

液体火箭纵向耦合振动特性的快速求解方法

徐得元¹, 郝雨¹, 杨琼梁², 刘锦凡², 柳征勇², 唐国安¹

(1. 复旦大学力学与工程科学系, 上海 200433; 2. 上海宇航系统工程研究所, 上海 201108)

摘要: 针对 POGO 稳定性分析方法中矩阵法难以进行特征值求解这一问题, 在其基础上对扰动力的阻抗函数矩阵进行有理多项式逼近, 采用引入辅助变量的技术, 将结构与推进耦合系统的控制方程等效地变换成与结构动力学方程一致的形式, 因此可以通过快速求解矩阵特征值来确定耦合系统的动力学特性, 判断系统的稳定性。经过验证, 此方法不仅求解快速, 且具有很高的精度。

关键词: 液体推进剂火箭; 推进与结构耦合振动; 纵向耦合振动; 有理多项式逼近; 矩阵特征值

中图分类号: V475.1 文献标识码: A 文章编号: 1000-1328(2014)01-0021-07

DOI: 10.3873/j.issn.1000-1328.2014.01.003

Fast Matrix Algorithm for POGO Instability Prediction in Liquid Rocket

XU De-yuan¹, HAO Yu¹, YANG Qiong-liang², LIU Jin-fan², LIU Zheng-yong², TANG Guo-an¹

(1. Department of Mechanics and Engineering Science, Fudan University, Shanghai 200433, China;

2. Shanghai Academy of Spaceflight Technology, Shanghai 201108, China)

Abstract: Matrix Algorithm is by far the most accurate one regarding the POGO instability prediction problem, but it can be too complicated to solve directly. Based on the Matrix Algorithm, the approximation of the impedance matrix of the exciting force is carried out by using rational fit method and the governing transfer functions of the coupled structure-propulsion system is converted into the form of typical structural dynamic equations with the aid of auxiliary variables. In this way, eigenvalues of POGO system can be obtained much faster with almost the same accuracy as Matrix Algorithm, and relevant dynamics properties and stability of the coupled system can be determined conveniently.

Key words: Liquid rocket; Propulsion and structure coupled vibration; POGO vibration; Rational polynomial approximation; Matrix eigenvalue

0 引言

在大型液体推进运载火箭飞行的过程中, 燃料和氧化剂输送管路内的液路压力和流量受到火箭结构系统的振动而产生脉动。管路系统的压力和流量脉动最终传递至火箭燃烧室, 形成发动机推力脉动作为扰动力反作用于箭体结构。当扰动力与箭体结构发生耦合时, 将导致液体推进火箭产生自激的纵向不稳定振动, 对运载火箭造成诸如仪器损坏和发动机早期关机等严重后果。由于液体火箭纵向耦合振动时的形态与“跳跃的弹簧单腿高跷”类似, 所以

其又被命名为 POGO 振动^[1-3]。POGO 振动属于低频的流固耦合振动, 可以被视为一种不稳定的闭环自激振动^[4-6]。

传统的液体火箭 POGO 稳定性分析方法主要分为矩阵法^[7]、单传法^[8]和临界阻尼法^[9]等几类。这些方法都需要先计算出耦合系统的闭环或者开环传递函数, 然后通过对系统传递函数进行特征值求解或者绘制 Bode 和 Nyquist 图等手段来进行 POGO 稳定性分析。它们的难点主要在于如何快速精确地计算出相对复杂的耦合系统传递函数的特征值。以矩阵法为例, 由于系统传递函数中的元素包含了超

越函数和高阶多项式,所以需要不对称的复数传递矩阵进行非线性复特征值求解^[8],而通常这种非线性方程的求解过程都十分困难并且容易漏根。考虑到耦合系统传递函数中的非线性超越函数等都来自于推力函数,并观察到扰动力的频响曲线类似于经典零极点增益模型的频响曲线,所以本文拟采用有理多项式逼近的方式对扰动力阻抗函数进行等价变换,通过引入辅助变量将耦合系统的运动方程表示为二阶线性常微分方程组,将耦合系统稳定性分析由求解超越函数的代数特征值问题转化为常规的矩阵特征值问题,实现快速精确求解的目的。

1 液路的传递关系

液体推进火箭的管路系统主要由抽吸管路、三通接头、泵、泵后管路、燃烧室、推力室、蓄压器等几部分组成。分析液体火箭流体系统动特性的方法有很多,这里采用工程上常用的集中参数分析法,又称LRC等效电路分析法^[10]。本文主要针对四管发动机推进系统展开分析。如果假设四管发动机系统的结构是对称的,并且流体的流动状态也是对称的,可将四管发动机系统简化为单管发动机系统进行处理。单管发动机管路系统各元件之间脉动压力和脉动流量的传递关系如图1所示,常见管路元件的传递矩阵可参见文献[8]。

T^n 代表管路元件的传递矩阵, F^n 代表管路元件将会对结构系统产生反馈力, P 、 Q 分别表示脉动压力和脉动流量, $G(s)$ 表示结构系统的传递矩阵, \dot{X}_q 代表了能对管路系统脉动流量或脉动压力带

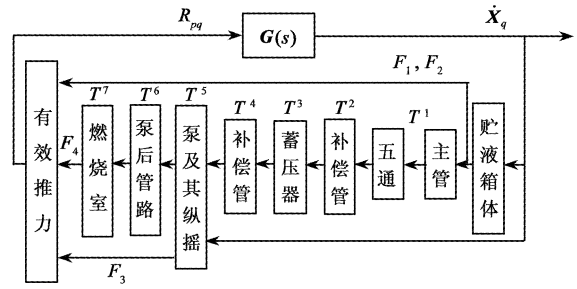


图1 液体火箭管路-结构耦合系统传递关系示意图

Fig. 1 Liquid rocket pipeline-structure coupled transfer function

来影响的结构系统速度反馈向量。

除上述传递关系,还可以建立管路系统入口处脉动压力和脉动流量与箱底振动速度之间的如下关系

$$P_{L1}^{(1)} = s\rho_0 h_T (1 - A_{L1}^{(1)}/A_T) \dot{x}_T(s) - s\rho_0 h_T Q_{L1}^{(1)}/A_T \quad (1)$$

其中符号下标 $L1$ 、 $L2$ 用于区分变量位于元件入口或是出口处,数字上标表示其作用于第几段短路元件, ρ_0 为液体密度, s 为拉普拉斯变量, h_T 为贮箱液面高度, $A_{L1}^{(1)}$ 、 A_T 分别表示与贮箱底部相连管路的截面积和贮箱截面积, \dot{x}_T 为箱底扰动速度。

考虑到发动机燃烧室内的压力上下游平衡关系,可以列出如下关系

$$P_{L2}^{(7)} = P_{L2}^{(6)} \quad (2)$$

利用管路推进系统各元件之间的传递关系,结合公式(1)和(2),经过一系列换算,可以得出脉动压力 $P_{L1}^{(1)}$ 和脉动流量 $Q_{L1}^{(1)}$ 与箱底扰动速度 \dot{x}_T 和泵位置扰动速度 $\dot{x}_{L1}^{(5)}$ 之间的传递关系。

$$Q_{L1}^{(1)} = \frac{(T_1^S - Z_{L1}^{(7)} T_2^S) \dot{x}_{L1}^{(5)}(s) - s\rho_0 h_T \left(1 - \frac{A_{L1}^{(1)}}{A_T}\right) (Z_{L1}^{(7)} T_{21} - T_{11}) \dot{x}_T(s)}{Z_{L1}^{(7)} T_{22} - T_{12} - \frac{s\rho_0 h_T}{A_T} (Z_{L1}^{(7)} T_{21} - T_{11})}$$

$$P_{L1}^{(1)} = s\rho_0 h_T \left[\left(1 - \frac{A_{L1}^{(1)}}{A_T}\right) \dot{x}_T(s) - \frac{Q_{L1}^{(1)}}{A_T} \right]$$

$$T = T^6 T^5 T^4 T^3 T^2 T^1 = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}, \quad T^S = T^6 \begin{bmatrix} -A_{L1}^{(5)} Z_{L1}^{(5)} \\ A_{L1}^{(5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1^S \\ T_2^S \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中 $Z_{L1}^{(7)} = \rho_0 g H_{L1}^{(7)} / (1 + \tau s)$, $H_{L1}^{(7)} = C_{L1}^{(7)} / (g A_{L1}^{(7)})$, τ 为燃烧室压力建立滞后时间, g 为重

力加速度常数, $C_{L1}^{(7)}$ 为燃烧室特征速度, $A_{L1}^{(7)}$ 为燃烧室喉部截面积,其余在矩阵 T 中出现的参数参看文

献[8]。

在本文中,作用在液体火箭上的典型外力主要包括了以下几类。

(1) 贮箱底开口处相对脉动流出量引起贮箱液体质心脉动对结构作用力

$$F_1 = \rho_o h_T s [Q_{L1}^{(1)} + A_{L1}^{(1)} \dot{x}_T(s)] \quad (4)$$

(2) 贮箱底开口处的脉动压力对结构作用力

$$F_2 = A_{L1}^{(1)} P_{L1}^{(1)} \quad (5)$$

(3) 泵前后压力动量变化对结构作用力

$$F_3 = N \{ -A_{L1}^{(4)} P_{L1}^{(5)} - \rho_o Q_s [2Q_{L1}^{(5)} / A_{L1}^{(4)} + \dot{x}_{L1}^{(5)}(s)] \} \quad (6)$$

(4) 发动机燃烧室脉动压力引起脉动推力

$$F_4 = N A_{th} C_f P_{12}^{(7)} \quad (7)$$

其中 $A_{L1}^{(4)}$ 表示泵上游入口处截面积, Q_s 表示泵的稳态体积流, N 表示发动机台数, A_{th} 为发动机喉部截面积, C_f 为有效推力系数。

利用公式(3),管路推进系统作用到结构上的扰动力(4)~(7)可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_p(s) &= \begin{bmatrix} F_1(s) \\ F_2(s) \\ F_3(s) \\ F_4(s) \end{bmatrix} \triangleq \mathbf{R}_{pq}(s) \begin{bmatrix} \dot{x}_T(s) \\ \dot{x}_{L1}^{(5)}(s) \end{bmatrix} \\ &\triangleq \mathbf{R}_{pq}(s) \dot{\mathbf{X}}_q(s) \end{aligned} \quad (8)$$

矩阵 $\mathbf{R}_{pq}(s)$ 是从箭体振动速度 $\dot{\mathbf{X}}_q(s)$ 与推进系统扰动力 $\mathbf{F}_p(s)$ 的传递关系,是以超越函数表示的速度阻抗函数。

2 结构与推进系统稳定性的频域分析

在 Laplace 域中,箭体结构有限元模型的运动方程表示为^[11]

$$(s^2 \mathbf{M}_s + s \mathbf{C}_s \dot{\mathbf{x}}_s + \mathbf{K}_s) \mathbf{X}_s(s) = \mathbf{F}_s(s) + \mathbf{L}_{sp} \mathbf{F}_p(s) \quad (9)$$

其中 \mathbf{X}_s 是箭体结构的节点位移向量, \mathbf{M}_s , \mathbf{C}_s 和 \mathbf{K}_s 分别是质量、阻尼和刚度矩阵, \mathbf{F}_s 是作用在结构上的外力, \mathbf{L}_{sp} 是将推进系统扰动力 \mathbf{F}_p 分配到结构相应节点上的布尔矩阵。

箱底及泵的振动位移 x_T 和 $x_{L1}^{(5)}$ 均为箭体结构上的部分节点位移分量,可用布尔矩阵 \mathbf{L}_{qs} 表示成

$$\mathbf{x}_q(t) = [x_T \quad x_{L1}^{(5)}]^T = \mathbf{L}_{qs} \mathbf{x}_s(t), \quad \mathbf{X}_q(s) = \mathbf{L}_{qs} \mathbf{X}_s(s) \quad (10)$$

将脉动推力表达式(8)及位移关系(10)代入到式(9),即可得到结构与推进耦合系统在 Laplace 域的运动方程

$$[s^2 \mathbf{M}_s + s \mathbf{C}_s \dot{\mathbf{x}}_s + \mathbf{K}_s - s \mathbf{L}_{sp} \mathbf{R}_{pq}(s) \mathbf{L}_{qs}] \mathbf{X}_s(s) = \mathbf{F}_s(s) \quad (11)$$

耦合系统稳定的准则是如下代数方程根的实部均不大于零

$$f(s) \triangleq \det(s^2 \mathbf{M}_s + s \mathbf{C}_s \dot{\mathbf{x}}_s + \mathbf{K}_s - s \mathbf{L}_{sp} \mathbf{R}_{pq}(s) \mathbf{L}_{qs}) = 0 \quad (12)$$

3 推力函数的有理多项式逼近及其等效变换

考虑到耦合系统特征值求解的难点主要源于阻抗函数 $\mathbf{R}_{pq}(s)$ 的形式较为复杂,本节着眼对其进行合理的等效变换,从而将耦合系统的特征方程简化为可以快速求解的形式。

将速度阻抗矩阵 $\mathbf{R}_{pq}(s)$ 的各项元素视为 s 的函数,用函数逼近表示成如下形式的有理多项式

$$\sum_{n=1}^N \frac{c_n}{s - A_n} + D + sh \quad (13)$$

其中 D 和 h 为实数, c_n 和 A_n 或者为实数,或者为成对出现的共轭复数。

数学软件 MATLAB 提供了有理多项式拟合工具,但不包括式(13)中的线性项。虽然不能用于直接拟合速度阻抗矩阵 $\mathbf{R}_{pq}(s)$,但可以先拟合加速度阻抗矩阵 $s^{-1} \mathbf{R}_{pq}(s)$,然后再整理成形如式(13)。此外,对矩阵各项元素分别拟合时,一般情况下得到的极点 A_n 可能各不相同。然而通过公式推导,可以确定阻抗矩阵各元素对应的极点是一致的。因此如果在对其进行有理多项式拟合的过程中,出现了由于数值误差或者拟合精度设置不统一等因素所导致的极点不一致情况,可以将分别拟合得到的极点进行平均。至于有理多项式拟合应采用多少极点,可以先解析地绘制出 $\mathbf{R}_{pq}(s)$ 各分量的传递函数图形,根据其峰值的数目进行多项式项数的预估,然后根据具体的拟合结果进行拟合迭代次数和极点个数等参数的微调,最终得出合理的拟合结果。于是,推进系统作用到结构上的扰动力将表示为

$$\mathbf{F}_p(s) = [s \mathbf{M}_{pq} + \mathbf{D}_{pq} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\mathbf{C}_{pq}^{(k)}}{s - A_k} + \frac{\bar{\mathbf{C}}_{pq}^{(k)}}{s - \bar{A}_k} \right)] \dot{\mathbf{X}}_q(s) \quad (14)$$

其中 M_{pq} , D_{pq} 为实矩阵, A_k 为成对的共轭复数, $C_{pq}^{(k)}$ 为成对的共轭矩阵。这里 p 表示阻抗矩阵的行数, q 表示阻抗矩阵的列数。

接下去将对方程(14)作等效变换, 将其表示为与结构振动方程相似的形式, 便于快速寻找特征值。为此, 考察式(14)中一对共轭项

$$F_p^{(k)}(s) = \left(\frac{C_{pq}^{(k)}}{s - A_k} + \frac{\overline{C_{pq}^{(k)}}}{s - \overline{A_k}} \right) \dot{X}_q(s) \quad (15)$$

对矩阵 $C_{pq}^{(k)}$ 作奇异值分解^[14]

$$C_{pq}^{(k)} = U_{pp} S_{pq} V_{qq}^* \quad (16)$$

这里, 上标 * 表示矩阵的共轭转置, S_{pq} 形式如下

$$S_{pq}^{(k)} = \begin{bmatrix} S_{r_k r_k}^{(k)} & \mathbf{0}_{r_k(q-r_k)} \\ \mathbf{0}_{(p-r_k)} & \mathbf{0}_{(p-r_k)(q-r_k)} \end{bmatrix}$$

r_k 为矩阵 $C_{pq}^{(k)}$ 的秩, $S_{r_k r_k}^{(k)}$ 为非奇异实对角阵, $U_{pp}^{(k)}$, $V_{qq}^{(k)}$ 为复矩阵, 满足

$$(U_{pp}^{(k)})^* U_{pp}^{(k)} = I_{pp}, \quad (V_{qq}^{(k)})^* V_{qq}^{(k)} = I_{qq}$$

分别从 $U_{pp}^{(k)}$ 和 $V_{qq}^{(k)}$ 中取出前 r_k 列, 构成 $U_{pr_k}^{(k)}$ 和 $V_{qr_k}^{(k)}$ 均为列满秩矩阵, 将公式(16)表示成

$$C_{pq}^{(k)} = U_{pr_k}^{(k)} S_{r_k r_k}^{(k)} (V_{qr_k}^{(k)})^* \quad (17)$$

这样, 结构振动与推进系统扰动力的关系(15)可改写为

$$F_p^{(k)}(s) = \left(\frac{U_{pr_k}^{(k)} S_{r_k r_k}^{(k)} (V_{qr_k}^{(k)})^*}{s - A_k} + \frac{\overline{U_{pr_k}^{(k)}} S_{r_k r_k}^{(k)} (\overline{V_{qr_k}^{(k)}})^*}{s - \overline{A_k}} \right) \dot{X}_q(s) \quad (18)$$

定义两组关于时间的实函数 $y_{r_k}^{(k)}(t)$ 和 $y_{r_k}^{n(k)}(t)$, 在时域满足微分方程

$$\begin{cases} \ddot{y}_{r_k}^{(k)}(t) - A_k' y_{r_k}^{(k)}(t) + A_k'' y_{r_k}^{n(k)}(t) = (V_{qr_k}^{(k)})^T x_q(t) \\ \ddot{y}_{r_k}^{n(k)}(t) - A_k'' y_{r_k}^{(k)}(t) - A_k' y_{r_k}^{n(k)}(t) = - (V_{qr_k}^{(k)})^T x_q(t) \end{cases} \quad (19)$$

其中 $A_k' = \text{Re}(A_k)$, $A_k'' = \text{Im}(A_k)$, $V_{qr_k}^{(k)} = \text{Re}(V_{qr_k}^{(k)})$, $V_{qr_k}^{n(k)} = \text{Im}(V_{qr_k}^{(k)})$, $x_q(t)$ 是 $X_q(s)$ 的 Laplace 逆变换。

将式(19)进行 Laplace 变换, 得到

$$\begin{cases} (s - A_k') Y_{r_k}^{(k)}(s) + A_k'' Y_{r_k}^{n(k)}(s) = (V_{qr_k}^{(k)})^T X_q(s) \\ -A_k'' Y_{r_k}^{(k)}(s) + (s - A_k') Y_{r_k}^{n(k)}(s) = - (V_{qr_k}^{n(k)})^T X_q(s) \end{cases} \quad (20)$$

其中 $Y_{r_k}^{(k)}(s)$, $Y_{r_k}^{n(k)}(s)$ 和 $X_q(s)$ 分别是 $y_{r_k}^{(k)}(t)$, $y_{r_k}^{n(k)}(t)$ 和 $x_q(t)$ 进行 Laplace 变换后的结果。

可以验证, 满足方程(20)的函数 $Y_{r_k}^{(k)}(s)$ 和 $Y_{r_k}^{n(k)}(s)$ 必将成立关系

$$\begin{cases} \frac{(V_{qr_k}^{(k)})^*}{s - A_k} X_q(s) = Y_{r_k}^{(k)}(s) + j Y_{r_k}^{n(k)}(s) \\ \frac{(\overline{V_{qr_k}^{(k)}})^*}{s - \overline{A_k}} X_q(s) = Y_{r_k}^{(k)}(s) - j Y_{r_k}^{n(k)}(s) \end{cases} \quad (21)$$

将式(21)代入式(18), $F_p^{(k)}(s)$ 可以写成

$$F_p^{(k)}(s) = 2 [U_{pr_k}^{(k)} S_{r_k r_k}^{(k)} \dot{Y}_{r_k}^{(k)}(s) - U_{pr_k}^{n(k)} S_{r_k r_k}^{n(k)} \dot{Y}_{r_k}^{n(k)}(s)]$$

其中 $U_{pr_k}^{(k)} = \text{Re}(U_{pr_k}^{(k)})$, $U_{pr_k}^{n(k)} = \text{Im}(U_{pr_k}^{(k)})$ 。

从方程(20)的第一个关系可以得到

$$Y_{r_k}^{(k)}(s) = \frac{(V_{qr_k}^{(k)})^T X_q(s) - (s - A_k') Y_{r_k}^{n(k)}(s)}{A_k''} \quad (22)$$

将上面方程分别代入式(22)和(20)的第二个方程, 导出

$$\begin{cases} F_p^{(k)}(s) = s D_{pq}^{(k)} X_q(s) + s^2 M_{pr_k}^{(k)} Y_{r_k}^{(k)}(s) + \\ \quad s D_{pr_k}^{(k)} Y_{r_k}^{n(k)}(s) \\ s^2 Y_{r_k}^{n(k)}(s) - s (V_{qr_k}^{n(k)})^T X_q(s) - 2s A_k' Y_{r_k}^{(k)}(s) + \\ \quad K_{r_k q}^{(k)} X_q(s) + ((A_k')^2 + (A_k'')^2) Y_{r_k}^{(k)}(s) = 0 \end{cases} \quad (23)$$

其中

$$M_{pr_k}^{(k)} = \frac{2}{A_k''} U_{pr_k}^{n(k)} S_{r_k r_k}^{(k)}, \quad K_{r_k q}^{(k)} = A_k' (V_{qr_k}^{(k)})^T - A_k'' (V_{qr_k}^{n(k)})^T$$

$$D_{pq}^{(k)} = - \frac{2}{A_k''} U_{pr_k}^{(k)} S_{r_k r_k}^{(k)} (V_{qr_k}^{(k)})^T,$$

$$D_{pr_k}^{(k)} = \frac{2}{A_k''} (A_k'' U_{pr_k}^{(k)} - A_k' U_{pr_k}^{n(k)}) S_{r_k r_k}^{(k)}$$

在式(23)的两个方程中消去变量 $Y_{r_k}^{n(k)}(s)$, 将得到与式(15)形式相同的推进系统扰动力 $F_p^{(k)}$ 与结构速度 $\dot{X}_q(s)$ 的关系, 因此方程(23)与(15)是等价的。

利用方程(23), 一般形式的扰动力公式(14)最终等效成

$$\begin{cases} F_p(s) = (s^2 M_{pq} + s C_{pq}) X_q(s) + \\ \quad (s^2 M_{pr_T} + s C_{pr_T}) Y_{r_T}(s) \\ (s C_{r_T q} + K_{r_T q}) X_q(s) + (s^2 I_{r_T r_T} + s A_{r_T r_T} + \\ \quad \Omega_{r_T r_T}) Y_{r_T}(s) = 0 \end{cases} \quad (24)$$

其中

$$C_{pq} = D_{pq} + \sum_{k=1}^n D_{pq}^{(k)}, \quad M_{pr_T} = [M_{pr_1}^{(1)} \quad \cdots \quad M_{pr_n}^{(n)}],$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{prT} &= [\mathbf{D}_{pr1}^{(1)} \quad \cdots \quad \mathbf{D}_{prn}^{(n)}] \\ \mathbf{K}_{rTq} &= \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{r1q}^{(1)})^T \\ \vdots \\ (\mathbf{K}_{rnq}^{(n)})^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{rTq} = \begin{bmatrix} -(\mathbf{V}_{qr1}^{(1)})^T \\ \vdots \\ -(\mathbf{V}_{qrn}^{(n)})^T \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Y}_{rT}(s) &= \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{r1}^{(1)}(s) \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_{rn}^{(n)}(s) \end{bmatrix}, \quad r_T = r_1 + r_2 + \cdots + r_n \\ \boldsymbol{\Omega}_{rT} &= \text{diag}([\mathbf{A}'_1]^2 + (\mathbf{A}_1^n)^2] \mathbf{I}_{r_1}, \cdots, \\ &\quad [(\mathbf{A}'_n)^2 + (\mathbf{A}_n^n)^2] \mathbf{I}_{r_n}), \\ \mathbf{A}_{rT} &= \text{diag}(-2\mathbf{A}'_1, \cdots, -2\mathbf{A}'_n) \end{aligned}$$

4 结构与推进系统的耦合方程

扰动力表达式(24)代入到箭体振动方程(9), 得到 Laplace 域的耦合系统方程

$$\begin{cases} (s^2 \mathbf{M}_{ss} + s \mathbf{C}_{srT} + \mathbf{K}_s) \mathbf{X}_s(s) + \\ \quad (s^2 \mathbf{M}_{srT} + s \mathbf{C}_{srT}) \mathbf{Y}_{rT}(s) = \mathbf{F}_s(s) \\ (s \mathbf{C}_{rTs} + \mathbf{K}_{rTs}) \mathbf{X}_s(s) + (s^2 \mathbf{I}_{rT} + \\ \quad s \mathbf{A}_{rT} + \boldsymbol{\Omega}_{rT}) \mathbf{Y}_{rT}(s) = \mathbf{0}_{rT} \end{cases} \quad (25)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{ss} &= \mathbf{M}_s - \mathbf{L}_{sp} \mathbf{M}_{pq} \mathbf{L}_{qs}, \\ \mathbf{M}_{srT} &= -\mathbf{L}_{sp} \mathbf{M}_{prT}, \quad \mathbf{K}_{rTs} = \mathbf{K}_{rTq} \mathbf{L}_{qs} \\ \mathbf{C}_{srT} &= -\mathbf{L}_{sp} \mathbf{C}_{prT}, \quad \mathbf{C}_{srT} = \mathbf{C}_s - \mathbf{L}_{sp} \mathbf{C}_{pq} \mathbf{L}_{qs}, \\ \mathbf{C}_{rTs} &= \mathbf{C}_{rTq} \mathbf{L}_{qs} \end{aligned}$$

变换到时域后得到耦合系统类似于结构的运动方程

$$\mathbf{M}_c \ddot{\mathbf{x}}_c + \mathbf{C}_c \dot{\mathbf{x}}_c + \mathbf{K}_c \mathbf{x}_c = \mathbf{f}_c(t) \quad (26)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_c &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ \mathbf{y}_{rT} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_c(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_s(s) \\ \mathbf{0}_{rT} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ss} & \mathbf{M}_{srT} \\ \mathbf{0}_{rTs} & \mathbf{I}_{rT} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C}_c &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{srT} & \mathbf{C}_{srT} \\ \mathbf{C}_{rTs} & \mathbf{A}_{rT} + \boldsymbol{\Omega}_{rT} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & \mathbf{0}_{srT} \\ \mathbf{K}_{rTs} & \boldsymbol{\Omega}_{rT} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

求解方程(26)的特征值可采用状态空间方法。

令 $\mathbf{y}_c = \dot{\mathbf{x}}_c$, $\mathbf{z}_c = [\mathbf{y}_c^T \quad \mathbf{x}_c^T]^T$, 将式(26)等价地改写成

$$\mathbf{A} \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{B} \mathbf{z} = \mathbf{f}(t) \quad (27)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M}_c \\ \mathbf{M}_c & \mathbf{C}_c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_c(t) \end{bmatrix}$$

于是, 耦合系统的特征值求解可归结为矩阵特征值问题

$$(\lambda \mathbf{A} + \mathbf{B}) \boldsymbol{\psi}_c = \mathbf{0} \quad (28)$$

5 算例结果及分析

液体推进火箭在主动段飞行过程中, 管路与结构系统特性都是时变的, 但特性变化相对于扰动力的变化是缓变量, 因此可采用准静态处理方法。参考国内某液体运载火箭的设计及发射实例, 在其飞行过程的某个时刻(60s), 给定推进系统的各项参数, 根据式(8)和式(14)可以计算出逼近前后的扰动力阻抗函数曲线, 如图2和图3。

从图2, 图3看出, 利用有理多项式来拟合扰动力阻抗函数可以达到很高的拟合精度。通过计算, 还可以确定方程(15)内 $\mathbf{C}_{pq}^{(k)}$ 的秩都是1。

箭体管路与结构耦合系统的特征值可以通过以下两种方法得到: 求解非线性代数特征值问题(12)或矩阵特征值问题(28)。在方程(12)中, 由于 $f(s)$ 是关于 s 的非线性函数, 所以一般只能对其进行叠代求解, 并且对于每一个潜在的特征值都需要预估一个能叠代收敛的初值。而当特征值数目较多时, 确定全部的叠代初值并非易事, 并且费时。

图4是局部区域内 $1/f(s)$ 的三维图像。因为 $f(s) = 0$ 对应于 $1/f(s) = \infty$, 所以图中的尖峰所在位置就是函数 $f(s)$ 的零点(即特征值)。可以看出, 当特征值的实部绝对值较小时, 尖峰分布在一个较小的区域内。因此求解方程 $f(s) = 0$ 容易出现漏根。从图5可以看出, 耦合系统的特征值分布广且不均匀。所以在对式(28)求解时, 需要搜索的目标区域将会很大, 并且在特征值比较接近的区域, 迭代次数必须足够多, 这样才能保证所求得特征值具有一定的精确度。相比于上述搜索迭代的计算成本, 有理多项式逼近所需的计算量几乎微乎其微。

方程(28)是线性代数中的矩阵特征值问题, 可采用成熟的算法求解, 而且不必指定初值, 也不会漏根。因此是一种快速、高效的算法。

表1给出了利用直接求解法(利用方程19)和快速求解法(方程35)得到的、根据虚部绝对值排序的耦合系统前10个特征值。结果表明, 两者误差最大不超过1.13%, 能够满足工程分析的要求。

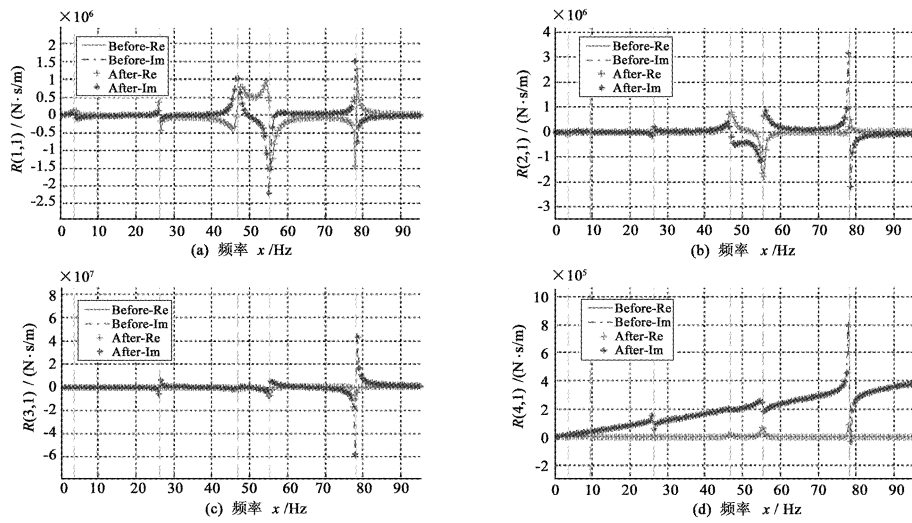


图 2 扰动力阻抗函数逼近前后对比 ($R_{11} \sim R_{41}$)

Fig. 2 Comparison of impedance curves of exciting force before and after rational fit approximation

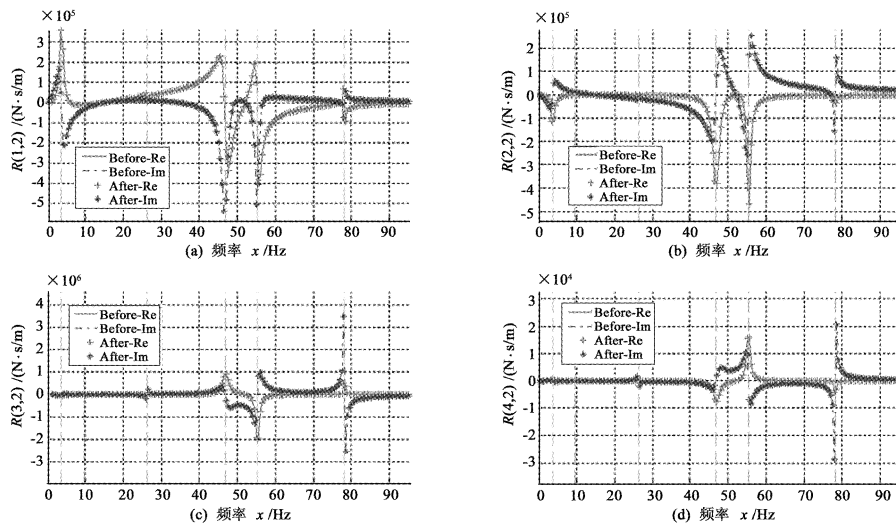


图 3 扰动力阻抗函数逼近前后对比 ($R_{12} \sim R_{42}$)

Fig. 3 Comparison of impedance curves of exciting force before and after rational fit approximation

表 1 结构与推进耦合系统的特征值

Table 1 Eigenvalues of structure and propulsion coupled system

序号 k	直接求解法/(rad/s)	快速求解法/(rad/s)	相对误差 $\times 10^{-2}$ $\frac{ s_k^{(II)} - s_k^{(I)} }{ s_k^{(I)} }$
	$s_k^{(I)}/10^3$	$s_k^{(II)}/10^3$	
1	-0.0039 + 0.0228i	-0.0039 + 0.0227i	0.2164
2	-0.0016 + 0.0570i	-0.0017 + 0.0569i	0.1414
3	-0.2154 + 0.0607i	-0.2153 + 0.0605i	0.1279
4	-0.0051 + 0.0702i	-0.0049 + 0.0701i	0.2621
5	-0.0067 + 0.1265i	-0.0066 + 0.1265i	0.0079
6	-0.0002 + 0.1654i	-0.0002 + 0.1654i	0.0121
7	-0.0161 + 0.2182i	-0.0179 + 0.2165i	1.1249
8	-0.0248 + 0.2475i	-0.0248 + 0.2475i	0.0180
9	-0.0351 + 0.2940i	-0.0351 + 0.2940i	0.0068
10	-0.0132 + 0.2970i	-0.0132 + 0.2963i	0.2155

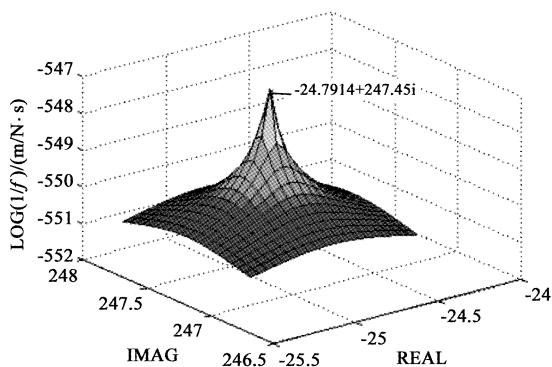


图 4 耦合系统传递函数局部图

Fig. 4 Local transfer function of coupled system

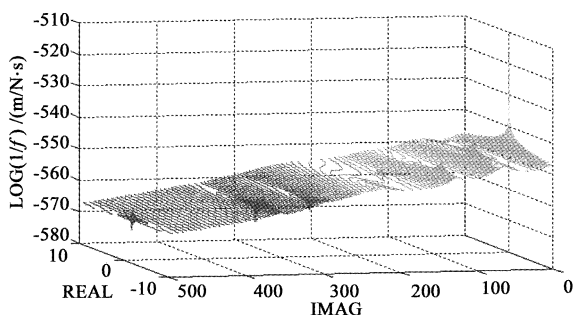


图 5 耦合系统传递函数等值线总体图

Fig. 5 Global contours of transfer function of coupled system

6 结束语

有理多项式能高精度逼近推进系统扰动力的传递函数,在有理多项式的表示下结构与推进耦合系统的稳定性分析又可以归结为成熟的矩阵特征值求解问题,避免了确定叠代初值、漏根等现象,实现了液体推进火箭纵向振动稳定性的快速、高效计算。由于不需要确定初值,也不会漏根,因此系统参数输入之后,整个分析过程均无需人工干预,这将为进一步开展稳定性关于结构及推进系统的参数灵敏度分析创造了条件。然而,由于利用了推力函数的有理多项式逼近这种技术手段,本文只能间接地建立起耦合系统特征值与管路结构系统等诸多参数之间的关系,为直接阐明系统物理参数与特征值之间的规律带来了一定的障碍。

参 考 文 献

[1] Rubin S. Longitudinal instability of liquid rockets due to propulsion feedback (POGO) [J]. Journal of Spacecraft and Rockets, 1966, 3(8): 1188 - 1195.

- [2] Lock M H, Coppolino R N, Rubin S. Space shuttle pogo studies (systems stability) [R]. NASA CR - 151596, 1977.
- [3] Ordonneau G. A new numerical method for POGO analysis [C]. 30th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference, Indianapolis, USA, June 27 - 29, 1994.
- [4] 王其政, 高万镛, 顾永春, 等. 晓振 POGO 稳定性可靠性算法与参数分析 [J]. 宇航学报, 1986, 7(2): 29 - 47. [Wang Qi-zheng, Gao Wan-yong, Gu Yong-chun, et al. POGO stability, reliability and parameters analysis [J]. Journal of Astronautics, 1986, 7(2): 29 - 47.]
- [5] 马道远, 王其政, 荣克林. 液体捆绑火箭 POGO 稳定性分析的闭环传递函数法 [J]. 强度与环境, 2010, 37(1): 1 - 7. [Ma Dao-yuan, Wang Qi-zheng, Rong Ke-lin. Close-loop transfer function of POGO stability analysis for binding liquid-propellant rocket [J]. Structure & Environment Engineering, 2010, 37(1): 1 - 7.]
- [6] 黄怀德. 液体火箭的 POGO 振动研究 [J]. 振动工程学报, 1987, 1(1): 5 - 13. [Huang Huai-de. Research into POGO vibration of liquid rockets [J]. Journal of Vibration Engineering, 1987, 1(1): 5 - 13.]
- [7] Lock M H, Rubin S. Passive suppression of POGO on the space shuttle [R]. NASA CR - 132452, 1974.
- [8] 王其政. 结构耦合动力学 [M]. 北京: 中国宇航出版社, 1999: 255 - 285.
- [9] Lewis W. Simplified analytical model for use in design of pump-inlet accumulators for the prevention of liquid rocket longitudinal oscillation (POGO) [R]. NASA TN D-5394, 1969.
- [10] 杨明, 杨智春, 史淑娟. 液体火箭 POGO 振动时域分析方法研究 [J]. 强度与环境, 2010, 37(2): 29 - 36. [Yang Ming, Yang Zhi-chun, Shi Shu-juan. Method research of time domain analysis of POGO vibration of the liquid rocket [J]. Structure & Environment Engineering, 2010, 37(2): 29 - 36.]
- [11] Rudolf F G. Longitudinal mass-spring modeling of launch vehicles [R]. NASA TN D-5371, August 1969.
- [12] Gene H G, Charles F V L. Matrix computations (3rd ed.) [M]. Baltimore, Maryland: The Johns Hopkins University Press, 1996.

作者简介:

徐得元 (1987 -), 男, 博士, 主要从事结构动力学和流固耦合方面的研究。

通信地址: 邯郸路 220 号复旦大学光华楼东主楼 2617 室 (200433)

电话: 18502194128

E-mail: xudeyuanghw@gmail.com

(编辑: 曹亚君)