdot\nabla\omega - \\
 & 8\omega^2(\mathbf{x})r^2(\nabla\omega)^2] \cdot \left\{ \frac{24}{R^8}[r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\mathbf{r}\cdot\nabla\omega + 4\omega^2(\mathbf{x})(\nabla\omega)^2] - \frac{8}{R^6}(1 + \omega\nabla^2\omega) \right\} + 2[16r^2\mathbf{r} + 48r\omega(\mathbf{x})\omega + \\
 & 24\omega(\mathbf{x})r^2\nabla\omega + 8r^2\omega(\mathbf{x})\mathbf{r}\nabla^2\omega + 2r^4\omega(\mathbf{x})\nabla(\nabla^2\omega) + 16r\omega^2(\mathbf{x})\omega\nabla^2\omega + 8r^2\omega^2(\mathbf{x})\nabla\omega\nabla^2\omega + \\
 & 8r^2\omega^2(\mathbf{x})\omega\nabla(\nabla^2\omega) + 32\omega^2(\mathbf{x})\nabla\omega(\mathbf{r}\cdot\nabla\omega) + 32\omega\omega^2(\mathbf{x})(\nabla\omega + \mathbf{r}\cdot\nabla\nabla\omega) - 16\omega^2(\mathbf{x})\mathbf{r}(\nabla\omega)^2 - \\
 & 8\omega^2(\mathbf{x})r^2\nabla(\nabla\omega)^2] \cdot \left[-\frac{2}{R^6}(2r + 4\omega(\mathbf{x})\nabla\omega) \right] - 2\omega(\mathbf{x})\nabla^4\omega - \frac{\bar{\omega}^2\bar{m}}{D}[-r^2\ln r + r^2\ln R - 2\omega(\mathbf{x})\omega]
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

式中： $\omega = \omega(\xi)$ ； $\nabla = \nabla_\xi$ 。

当 $R=0$ 时，即 $\mathbf{x} = \xi$ 且 $\omega = 0$ 时，式(17)中 $\mathbf{K}(\mathbf{x},\xi)$ 才可能出现不连续性。实际上，当 $\mathbf{x} = \xi$ 时，式(17)为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}(\mathbf{x},\xi)|_{\mathbf{x}=\xi} = & \frac{1 + \omega\nabla^2\omega - (\nabla\omega)^2}{\pi\omega^2} - \\
 & \frac{1}{4\pi}\omega\nabla^4\omega + \frac{1}{4\pi}\frac{\bar{\omega}^2\bar{m}}{D}\omega^2
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

为了使积分核 $\mathbf{K}(\mathbf{x},\xi) \in C(\Omega \cup \partial\Omega)$ ，将式(18)中的 $1 + \omega\nabla^2\omega - (\nabla\omega)^2$ 展开成 ω 的幂级数后，幂级数的常数项和 1 次项的系数必须等于 0。下面通过构造一个新的边界规范化方程来保证 $\mathbf{K}(\mathbf{x},\xi)$ 的连续性，为此假设

$$\omega = \omega_0 + \omega_0^2\varphi
 \tag{19}$$

式中 $\omega_0 = 0$ 为边界 Γ 的一阶规范化方程，即满足式(5)和式(6)。显然， $\omega = 0$ 也是一阶规范化方程。容易证明，只要按式(20)选取 φ ，就能保证 $\mathbf{K}(\mathbf{x},\xi)$ 在积分域内处处连续，即

$$\varphi = \frac{1}{2}\left[\nabla^2\omega_0 + \frac{1 - (\nabla\omega_0)^2}{\omega_0}\right]
 \tag{20}$$

将式(20)代入式(19)中，可得

$$\omega = \omega_0 + \frac{1}{2}\omega_0^2\left[\nabla^2\omega_0 + \frac{1 - (\nabla\omega_0)^2}{\omega_0}\right]
 \tag{21}$$

因此，通过任意选择一个边界规范化方程 $\omega_0 = 0$ ，就可以根据式(21)建立一个新的边界规范化方程 $\omega = 0$ ，从而保证积分核 $\mathbf{K}(\mathbf{x},\xi)$ 的连续性。

4 积分方程的离散

对固支多边形正交各向异性薄板自由振动问

题的等效积分方程式(15)进行离散化。将积分域 Ω 划分为若干子域 $\Omega_i (i=1,2,\dots,N)$ ，在各子域中分别应用中矩形公式进行数值求积。则积分方程式(15)可化为齐次线性代数方程组

$$\mathbf{B}_{N \times N}[\mathbf{W}(x_1), \dots, \mathbf{W}(x_N)]^T = 0
 \tag{22}$$

其中 N 为划分的子域数； $\mathbf{W}(x_i)$ 为 \mathbf{W} 在 x_i 处的未知

$$\text{虚拟值； } \mathbf{B}_{N \times N} = (\mathbf{b}_{ij})_{N \times N}, \mathbf{b}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{K}(x_i, \xi_j)A_j, & (i \neq j) \\ \mathbf{K}(x_i, \xi_j)A_j - 1, & (i = j) \end{cases}$$

(这里： $i=1,2,\dots,N; j=1,2,\dots,N; A_j$ 表示第 j 个子域的面积)。

齐次线性方程组式(22)有非平凡解的条件是其系数行列式等于零，即

$$|\mathbf{B}_{N \times N}| = 0
 \tag{23}$$

求解式(23)，可得前 N 阶固有频率 $\bar{\omega}$ ，进一步得到工程频率 $f = \bar{\omega} / (2\pi)$ 。将求得的各阶固有频率 $\bar{\omega}$ 代入线性方程式(22)中，还可求出各子域上挠度的比值，即各阶振动的模态。

5 数值算例

5.1 算例 1

对图 1 所示矩形正交各向异性板，取各项参数为： $a=b=0.75\text{ m}$ ；板厚度 $t=0.1\text{ m}$ ；泊松比 $\mu_1=0.25$ ；弹性模量 $E_1=3\text{ GPa}$ ；单位面积内的质量 $\bar{m}=780\text{ kg/m}^2$ 。坐标变换后如图 2 所示，且 $b_1 = m_1^{-1/4}b$ ， $m_1 = \mu_2 / \mu_1 = E_2 / E_1 = 0.9$ 。根据 R-函数理论^[8-9]，只要取

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2 - \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$$

式中

$\omega_1 = (a^2 - x_1^2) / (2a) \geq 0$, $\omega_2 = (b_1 - x_2)x_2 / b_1 \geq 0$
 则 $\omega_0 = 0$ 是矩形边界的一阶规范化方程, $\omega_1 = 0$ 、
 $\omega_2 = 0$ 分别表示矩形的各两条边。将长方形薄板的
 计算结果列于表 1 中, 本文方法仅用 11×11 矩形子
 域划分(如图 2 所示), 其计算结果就能与 ANSYS
 有限元法(FEM)采用 11×11 、 100×100 、 200×200
 矩形子域划分时的计算结果吻合得很好。

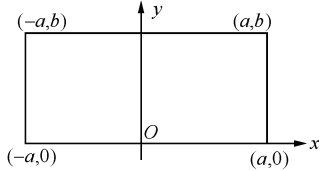


图 1 固支正交各向异性矩形板
 Fig.1 Clamped orthotropic rectangular plate

表 1 固支正交各向异性矩形板的固有频率 f
 Tab.1 Natural frequency of clamped orthotropic rectangular plate

方法 (method)	固有频率 f (natural frequency)/Hz					
	1 阶模态 (first-order model)		2 阶模态 (second-order model)		3 阶模态 (third-order model)	
	f	误差 (error)/ (%)	f	误差 (error)/ (%)	f	误差 (error)/ (%)
the paper 11×11	47.395	-0.797	97.961	0.541	145.14	1.084
FEM 11×11	47.266	-1.067	95.989	-1.483	139.73	-2.687
FEM 100×100	47.770	-0.013	97.429	-0.005	143.65	0.043
FEM 200×200	47.776	—	97.434	—	143.59	—

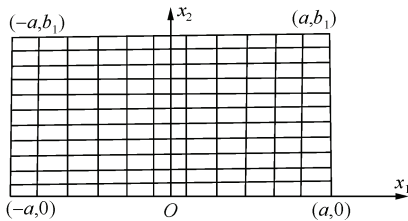


图 2 固支各向同性矩形板
 Fig.2 Clamped isotropic rectangular plate

5.2 算例 2

如图 3 所示的平行四边形正交各向异性板, 其
 各项参数为: $a = 1.1 \text{ m}$, $b = 1.0 \text{ m}$, $c = 1.0 \text{ m}$, $d =$
 1.2 m ; 板厚度 $t = 0.1 \text{ m}$; 泊松比 $\mu_1 = 0.25$; 弹性模
 量 $E_1 = 3 \text{ GPa}$; 单位面积内的质量 $\bar{m} = 780 \text{ kg} / \text{m}^2$ 。
 坐标变换后如图 4 所示, 且 $b_1 = m_1^{-1/4} b$,
 $m_1 = \mu_2 / \mu_1 = E_2 / E_1 = 0.8$ 。根据 R-函数理论^[8-9], 只
 要取

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} - \sqrt{\omega_1^2 + \omega_3^2} - \sqrt{\omega_2^2 + \omega_3^2} + \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$$

式中

$$\omega_1 = (c_1 - x_2)x_2 / c_1 \geq 0,$$

$$\omega_2 = \left(\frac{ac_1}{a-b} + \frac{c_1}{a-b}x_1 - x_2\right) / \sqrt{1 + \left(\frac{c_1}{a-b}\right)^2} \geq 0,$$

$$\omega_3 = \left(\frac{ac_1}{d-a} - \frac{c_1}{d-a}x_1 + x_2\right) / \sqrt{1 + \left(\frac{c_1}{d-a}\right)^2} \geq 0$$

则 $\omega_0 = 0$ 是平行四边边界的一阶规范化方程,
 $\omega_1 = 0$ 、 $\omega_2 = 0$ 、 $\omega_3 = 0$ 分别表示平行四边的上、
 下、左、右四条边。将计算结果列于表 2 中, 并与
 ANSYS 有限元法(FEM)的计算结果进行了对比。采用
 如图 4 所示的平行四边形子域划分形式, 本文方法
 仅用 11×11 子域得到的结果就能与 ANSYS 有限元
 法采用 200×200 子域得到的结果吻合得相当好。

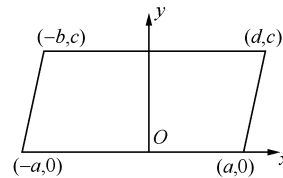


图 3 固支正交各向异性平行四边形板
 Fig.3 Clamped orthotropic parallelogram plate

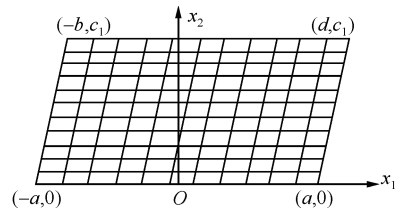


图 4 固支各向同性平行四边形板
 Fig.4 Clamped isotropic parallelogram plate

表 2 固支平行四边形板的固有频率 f
 Tab.2 Natural frequency of clamped orthotropic parallelogram plate

m_1	固有频率 f (natural frequency)/Hz					
	1 阶模态 (first-order model)		2 阶模态 (second-order model)		3 阶模态 (third-order model)	
	本文 方法 (present method)	有限 元解 (FEM)	本文 方法 (present method)	有限 元解 (FEM)	本文 方法 (present method)	有限 元解 (FEM)
0.7	60.372	59.848	77.250	77.309	107.70	108.48
0.8	64.227	63.733	80.879	80.970	111.06	111.90
0.9	67.899	67.427	84.375	84.476	114.31	115.18

5.3 算例 3

如图 5 所示的梯形正交各向异性板, 其各项参数
 为: $a = e = 1.2 \text{ m}$, $b = d = 1.0 \text{ m}$, $c = 1.0 \text{ m}$; 板厚
 度 $t = 0.1 \text{ m}$; 泊松比 $\mu_1 = 0.25$; 弹性模量 $E_1 = 3 \text{ GPa}$;
 单位面积内的质量取 $\bar{m} = 780 \text{ kg} / \text{m}^2$ 。坐标变换后如

图6所示,且 $b_1 = m_1^{-1/4}b$, $m_1 = \mu_2 / \mu_1 = E_2 / E_1 = 0.8$ 。根据 R-函数理论^[8-9], 只要取

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} - \sqrt{\omega_1^2 + \omega_3^2} - \sqrt{\omega_2^2 + \omega_3^2} + \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$$

式中

$$\omega_1 = (c_1 - x_2)x_2 / c_1 \geq 0,$$

$$\omega_2 = \left(\frac{ac_1}{a-b} + \frac{c_1}{a-b}x_1 - x_2\right) / \sqrt{1 + \left(\frac{c_1}{a-b}\right)^2} \geq 0,$$

$$\omega_3 = \left(\frac{ac_1}{a-b} - \frac{c_1}{a-b}x_1 - x_2\right) / \sqrt{1 + \left(\frac{c_1}{a-b}\right)^2} \geq 0$$

则 $\omega_0 = 0$ 是梯形边界的一阶规范化方程, $\omega_1 = 0$ 、 $\omega_2 = 0$ 、 $\omega_3 = 0$ 分别表示梯形的上、下、左、右四条边。将计算结果列于表3中, 并与 ANSYS 有限元法的计算结果进行了对比。采用图6所示的梯形子域划分形式, 本文方法仅用 11×11 子域得到的结果就与 ANSYS 有限元法用 200×200 子域的得到结果吻合得相当好。

从表1~表3的对比结果可知, 准 Green 函数方法采用的子域数远少于 ANSYS 有限元法, 理论计算量减小了很多, 精度较高, 这体现了本文方法的优越性和正确性。

表3 固支梯形板的固有频率 f
Tab.3 Natural frequency of clamped orthotropic trapezoidal plate

m_1	固有频率 f (natural frequency)/Hz					
	1 阶模态 (first-order model)		2 阶模态 (second-order model)		3 阶模态 (third-order model)	
	本文方法 (present method)	有限元解 (FEM)	本文方法 (present method)	有限元法 (FEM)	本文方法 (present method)	有限元法 (FEM)
0.7	60.233	59.915	77.365	77.571	108.19	108.97
0.8	64.085	63.801	80.977	81.239	111.54	112.41
0.9	67.749	67.497	84.474	84.752	114.79	115.72

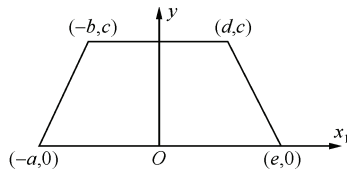


图5 固支正交各向异性梯形板
Fig.5 Clamped orthotropic trapezoidal plate

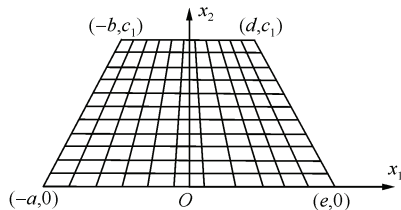


图6 固支各向同性梯形板
Fig.6 Clamped isotropic trapezoidal plate

6 结束语

本文首次采用 R-函数理论和准 Green 函数方法, 研究了固支正交各向异性板的自由振动问题。通过将本文方法得到的计算结果与 ANSYS 有限元法的结果进行比较, 再次证明了本文方法的有效性及其合理性。其为研究复杂边界形状固支正交各向异性板的自由振动问题提供了一种有效的数学方法、新型的计算手段。准 Green 函数方法是一种新的数值方法, 需进一步研究以提高其计算精度并开拓其应用领域。R-函数理论还可用来构造满足边界条件的试函数, 与 Ritz 法、变分法、样条函数近似法等^[10-16]加权残值法结合起来, 有效地解决工程中的各种边值问题。

参 考 文 献 (References)

- [1] 袁鸿, 李善倾, 刘人怀. Pasternak 地基上简支板振动问题的准格林函数方法[J]. 应用数学和力学, 2007, 28(7): 757-762. (Yuan Hong, Li Shanqing, Liu Renhuai. Green quasifunction method for vibration of simply-supported thin polygonic plates on Pasternak foundation[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2007, 28(7): 757-762 (in Chinese)).
- [2] 李善倾, 袁鸿. 简支梯形底扁球壳自由振动问题的准 Green 函数方法[J]. 应用数学和力学, 2010, 31(5): 602-608. (Li Shanqing, Yuan Hong. Quasi-Green's function method for free vibration of simply-supported trapezoidal shallow spherical shell[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2010, 31(5): 602-608 (in Chinese)).
- [3] Li Shanqing, Yuan Hong. Green quasifunction method for free vibration of simply-supported trapezoidal shallow spherical shell on Winkler foundation[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2010, 23(4): 370-376.
- [4] 李善倾, 袁鸿. Winkler 地基上固支薄板自由振动问题的准 Green 函数方法[J]. 应用数学和力学, 2011, 32(3): 253-262. (Li Shanqing, Yuan Hong. Quasi-Green's function method for free vibration of clamped thin plates on Winkler foundation[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2011, 32(3): 253-262 (in Chinese)).
- [5] 李善倾, 袁鸿, 薛兴伟. 简支梯形底扁球壳弯曲问题的准格林函数方法[J]. 计算力学学报, 2011, 28(2): 270-273. (Li Shanqing, Yuan Hong, Xue Xingwei. Green quasifunction method for bending problem of simply-supported trapezoidal shallow spherical shells[J]. Chinese Journal Computational Mechanics, 2011, 28(2): 270-273 (in Chinese)).

- [6] Li Shanqing, Yuan Hong. Green quasifunction method for free vibration of clamped thin plates[J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2012, 25(1): 37-45.
- [7] Rvachev V L. Theory of R-function and some of its application[M]. Kiev: Nauk Dumka, 1982: 415-421 (in Russian).
- [8] Ortner V N. Regularisierte faltung von distributionen. Teil 2: Eine tabelle von fundamen-talocunngen[J]. *ZAMP*, 1980, 31(1): 155-173 (in German).
- [9] 刘金义, 张红玲. R-函数理论介绍及其应用评述[J]. *工程图学学报*, 2001(2): 114-123. (Liu Jinyi, Zhang Hongling. An introduction to theory of R-functions and a survey on their applications[J]. *Journal of Engineering Graphics*, 2001(2): 114-123 (in Chinese)).
- [10] Kurpa L V, Reached V L, Ventsel E. The R-function method for the free vibration analysis of thin orthotropic plates of arbitrary shape[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 261(1): 109-122.
- [11] Kurpa L V, Lyubitska K I, Shmatko A V. Solution of vibration problems for shallow shells of arbitrary form by the R-function method[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 279(3/4/5): 1071-1084.
- [12] Kurpa L V, Pilgun G, Amabili M. Nonlinear vibrations of shallow shells with complex boundary : R-functions method and experiments[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 306(3/4/5): 580-600.
- [13] Kurpa L V, Shmatko T, Timchenko G. Free vibration analysis of laminated shallow shells with complex shape using the R-functions method[J]. *Composite Structures*, 2010, 93(1): 225-233.
- [14] Breslavsky I D, Avramov K V. Nonlinear modes of cylindrical panels with complex boundaries: R-function method[J]. *Meccanica*, 2011, 46(4): 817-832.
- [15] Awrejcewicz J, Kurpa L, Osetrov A. Investigation of the stress-strain state of the laminated shallow shells by R-functions method combined with spline-approximation[J]. *ZAMM*, 2011, 91(6): 458-467.
- [16] Pilgun G, Amabili M. Non-linear vibrations of shallow circular cylindrical panels with complex geometry: Meshless discretization with the R-functions method[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2012, 47(3): 137-152.